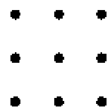
MATEMATIČKI KLOKAN S
RJEŠENJA

Pitanja za 3 boda:

1. Koliko najmanje točaka moramo ukloniti iz figure na slici, tako da nijedne tri od preostalih točaka ne pripadaju istom pravcu?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

Rješenje: C 3 točke po bilo kojoj dijagonali

2. U akvariju je 200 riba, od kojih je 1% plavih, a ostale su žute. Koliko žutih riba treba izvaditi iz akvarija da bi plave ribe predstavljale 2 % od ukupnog broja svih riba u akvariju?

A) 2 B) 4 C) 20 D) 50 E) 100

Rješenje: E 1 % (200) = 2, u akvariju su 2 plave ribe. 2 % (x) = 2 $\Rightarrow$ x = 100. Iz akvarija treba maknuti 100 riba.

3. Koji je od sljedećih brojeva najveći?

A) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ E) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

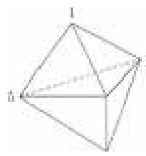
Rješenje: A

4. Marija, Vili i Kosjenka bili su slastičarnici. Svaki od njih naručio je 3 čaše soka, 2 sladoleda i 5 uštipaka. Koji od sljedećih iznosa može biti iznos njihovog ukupnog računa?

A) 140,20 kn B) 138,20 kn C) 137,20 kn D) 136,20 kn E) 135,20 kn

Rješenje: D Svo troje imalo je istu narudžbu pa ukupan iznos mora biti djeljiv s 3. T o je 136,20 kn.

5. Na slici je figura koja ima 6 strana oblika trokuta. Na svakom vrhu je broj. Za svaku stranu zbrajamo tri broja na vrhovima te strane. Ako su sve sume jednake dva broja su 1 i 5 kao na slici, kolika je suma svih 5 brojeva?



A) 9 B) 12 C) 17 D) 18 E) 24

Rješenje: C Nasuprot vrha s brojem 1 je vrh s brojem 1. Ostali vrhovi imaju broj 5.

6. Za koliko različitih prirodnih brojeva n je broj n^2+n prosti broj?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) beskonačno mnogo

Rješenje: B Samo za broj 1.

7. Kružnice $k(F,13)$ i $k(G,15)$ sijeku se u točkama P i Q. Udaljenost točaka P i Q je 24. Koji od sljedećih brojeva može biti duljina dužine $\overline{FG}$?

A) 2 B) 5 C) 9 D) 14 E) 18

Rješenje: D $\overline{FG}$ je zajednička tetiva obje kružnice, njena simetrala prolazi kroz oba središta. Neka je točka R polovište dužine $\overline{FG}$. Primjenom Pitagorinog poučka na trokute $\triangle$ FRP i $\triangle$ GRP dobivamo da je $|FR|$= 5 i $|GR|$=9, odn. $|FG|$ = 14.

8. Kutija sadrži 2 bijele, 3 crvene i 4 plave čarape. Sanja zna da trećina ukupnog broja čarapa ima rupe, ali ne zna koje su boje čarape s rupama. Ona uzima nasumce čarape iz kutije s namjerom da izvuče dvije iste boje. Koliko čarapa mora izvući da bi sigurno imala par iste boje?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: D

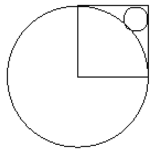
Pitanja za 4 boda:

9. Razlika između $\sqrt{n}$ i 10 manja je od 1. Koliko takvih cijelih brojeva n ima?

A) 19   B) 20   C) 39   D) 40   E) 41

Rješenje: C $|\sqrt{n}$ -10$|<1 \Rightarrow -1<\sqrt{n}$ -10$<1 \Rightarrow$ 81 < n < 121. Takvih brojeva ima 39.

10. Kvadrat na slici ima stranicu duljine 1. Radijus manjeg kruga je:

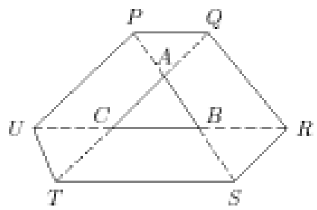


A) $\sqrt{2}-1$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

Rješenje: E Na zadanoj slici istaknimo dijagonalu kvadrata, na taj način dobivamo jednakokračni pravokutni trokut s katetama duljina 1 i hipotenuzom duljine $\sqrt{2}$. U malom krugu istaknimo slični pravokutni trokut s katetama duljina r i hipotenuzom duljine $r + x$. Iz sličnosti tih dvaju trokuta slijedi:

$1 : r = \sqrt{2} : (r + x)$, odn. $r = \dfrac{x}{\sqrt{2}-1}$. Vrijedi i $x + 1 + 2r = \sqrt{2}$. Iz tog sustava slijedi da je $r = (\sqrt{2} - 1)^2$.

11. Svaka stranica trokuta ABC produžena je s obje strane do točaka P,Q, R, S, T i U takvih da |PA| = |AB| = |BS|, |TC| = |CA| = |AQ| i |UC| = |CB| = |BR|. Ako je površina trokuta ABC jednaka 1, kolika je površina šesterokuta PQRSTU ?



A) 9   B) 10   C) 12   D) 13   E) nedovoljno podataka

Rješenje: D Trokut UCT $\cong$ trokutu PQA $\cong$ trokutu BSR $\cong$ trokutu ABC pa imaju jednake površine P_1 .
Trokut UBP sličan je trokutu ABC **s** koeficijentom sličnosti 2, dakle površina trokuta UBP četiri je puta veća od površine trokuta ABC= 4P$_1$. P(UCAP) = 3 P_1 . Analogno je P(QABR) = 3 P_1 i P(CBST) = 3 P_1 . Površina šesterokuta je zbroj površina tri trapeza i 4 sukladna trokuta, dakle iznosi 13.

12. Želimo obojiti kvadratičnu rešetku koristeći Crvenu, Plavu, Zelenu i Smeđu boju, tako da su susjedni kvadrati različitih boja (kvadrati se smatraju susjedni ako imaju istu stranicu ili isti vrh). Kojom bojom ćemo obojiti zatamnjeni kvadrat?

P	C			
Z	S			
		C		
C				

A) samo crveno B) samo zeleno C) samo smeđe D) zeleno ili smeđe E) nemoguće je odrediti

Rješenje: D

P	C	P	C	P
Z	S	Z	S	Z
C	P	C	P	C
Z	S	Z	S	
C	P	C	P	C

P	C	P	C	P
Z	S	Z	S	Z
C	P	C	P	C
S	Z	S	Z	
C	P	C	P	C

13. Na otoku istinoljubaca i lažaca 25 ljudi stoje u redu. Svi osim prve osobe u redu, kažu da je osoba ispred njih lažac. Prva osoba u redu kaže da su sve osobe koje stoje iza nje u redu lašci. Koliko je lažaca u redu? (istinoljupci uvijek govore istinu, a lašci uvijek neistinu)

A) 0   B) 12   C) 13   D) 24   E) nemoguće je utvrditi

Rješenje: C

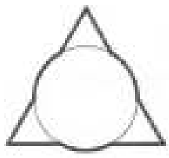
14. Koja je zadnja znamenka broja $1^2-2^2+.....-2008^2+2009^2$?

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

Rješenje: E $1^2-2^2+.....-2008^2+2009^2$ = (1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+….+(2007-2008)(2007+2008)+2009^2 =

= -3-7-11-…..-4015+2009^2 = -2009 1014+2009^2 = 2009 1005, a taj umnožak završava znamenkom 5.

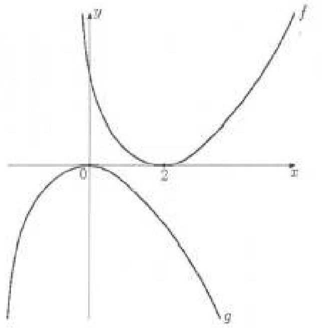
15. Na slici je krug radijusa 1 postavljen na jednakostranični trokut sa stranicom duljine 3 tako da im se središta poklapaju. Koliki je opseg lika na slici?



A) $3+2\pi$ B) $6+\pi$ C) $9+\frac{\pi}{3}$ D) 3π E) $9+\pi$

Rješenje: B Lik na slici omeđuju tri sukladna kružna luka duljine l isječaka sa središnjim kutom od 60° i 6 sukladnih dužina duljine 1. Opseg lika je $3\cdot l+6=3\frac{1\cdot\pi\cdot60^\circ}{180^\circ}+6=\pi+6$.

16. Na slici su grafovi realnih funkcija f i g . U kakvom su odnosu funkcije f i g ?



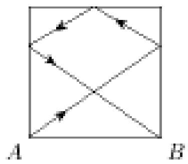
A) *g(x) = f(x+2)* B) *g(x-2) = -f(x)* C) *g(x) = -f(-x+2)*

D) *g(-x) = -f(-x+2)* E) *g(2-x) = -f(x)*

Rješenje: B

Pitanja za 5 bodova:

17. Na biljarskom stolu kvadratnog oblika stranice duljine 2 m, lopta je izbačena iz kuta A.Nakon što je dotakla tri strane stola, kao što to pokazuje slika, lopta se vratila u kut B. Kolika je duljina puta lopte od kuta A do kuta B? (Napomena: na mjestima gdje lopta dotiče stranu stola, kut upadanja jednak je kutu odbijanja)



A) 7 B) $2\sqrt{13}$ C) 8 D) $4\sqrt{3}$ E) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Rješenje: B Dva veća pravokutna trokuta s pravim kutovima u vrhu A, odn. B su sukladna . Njihove katete su duljina 2 m i x m. Na nasuprotnoj dužini dužine $\overline{AB}$ imamo također dva sukladna pravokutna trokuta s katetama duljina 1m i (2 – x) m. Veliki i mali pravokutni trokuti su slični pa vrijedi x : 2 = (2-x):1, odakle je $x=\frac{4}{3}$ m.

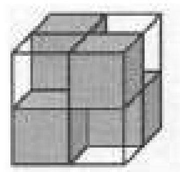
Lopta se kreće po hipotenuzama četiri pravokutna trokuta pa je ukupni put lopte $2\frac{2\sqrt{13}}{3}+2\frac{\sqrt{13}}{3}$ m = $2\sqrt{13}$ m.

18. 2009 klokana, svaki od njih je svjetli ili tamni, uspoređuju svoje visine. Poznato je da je jedan svjetli klokan viši od točno 8 tamnih klokana , jedan svjetli klokan viši od točno 9 tamnih klokana, jedan svjetli klokan viši od točno 10 tamnih klokana itd. i točno jedan svjetli klokan je viši od svih tamnih klokana. Koliko ima svjetlih klokana?

A) 1000 B) 1001 C) 1002 D)1003 E) nemoguća situacija

Rješenje: B Broj tamnih klokana je za 7 veći od broja svjetlih klokana, znači svjetlih klokana ima 1001.

19. Kocka s bridom duljine 2 dm sadrži 4 crne neprozirne kocke s bridom duljine 1 dm i 4 staklene i prozirne kocke s bridom duljine 1 dm. Manje kocke su smještene u veliku tako da se kroz nijednu plohu velike kocke ne može vidjeti nasuprotna strana, tj.velika kocka je″neprozirna″. Koliko najmanje crnih neprozirnih kocaka s bridom duljine 1 dm treba smjestiti u veliku kocku s bridom duljine 3 dm da cijela kocka bude ″neprozirna″?



A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 18

Rješenje: B

a		
		47
	63	

20. U kvadratu na slici poznata su dva broja. Svojstvo kvadrata da je zbroj svih brojeva u svakom retku, stupcu i dijagonali jednak. Koji broj treba nadopuniti umjesto broja **a**?

A) 16 B) 51 C) 54 D) 55 E) 110

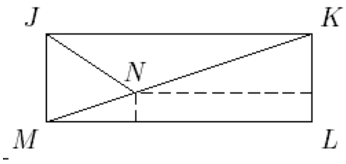
Rješenje: D Neka su nepoznati brojevi na dijagonali redom a, b i c. Zbog jednakosti zbroja brojeva po dijagonali i u 2.stupcu, slijedi $a + b + c = x + b + 63$, znači $x = a + c - 63$, gdje je x nepoznati broj na presjeku 1.retka i 2.stupca. Zbog jednakosti zbroja brojeva po dijagonali i u 3.stupcu, slijedi $a + b + c = y + c + 47$, znači $y = a + b - 47$, gdje je y nepoznati broj na presjeku 1.retka i 3.stupca. Zbog jednakosti zbroja brojeva po dijagonali i u 1.retku, slijedi $a + b + c = a + a + c - 63+ a + b - 47$, znači $a = 55$

21. Za koliko cijelih brojeva $n \geq 3$ postoje konveksni mnogokuti čiji su veličine kutova u omjeru $1 : 2 : \ldots.. : n$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) više od 5

Rješenje: B Dva za $n = 3$ i $n = 4$.

22. U pravokutniku JKLM, simetrala kuta KJM siječe dijagonalu $\overline{KM}$ u točki N. Udaljenost točke N od stranice $\overline{LM}$, odn. $\overline{KL}$ je redom 1 odn. 8. $|LM| = ?$



A) $8+2\sqrt{2}$ B) $11-\sqrt{2}$ C) 10 D) $8+3\sqrt{2}$ E) $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Rješenje: A Neka je x drugi odsječak na dužini $\overline{LM}$. Tada dužina $\overline{LM}$ ima duljinu $x + 8$. Produžimo li dulju crtkanu liniju kroz točku N do stranice $\overline{JM}$, dobit ćemo pravokutni jednakokračni trokut s katetama duljine x. Znači, drugi odsječak na dužini $\overline{KL}$ je x. Prema Talesovom poučku o proporcionalnosti , na kutu MKL vrijedi $x : (x+1) = 8 : (x+8)$, odakle slijedi da je $x = 2\sqrt{2}$, odn. $|LM| = 8+2\sqrt{2}$.

23. Koliko 10 – eroznamenkastih brojeva sastavljenih isključivo od znamenaka 1, 2 i 3 ima takvih da je razlika dvije susjedne znamenke 1?

A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

Rješenje: C

24. Ako je $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, koliko mogućih vrijednosti ima broj k ?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Rješenje: B Moguće vrijednosti broja k su -1 i $\frac{1}{2}$.