# MATEMATIČKI KLOKAN J

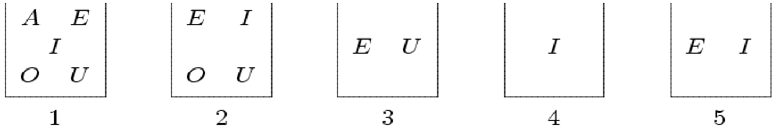
**Rješenja**

**Četvrtak, 10. travnja 2008.**

**Natjecanje za Junior (II. i III. razred S.Š.)**

**Pitanja za 3 boda:**

**1.** Dano je 5 kutija, a u svakoj od njih nalaze se kartice sa slovima A, E, I, O, U kao što je prikazano na slici. Petar je izbacio neke kartice tako da je na kraju svaka kutija sadržavala jednu karticu, a različite kutije sadržavale su različita slova. Koja je kartica ostala u kutiji broj 2?




A) A B) E C) I D) O E) U

**Rješenje: D**

**2.** Franjo i Gabrijela natjecali su se u trčanju na 200 metara. Gabrijela je stazu pretrčala za pola minute, a Franjo za jednu stotinu sata. Tko je i za koliko sekundi bio brži?

A) Gabrijela za 36 sekundi B) Franjo za 24 sekunde C) Gabrijela za 6 sekundi
D) Franjo za 4 sekunde E) Imaju ista vremena

**Rješenje: C.** Gabrijela je pretrčala za 30 sekundi, a Franjo za 36.

**3.** Na proslavi ovogodišnje Nove godine, Borna je obukao majicu s brojem godine i pred ogledalom izveo je stoj na rukama. Koju je sliku u ogledalu vidio njegov prijatelj Vinko stojeći iza Borne, normalno na nogama?

A) B) C) D) E)

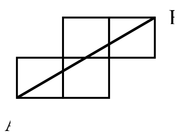

**Rješenje: B**

**4.** Zadani su brojevi $a = 2-(-4)$, $b = (-2)\cdot(-3)$, $c = 2-8$, $d = 0-(-6)$ i $e = (-12):(-2)$. Koliko od njih nije jednako broju 6?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

**Rješenje: B**

**5.** Kolika je duljina dužine AB, ako je duljina stranice svakog od kvadrata na slici 1 metar?



A) 5 B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ D) $\sqrt{5}$ E) nijedna od danih

**Rješenje: B.** To je hipotenuza pravokutnog trokuta sa stranicama 3 i 2.

**6.** Koliko se najmanje slova može maknuti iz riječi KANGOUROU tako da su preostala slova abecedno poslagana?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**Rješenje: D.** Na pr. KNORU

**7.** U kutiji je 7 karata. Brojevi od 1 do 7 napisani su na njima i to točno jedan broj na jednoj karti. Prvi igrač iz kutije na slučajan način odabere 3 karte, a drugi igrač uzme 2 karte. Tada prvi igrač kaže drugome: "Znam da je zbroj brojeva na tvojim kartama paran." Koliki je zbroj brojeva na kartama prvog igrača? (Igrači ne vide preostale karte u kutiji.)

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

**Rješenje: B** Ako je prvi igrač uzeo 1,2 ili 3 neparne karte, tada je u kutiji ostala barem jedna neparna, te prvi igrač ne može znati je li drugi dobio paran ili neparan zbroj. A budući da prvi igrač tvrdi da zna da je zbroj paran, slijedi da je on izvukao sve 3 parne karte, i njihov zbroj je 2+4+6=12.

**8.** Tom i Jerry dobili su jednake papire u obliku pravokutnika. Svaki od njih je svoj papir razrezao na dva jednaka pravokutnika. Tom je izrezao pravokutnike s opsegom 40 cm, a Jerry dva pravokutnika s opsegom 50 cm. Koliki je bio opseg početnog komada papira?

A) 40 cm B) 50 cm C) 60 cm D) 80 cm E) 100 cm

**Rješenje: C** Neka su $a$ i $b$ stranice početnog pravokutnika. Tom je, na primjer mogao razrezati pravokutnik na dva pravokutnika sa stranicama $a/2$ i $b$, a Jerry bi u tom slučaju svoj papir razrezao na pravokutnike sa stranicama $a$ i $b/2$. Dakle, vrijedi $a+2b=40$, $2a+b=50$. Odatle dobivamo da je $a$=20, $b$=10, pa je opseg 60 cm.

**Pitanja za 4 boda:**

**9.** Sedam je patuljaka rođeno istog dana u 7 uzastopnih godina. Tri najmlađa zajedno imaju 42 godine. Koliko godina zajedno imaju tri najstarija patuljka?

A) 51 B) 54 C) 57 D) 60 E) 63

**Rješenje: B** Neka je $x$ broj godina najmlađeg patuljka. Tada je $x+(x+1)+(x+2)=42$, tj. $x=13$. Tri najstarija patuljka imaju $x+4$, $x+5$ i $x+6$ godina, tj. zbroj im je 17+18+19=54.

**10.** Na prvom testu Ana je osvojila 1 bod od mogućih 5. Na sljedećim testovima osvojila je sve bodove od mogućih 5. Koliko je još testova trebala pisati da joj prosječan broj bodova bude 4 po testu?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

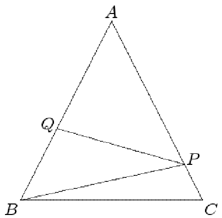
**Rješenje: B** Neka je $n$ broj dodatnih testova. Tada je $1+5n=4(n+1)$, tj. $n=3$.

**11.** Marko ima 10 kartica, a na svakoj od njih se nalazi točno jedan od ovih brojeva: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53, 68. Koliko najmanje kartica Marko može izabrati tako da zbroj brojeva na njima bude jednak 100?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) to je nemoguće učiniti

**Rješenje: D** Uočimo da dani brojevi završavaju na 3 ili 8. Ako odabere neparan broj kartica koje završavaju na 3, te još neku na 8, ne može dobiti zbroj 100 (završava na 0). Ako odabere dvije kartice čiji brojevi završavaju na 3, tada zbroj završava na 6, te mora odabrati 3 kartice koje završavaju na 8. Ako odabere 4 kartice koje završavaju na 3, tada mora uzeti još jednu koja završava na 8. Dakle, radi se o 5 kartica. Jedna mogućnost je 3,13,23,33,28.

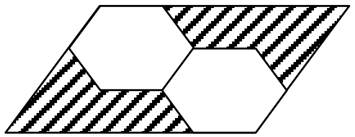
**12.** Na slici je dan jednakokračan trokut u kojem je $|AB|=|AC|$. Ako je PQ okomito na AB, kut BPC je $120^o$ i kut ABP je $50^o$, koliki je kut PBC?




A) $5^o$ B) $10^o$ C) $15^o$ D) $20^o$ E) $25^o$

**Rješenje: A** Označimo s $x$ traženi kut. Tada imamo: $\angle$ABC=$\angle$BCA=$x$+50, $\angle$BQP=40, $\angle$QPA=20, pa je kut BAC izraziv na dva načina: 180-2(50+$x$)=70, tj. $x$=5$^o$.

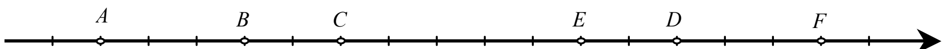
**13.** Dva pravilna šesterokuta na slici su jednaka. Kolika je površina paralelograma osjenčana?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

**Rješenje: A** Neka je $a$ stranica šesterokuta. Tada je 4$a$ stranica paralelograma, a visina mu je jednaka trostrukom polumjeru upisane kružnice šesterokuta, tj. $v=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Površina paralelograma je $P=6a^2\sqrt{3}$, a površina šesterokuta je $P=3a^2\sqrt{3}$, što je upravo polovina paralelograma. Dakle, osjenčana je polovina paralelograma.

**14.** Šest prirodnih brojeva označeno je slovima na brojevnom pravcu. Poznato je da su barem dva od njih djeljivi s 3 i barem dva od njih djeljivi s 5. Koji su brojevi djeljivi s 15?




A) $A$ i $F$ B) $B$ i $D$ C) $C$ i $E$ D) svi E) samo jedan od njih

**Rješenje: A** Ako 5 dijeli A, tada 5 dijeli A,C,E i F. Ako istovremeno 3 dijeli A, tada 3 dijeli A,B,D i F. Dakle, u tom slučaju, 15 dijeli A i F. Pokažimo da druge mogućnosti nisu moguće. Kad 5 ne bi dijelila A, tada bi 5 dijelila B ili D, ali ne i oboje, što je u suprotnosti s pretpostavkom zadatka. Kad 3 ne bi dijelio A, tada bi 3 dijelio C ili E, ali ne i oboje, što je opet u suprotnosti s pretpostavkom.

**15.** Koliko najviše znamenaka treba obrisati iz 1000-znamenkastog broja 20082008…2008 tako da zbroj preostalih znamenaka bude 2008?

A) 746 B) 510 C) 524 D) 1020 E) 130

**Rješenje: A** U tom broju ima 250 dvojki, 250 osmica i 500 nula. Dakle, treba obrisati što više manjih brojeva. Kad bi ostale same osmice, tada bi zbroj bio 2000. Dakle, trebaju ostati još 4 dvojke. Brišu se 246 dvojki i sve nule, tj 746 znamenaka.

**16.** Koliko postoji parova realnih brojeva čiji su zbroj, produkt i kvocijent međusobno jednaki?

A) nema takvih parova B) 1 par C) 2 para D) 4 para E) 8 parova

**Rješenje: B** Oba broja ne mogu biti 0. Označimo ih s $x$ i $y$. Pretpostavimo da je $y$ različit od 0. Tada je $xy=\frac{x}{y}$, pa je $x(y^2-1)=0$, odakle slijedi da je $y=1$ ili $y=-1$.

Izjednačavanjem zbroja i produkta za prvo rješenje dobivamo kontradikciju, a za drugo rješenje dobivamo $x=\frac{1}{2}$. Dakle, radi se o samo jednom paru brojeva.

**Pitanja za 5 bodova:**

**17.** Svaka znamenka počevši od treće (brojano slijeva) u šesteroznamenkastom broju jednaka je zbroju prethodne dvije znamenke (koje se nalaze slijeva). Koliko šesteroznamenkastih brojeva ima to svojstvo?

A) nijedan B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

**Rješenje: D** Označimo taj šesteroznamenkasti broj s *abcdef*. Tada je $c=a+b$, $d=a+2b$, $e=2a+3b$, $f=3a+5b$. Budući da je $f$ znamenka, slijedi da je ili $b$=1 ili $b$=0. Rješenja su brojevi 112358, 101123, 202246, 303369.

**18.** Imam drvenu kocku čije tri strane su plave, a tri crvene. Kad je prerežem u $3\times3\times3=$ 27 jednakih malih kocaka, koliko od njih ima barem dvije različitim bojama obojane strane?

A) 6 B) 12 C) 14 D) 16

E) ovisi o tome koje su strane velike kocke bile obojane plavo i crveno

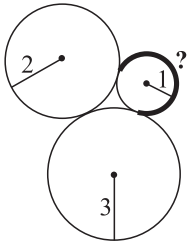
**Rješenje: E** Postoje dva načina bojanja: da se tri jednako obojane strane sastaju u jednom vrhu ili da se ne sastaju. U prvom slučaju postoji 12 strana koje imaju bar jednu plavu i bar jednu crvenu stranu, a u drugom slučaju ima ih 16.

**19.** Označimo sa $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$. Ako je $n!=2^{15}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13$, tada je $n$ jednako

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

**Rješenje: D** Budući da je u $n$! faktor 13, $n$ je veći ili jednak 13. Izračunavanjem 13! itd dobivamo da je $n$=16.

**20.** Kolika je duljina istaknutog (većeg) luka na kružnici polumjera 1?




A) $\frac{5\pi}{4}$  B) $\frac{5\pi}{3}$  C) $\frac{\pi}{2}$  D) $\frac{3\pi}{2}$  E) $\frac{2\pi}{3}$

**Rješenje: D** Kad se u ovim kružnicama povuku polumjeri koji spajaju točke diranja, dobije se trokut čiji vrhovi su središta kružnica sa stranicama 3,4,5. Dakle, radi se o pravokutnom trokutu, čiji je pravi kut upravo u vrhu najmanje kružnice. Dakle, istaknuti luk male kružnice čini ¾ cjelokupne kružnice, tj. duljina mu je ${}^{3\pi}\!/_{2}$ .

**21.** Kvadrat $4 \times 4$ podijeljen je na 16 jediničnih kvadratića. Nađi najveći broj dijagonala koje se mogu povući u tim kvadratićima tako da nikoje dvije nemaju zajedničke točke.

A) 8  B) 9  C) 10  D) 11  E) 12

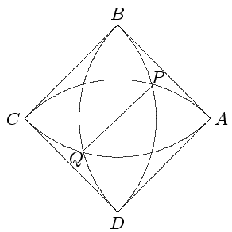
**Rješenje: A** S kojom god dijagonalom krenuli u jednom od vršnih kvadratića, sve dijagonale u tom prvom stupcu (ili retku) moraju biti s njom paralelne, a drugi stupac se mora preskočiti, te opet u trećem stupcu se pojave dijagonale, a u četvrom ih nema. Dakle, radi se o 8 dijagonala.

**22.** Kanga uvijek skače po 1m ili po 3 m. Želi skočiti točno 10 metara. Na koliko načina može Kanga izvesti to skakanje? (Skokove 1+3+3+3 i 3+3+3+1 smatramo različitim načinima.)

A) 28  B) 34  C) 35  D) 55  E) 56

**Rješenje: A** Broj 10 možemo prikazati kao zbroj 3 trojke i 1 jedinice, kao zbroj 2 trojke i 4 jedinice, kao zbroj 1 trojke i 7 jedinica, te kao zbroj 10 jedinica. Budući da je poredak u zbrajanju bitan, radi se o permutacijama (s ponavljanjem) i ukupan je broj načina jednak $\frac{4!}{3!}+\frac{6!}{2!4!}+\frac{8!}{7!}+1=28$ .

**23.** Kvadrat ABCD na slici ima stranicu duljine 1, a lukovima su središta u vrhovima kvadrata. Kolika je udaljenost točaka P i Q?




A) $2-\sqrt{2}$  B) $\frac{3}{4}$  C) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$  E) $\sqrt{3}-1$

**Rješenje: E** Trokut PCD je jednakostraničan sa stranicom 1. Tada je udaljenost od P do stranice CD jednaka $\frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je udaljenost od P do stranice AB jednaka $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Isto tolika je udaljenost i točke Q do stranice CD. Tada je udaljenost od P do Q jednaka $1-2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}-1$ .

**24.** Koliko postoji 2007-eroznamenkastih brojeva s ovim svojstvom: svaki dvoznamenkasti broj sačinjen od dvije uzastopne znamenke početnog broja je djeljiv ili sa 17 ili s 23?

A) 5  B) 6  C) 7  D) 9  E) više od 9

**Rješenje: A** Dvoznamenkasti višekratnici od 23 su 23,46, 69 i 92, a višekratnici od 17 su 17, 34, 51, 68, 85. Ako promatrani broj počinje s 1, tada je sljedeća znamenka 7, ali tada više ne možemo nastaviti niz s nekim brojem tako da dobijemo višekratnik od 17 ili 23. Na analogan način dobivamo da promatrani broj počinje s 23469..., 34692..., 46923..., 69234..., 92346..., tj. ima ih 5.