MATEMATIČKI KLOKAN J

RJEŠENJA

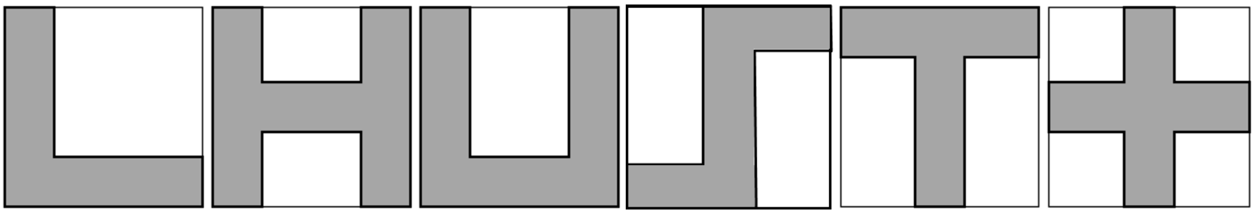
Pitanja za 3 boda:

1. Broj $200013 - 2013$ nije djeljiv sa

   A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

   Rješenje: D

2. Na identičnim listovima papirima u obliku kvadrata Marija je nacrtala ove figure:



   Koliko nacrtanih figura ima opseg jednak opsegu lista papira?

   A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

   Rješenje: C
   Prva, četvrta, peta i šesta figura.

3. Gospođa Margareta kupila je 4 klipa kukuruza za svakog u svojoj četveročlanoj obitelji. U trgovini je dobila popust kako stoji na natpisu:

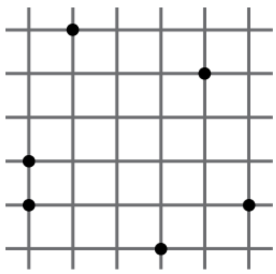
   RASPRODAJA KUKURUZA
   1 klip 20 lipa
   svaki šesti klip je besplatan

   Koliko je platila?

   A) 0.80 kn B) 1.20 kn C) 2.80 kn D) 3.20 kn E) 80 kn

   Rješenje: C
   Kupila je 16 kukuruza, što znači da je 2 dobila besplatno: $14 \cdot 0.20 = 2.80$.

4. Na kvadratnoj mreži kojoj je veličina ćelije 1 istaknuto je šest točaka (slika desno). Kolika je najmanja površina trokuta kojem su vrhovi neke od tih točaka?



   A) 1/4 B) 1/3 C) 1/2 D) 1 E) 2

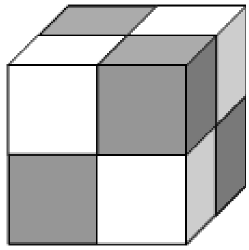
   Rješenje: C
   Radi se o trokutu kojem su vrhovi tri lijeve točke. Jedna stranica tog trokuta je 1, a visina na tu stranicu također je duljine 1. Stoga je njegova površina $\frac{1 \cdot 1}{2}$.

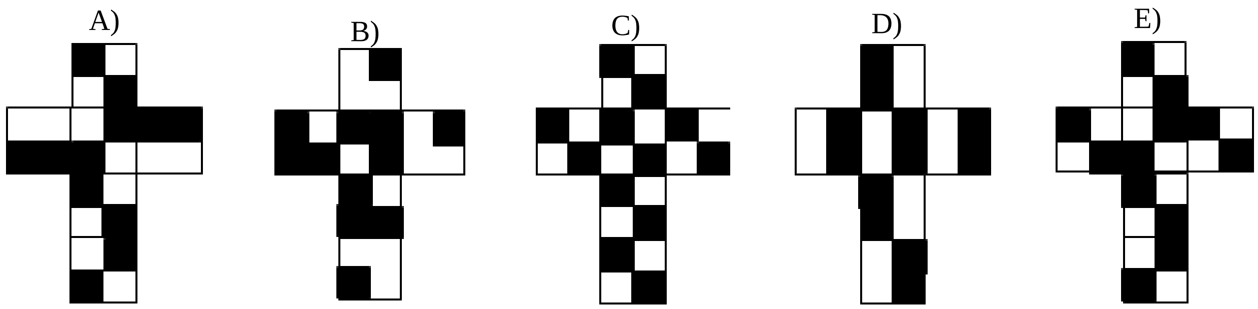
5. Mihael je zbrojivši 4^{15} i 8^{10} dobio broj koji je potencija broja 2. Koji je to broj?

   A) 2^{10} B) 2^{15} C) 2^{20} D) 2^{30} E) 2^{31}

Rješenje: E
$4^{15} + 8^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}$.

6. Na oplošju kocke nacrtani su bijeli i crni kvadrati tako da izgleda kao da se kocka sastoji od četiri bijele i četiri crne manje kocke. Koja mreža odgovara takvoj kocki?





Rješenje: E

7. Neka je n najveći prirodni broj za koji je $4n$ troznamenkast broj. Neka je m najmanji prirodan broj za koji je $4m$ troznamenkast broj. Koliko tada iznosi $4n - 4m$?

A) 900 B) 899 C) 896 D) 225 E) 224

Rješenje: C
$4n$ je najveći troznamenkasti višekratnik broja 4, tj. $4n = 996$, a $4m$ je najmanji troznamenkasti višekratnik broja 4, tj. $4m = 100$, pa je $4n - 4m = 996 - 100 = 896$.

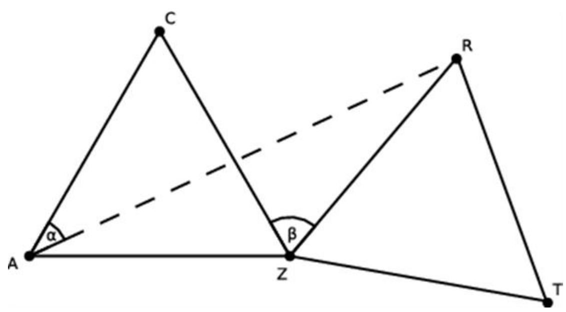
8. Koji od zadanih brojeva je najveći?

A) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}$ B) $\sqrt{20} \cdot 13$ C) $20 \cdot \sqrt{13}$ D) $\sqrt{201} \cdot 3$ E) $\sqrt{2013}$

Rješenje: C

Pitanja za 4 boda:

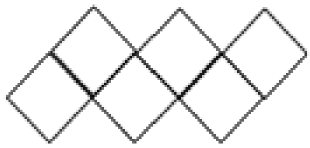
9. Trokut RZT nastao je rotacijom jednakostraničnog trokuta AZC oko točke Z, gdje je kut $\beta = \angle CZR = 70°$. Kolika je mjera kuta $\alpha = \angle CAR$?



A) 20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 40°

Rješenje: D
$\angle AZC = 60°$ jer je trokut AZC jednakostraničan. Stranice $\overline{AZ}$ i $\overline{ZR}$ jednake su duljine, pa je trokut AZR jednakokračan, a kutovi $\angle RAZ$ i $\angle ZRA$ jednake mjere i to $\frac{180° - (60° + 70°)}{2} = 25°$. Kut α je tada $60° - 25° = 35°$.

10. Slika desno prikazuje cik-cak uzorak sastavljen od šest kvadrata dimenzija 1 cm × 1 cm. Opseg mu je 14 cm. Koliki je opseg cik-cak uzorka koji je sastavljen od 2013 takvih kvadrata?

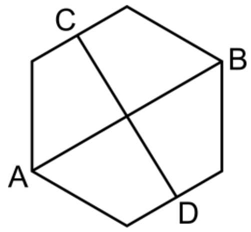


A) 2022 cm B) 4028 cm C) 4032 cm D) 6038 cm E) 8050 cm

Rješenje: B

Dodavanjem svakog novog kvadrata opseg lika povećava se za 2 cm. Za 2013 kvadrata stoga imamo opseg $4 + 2012 \cdot 2 = 4028$.

11. Dužina $\overline{AB}$ spaja dva nasuprotna vrha pravilnog šesterokuta, a dužina $\overline{CD}$ spaja polovišta njegovih dviju nasuprotnih stranica. Koliki je umnožak duljina tih dviju dužina ako je površina šesterokuta 60?



A) 40 B) 50 C) 60 D) 80 E) 100

Rješenje: D

Pravilni šesterokut sastoji se od šest jednakostraničnih trokuta. Ako je duljina stranice šesterokuta a, površina šesterokuta je $6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 3av_a = 60$ iz čega slijedi da je $av_a = 20$. Dužina $\overline{AB}$ ima duljinu $2a$, a dužina $\overline{CD}$ ima duljinu $2v_a$, pa imamo $(2a) \cdot (2v_a) = 4av_a = 80$.

12. Jedan razred pisao je test. Da je svaki dječak imao 3 boda više na testu, prosječni rezultat razreda povećao bi se za 1.2 boda. Koliki postotak učenika u razredu su djevojčice?

A) 20% B) 30% C) 40% D) 60% E) nije moguće odrediti

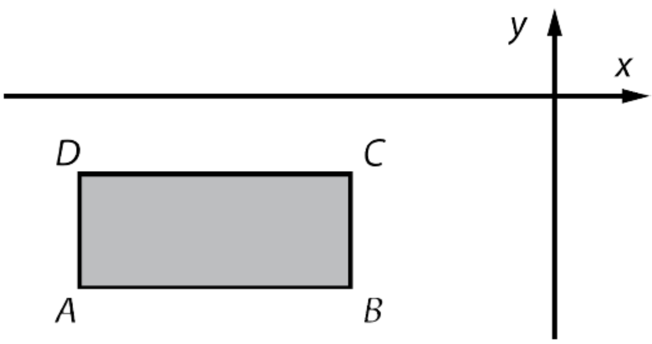
Rješenje: D

Povećanje prosječnog broja bodova je aritmetička sredina povećanja bodova: $\frac{3 \cdot D + 0 \cdot C}{D + C} = 1.2$, gdje je D broj dječaka, a C broj djevojčica u razredu. Iz ove jednadžbe slijedi $C = 1.5D$, pa je postotak djevojčica u razredu $\frac{C}{D+C} = \frac{1.5D}{2.5D} = 0.6 = 60\%$.

13. Stranice pravokutnika paralelne su s koordinatnim osima. Za svaki vrh pravokutnika računamo kvocijent:

$$y\text{-koordinata} : x\text{-koordinata}$$

Koji vrh će dati najmanji rezultat?



A) A B) B C) C D) D E) ovisi o dimenzijama i položaju pravokutnika

Rješenje: D

Da bi dobili najmanji mogući kvocijent brojnik treba biti najmanji mogući, a nazivnik najveći mogući (po apsolutnoj vrijednosti).

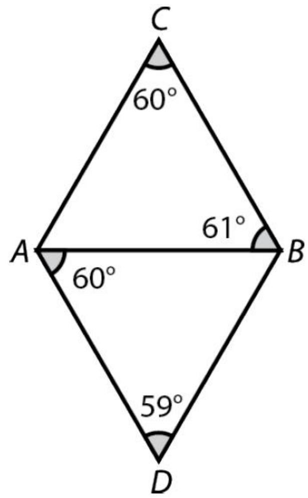
14. Danas Ivan i njegov sin slave rođendane. Ivan je pomnožio svoju dob i dob svog sina te dobio rezultat 2013. Koje godine je Ivan rođen?

A) 1981. B) 1982. C) 1953. D) 1952. E) potrebno je još podataka

Rješenje: D

$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, pa je jedino razumno rješenje da sin ima 33, a otac 61 godinu. 2013.-61=1952.

15. Bojan je htio nacrtati dva jednakostranična trokuta koja spojena daju romb (slika desno). No, nije točno pogodio sve udaljenosti. Kada je završio, Mia je izmjerila četiri kuta i uočila da nisu jednaki. Koja je od pet danih dužina Bojanovog lika najdulja?



A) $\overline{AD}$ B) $\overline{AC}$ C) $\overline{AB}$ D) $\overline{BC}$ E) $\overline{BD}$

Rješenje: A

U trokutu ABC najdulja je stranica $\overline{AC}$, a u trokutu ADB najdulja je stranica $\overline{AD}$ (nasuprot su najvećeg kuta). Kako je nasuprot stranice $\overline{AB}$ u jednom trokutu kut od 60°, a u drugom trokutu kut od 59° zaključujemo da je stranica $\overline{AD}$ dulja od stranice $\overline{AC}$.

16. Dan je šesteroznamenkast broj kojem je zbroj znamenaka paran broj, a umnožak znamenaka neparan broj. Koja tvrdnja je točna za takav broj?

   A) Ili dvije ili četiri znamenke su parne.
   B) Takav broj ne postoji.
   C) Taj broj ima neparan broj neparnih znamenki.
   D) Broj se može sastojati od šest različitih znamenki.
   E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E

U tom broju sve znamenke moraju biti neparne.

Pitanja za 5 bodova:

17. Koliko se znamenki nalazi iza decimalne točke u broju $\frac{1}{1024000}$?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 1024000

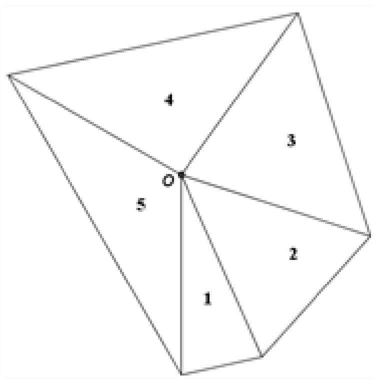
Rješenje: C

$\frac{1}{1024000} = \frac{1}{1.024} \cdot 10^{-6} = \frac{1000}{1024} \cdot 10^{-6} = 0.9765625 \cdot 10^{-6}$. Iza decimalne točke nalazi se $7 + 6 = 13$ znamenki.

Drugi način:

$\frac{1}{1024000} = \frac{1}{1024} : 1000 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} : 1000 = \frac{5^{10}}{10^{10}} : 1000$. Broj 5^{10} ne završava s 0, pa se kada ga podijelimo s 10^{10} pojavi 10 decimalnih mjesta. Dijeljenje s 1000 povećat će broj decimalnih mjesta za 3, pa ukupno imamo 13 decimalnih mjesta.

18. Na slici desno vidimo pet jednakokračnih trokuta s kutovima nasuprot osnovice 24°, 48°, 72°, 96° i 120° - oni su uzastopni višekratnici najmanjeg kuta među njima. Želimo napraviti sličnu sliku s najvećim mogućim brojem takvih trokuta. Koliki u tom slučaju treba biti najmanji kut u nizu, ako su svim kutovima stupanjske mjere prirodni brojevi?



A) 1° B) 2° C) 3° D) 6° E) 8°

Rješenje: C

Suma n uzastopnih višekratnika broja k je $\frac{n(n+1)}{2} \cdot k$. Želimo li sličnu sliku zbroj svih kutova pri vrhu O mora biti jednak 360°. Rješavamo redom jednadžbe $\frac{n(n+1)}{2} \cdot k = 360$ za $k = 1,2,3, \dots$ dok ne dobijemo jednadžbu koja kao jedno rješenje ima prirodan broj. To će se dogoditi za $k = 3$, tada je broj trokuta koje možemo nacrtati jednak 15.

19. Koliko postoji trokuta čiji su vrhovi ujedno vrhovi pravilnog trinaesterokuta, a središte opisane kružnice tog poligona je unutar trokuta?

A) 72 B) 85 C) 91 D) 100 E) nešto drugo

Rješenje: C
Svih trokuta kojima su vrhovi ujedno i vrhovi pravilnog trinaesterokuta ima $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286$. Trokuta koje ne sadrže središte opisane kružnice poligona ima $\frac{13 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 195$, pa onih koji sadrže središte kružnice ima $286 - 195 = 91$.

20. Procedura „promijeni“ listu od tri broja zamjenjuje novom listom tako da svaki broj zamijeni zbrojem ostala dva broja. Na primjer, za $\{3,4,6\}$ „promijeni“ daje $\{10,9,7\}$, a novi „promijeni“ vodi do $\{16,17,19\}$. Počnemo li s listom $\{1,2,3\}$ koliko će uzastopnih primjena procedure „promijeni“ biti potrebno da se u listi pojavi broj 2013?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 2013 će se pojaviti nekoliko puta E) 2013 se neće nikada pojaviti

Rješenje: E
Ispišemo li prvih nekoliko listi imamo: $\{1,2,3\} \rightarrow \{5,4,3\} \rightarrow \{7,8,9\} \rightarrow \{17,16,15\} \rightarrow \{31,32,33\}$. Možemo primjetiti da uvijek dobivamo tri uzastopna broja, i to jedan paran, a dva neparna.
Broj 2013 možemo zapisati kao $1006 + 1007$. Brojeve 1006 i 1007 možemo dobiti iz liste $\{502,503,504\}$ u kojoj su tri uzastopna broja, ali je jedan broj neparan, a dva parna što je nemoguće dobiti iz početne liste.

21. Na 22 karte napisani su prirodni brojevi od 1 do 22. Od tih karata napravljeno je 11 razlomaka. Koliko najviše tih razlomaka može imati cjelobrojnu vrijednost?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Rješenje: D
To su: $\frac{22}{11}, \frac{21}{3}, \frac{20}{4}, \frac{19}{1}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{15}{5}, \frac{14}{7}, \frac{12}{6}, \frac{10}{2}$.

22. Automobil je krenuo iz točke A i vozi jednoliko pravocrtno brzinom 50 km/h. Zatim svakih sat vremena kreće novi automobil iz točke A i svaki automobil je 1 km/h brži od prethodnog. Zadnji automobil krenuo je 50 sati nakon prvog automobila (brzinom 100 km/h). Kojom brzinom se giba automobil koji je na početku kolone 100 sati nakon polaska prvog automobila?

A) 50 km/h B) 66 km/h C) 75 km/h D) 84 km/h E) 100 km/h

Rješenje: C
Znamo da je prijeđeni put $s = v \cdot t$. Auto koje je n-to krenulo iz točke A vozi se brzinom $50 + n$ km/h i putuje $100 - n$ sati. On je prešao put od $s(n) = (50 + n)(100 - n)$ km. Mi tražimo automobil koji je prešao najviše kilometara, dakle potrebno je odrediti maksimum, tj. tjeme funkcije s.
$n_{max} = 25$, a brzina 25-og auta je $50 + 25 = 75$ km/h.

23. S jedne strane ceste u nizu rastu hrastovi i breze. Sve skupa ima 100 stabala. Broj stabala između bilo koja dva hrasta nije jednak 5. Koliko najviše hrastova može biti među ovih 100 stabala?

A) 48 B) 50 C) 52 D) 60 E) nemoguća situacija

Rješenje: C
Ako između bilo koja dva hrasta ne smije biti 5 stabala, onda nakon 6 hrastova mora biti 6 breza, da bi se hrastovi opet mogli pojaviti. Između 100 stabala imamo 16 šestorki i ostanu još četiri stabla. Počnemo li niz sa hrastovima bit će ih $6 \cdot 8 + 4 = 52$.

24. Borko je šetao ulicom kada je ugledao traktor koji vuče dugačku cijev. Odlučivši izmjeriti njenu duljinu, Borko je hodao uz cijev suprotno od smjera gibanja traktora i izbrojao 20 koraka. Zatim je hodao uz cijev u smjeru gibanja traktora i izbrojao 140 koraka. Znajući da su se i on i traktor gibali jednolikom brzinom te da je duljina njegovog koraka 1 m, Borko je uspješno odredio duljinu cijevi. Koliko je cijev dugačka?

A) 30 m B) 35 m C) 40 m D) 48 m E) 80 m

Rješenje: B
U drugom mjerenju Borko je napravio 7 puta više koraka, što znači da je utrošio 7 puta više vremena nego u prvom mjerenju ($t_2 = 7t_1$). Da bi dobili duljinu cijevi broju koraka u prvom mjerenju moramo dodati put kojeg je traktor prešao za to vrijeme, a u drugom mjerenju broju koraka moramo oduzeti put kojeg je traktor prešao za to vrijeme.

$$20 + vt_1 = 140 - vt_2$$
$$20 + vt_1 = 140 - 7vt_1$$
$$vt_1 = 15$$

Traktor je u prvom mjerenju prešao 15 m, pa je duljina cijevi $20 + 15 = 35$ m.