MATEMATIČKI KLOKAN 2015. S

RJEŠENJA

Pitanja za 3 boda:

1. Andrea je rođena 1997. Njena mlađa sestra Štefica rođena je 2001. Razlika među njima je

A) manja od 4 godine B) barem 4 godine C) točno 4 godine D) više od 4 godine E) nije manja od 3 godine

Rješenje: E

2. $(a-b)^5 + (b-a)^5 =$

A) 0 B) $2(a-b)^5$ C) $2a^5 - 2b^5$ D) $2a^5 + 2b^5$

E) $2a^5 + 10a^4b + 20a^3b^2 + 20a^2b^3 + 10ab^4 + 2b^5$

Rješenje: A

$(a-b)^5 + (b-a)^5 = (a-b)^5 - (a-b)^5 = 0$

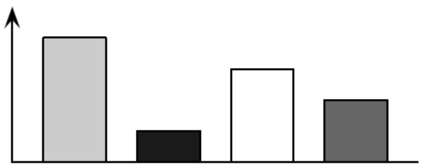
3. Koliko rješenja ima jednadžba $2^{2x} = 4^{x+1}$?

A) 0 B) beskonačno mnogo C) 2 D) 1 E) 3

Rješenje: A

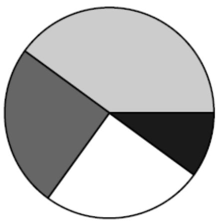
$2^{2x} = 4^{x+1} \Rightarrow 4^x = 4^{x+1} \Rightarrow x = x+1 \Rightarrow 0 = 1$ što očito nije istina pa ova jednadžba nema rješenja.

4. Diana je izradila stupčasti dijagram koji prikazuje podatke o broju 4 vrste drveća prikupljene na terenskoj nastavi iz biologije. Josip smatra da bi kružni dijagram bolje predočio odnose među tim vrstama drveća. Kako izgleda odgovarajući kružni dijagram?

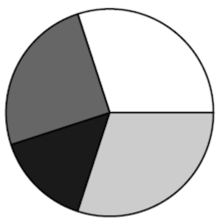


A)

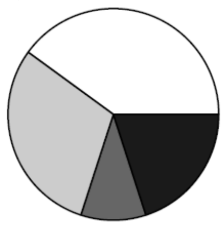
B)



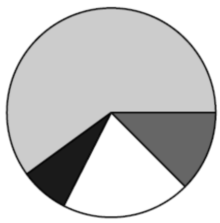
C)



D)



E)



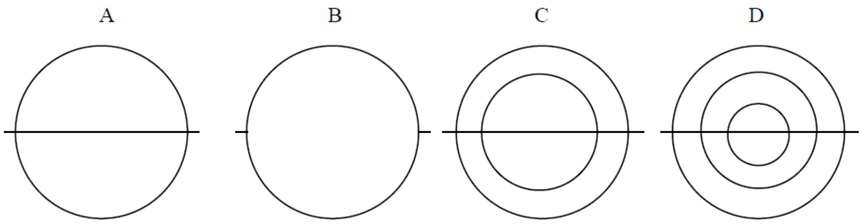
Rješenje: A

5. Zbrojimo 31 cijeli broj od 2001 do 2031 i podijelimo zbroj sa 31. Koji rezultat ćemo dobiti?

A) 2012 B) 2013 C) 2015 D) 2016 E) 2496

Rješenje: D
$2001 + 2002 + 2003 + \cdots 2031 = (2000 + 1) + (2000 + 2) + (2000 + 3) + \cdots (2000 + 31) =$
$= 31 \cdot 2000 + (1 + 2 + 3 + \cdots + 31) = 31 \cdot 2000 + \frac{31 \cdot 32}{2}$
Podijelimo li ovaj broj sa 31 dobit ćemo $2000 + 16 = 2016$.

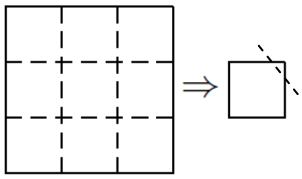
6. Koliko se likova sa slike može nacrtati u jednom neprekinutom potezu i to tako da svaku liniju nacrtamo samo jednom?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje: D
A, C, D

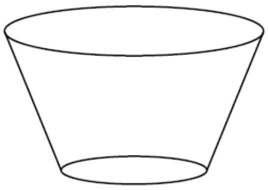
7. Komad papira oblika kvadrata preklopljen je po iscrtkanim linijama bilo kojim redoslijedom. Kvadratu koji se dobije kao rezultat presavijanja odrezan je jedan kut. Kada razmotamo papir koliko će u njemu biti rupa?



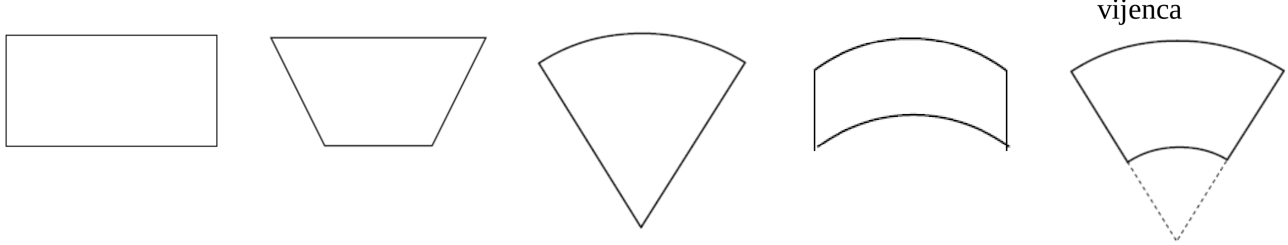
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 9

Rješenje: B

8. Čaša ima oblik krnjeg stošca kao na slici. Čašu treba obložiti papirom u boji (dno ne oblažemo). Kakav oblik treba imati papir da bi potpuno i bez preklapanja prekrili čašu?



A) pravokutnik B) trapez C) kružni isječak D) "traka" E) isječak kružnog vijenca



Rješenje: E

Pitanja za 4 boda:

9. $\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)} =$

A) $\sqrt{2015}$ B) 2015 C) 2016 D) 2017 E) 4030

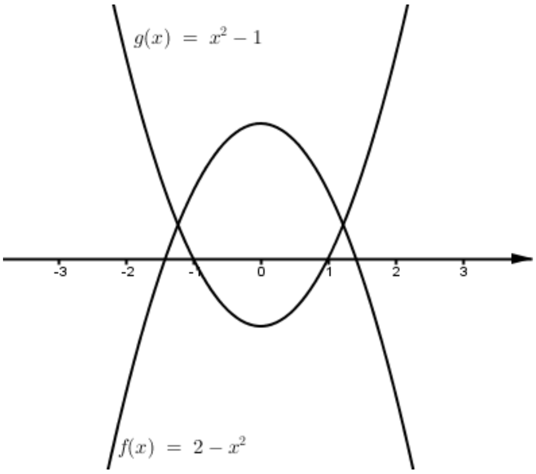
Rješenje: C

$\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)} = \sqrt{2\cdot 2015+0+2015^2+1} =$
$\sqrt{2015^2+2\cdot 2015+1^2} = \sqrt{(2015+1)^2} = 2016$

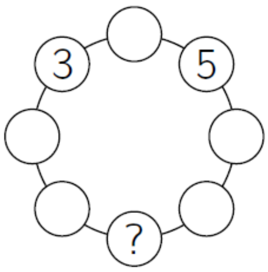
10. Na koliko područja x-os i grafovi funkcija $f(x)=2-x^2$ i $g(x)=x^2-1$ dijele Kartezijev koordinatni sustav?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Rješenje: D



11. Ela želi u svaki krug na slici upisati broj tako da svaki broj bude suma dva susjedna broja. Koji broj Ela treba upisati u krug označen upitnikom?



A) -5 B) -16 C) -8 D) -3 E) To nije moguće.

Rješenje: E

12. Neka su a, b, c, d, e prirodni brojevi za koje vrijedi $c : e = b, a+b=d$ i $e-d=a$. Koji je od brojeva a, b, c, d, e najveći?

A) a B) b C) c D) d E) e

Rješenje: C

Kako su svi dani brojevi prirodni iz jednakosti $c : e = b$ znamo da je $c > b$ i $c > e$, iz $a+b=d$ znamo da je $d > a$ i $d > b$, a iz $e-d=a$ znamo da vrijedi $e > a$ i $e > d$. Sada je jasno da je $c > e > d > a, b$, tj. c je najveći od danih brojeva.

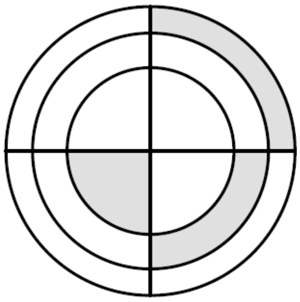
13. Geometrijska sredina n prirodnih brojeva definirana je kao n-ti korijen umnoška tih brojeva. Geometrijska sredina tri broja je 3, geometrijska sredina druga tri broja je 12. Kolika je geometrijska sredina svih tih šest brojeva?

A) 4 B) 6 C) $\frac{15}{2}$ D) $\frac{15}{6}$ E) 36

Rješenje: B

$\sqrt[3]{abc} = 3, \sqrt[3]{def} = 12 \Rightarrow \sqrt[6]{abcdef} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 12^3} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3} = \sqrt[6]{3^6 \cdot 2^6} = 3 \cdot 2 = 6$

14. Na slici su tri koncentrične kružnice i njihova dva okomita promjera. Ako tri osjenčana lika imaju jednaku površinu, a polumjer najmanje kružnice je 1, koliki je umnožak polumjera ove tri kružnice?



A) $\sqrt{6}$ B) 3 C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 6

Rješenje: A

Površina najmanjeg kruga polumjera $r_1 = 1$ je $P_1 = \pi$. Površina P_2 kružnog vijenca u sredini, kao i P_3 vanjskog kružnog vijenca onda je također jednaka π (osjenčani likovi su jednake površine pa su i ove tri površine jednake jer su osjenčane njihove četvrtine).

$P_2 = r_2^2\pi - r_1^2\pi \Rightarrow \pi = r_2^2\pi - \pi \Rightarrow r_2 = \sqrt{2}$

$P_3 = r_3^2\pi - r_2^2\pi \Rightarrow \pi = r_3^2\pi - 2\pi \Rightarrow r_2 = \sqrt{3}$

Sada vidimo da je $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

15. Trgovac automobilima kupio je dva automobila. Prvi je prodao za 40% više nego je za njega platio, a drugi za 60% više nego je platio. Primio je 54% novaca više nego je utrošio na oba automobila. Koliki je omjer cijena koje je trgovac platio za prvi i drugi automobil?

A) $10 : 13$ B) $20 : 27$ C) $3 : 7$ D) $7 : 12$ E) $2 : 3$

Rješenje: C

Ako je trgovac prvi automobil kupio za x kuna, onda ga je prodao za $1.4x$ kuna. Ako je drugi automobil kupio za y kuna, onda ga je prodao za $1.6y$ kuna. Na oba automobila je utrošio $x + y$ kuna, a primio $1.54(x + y)$ kuna. Sada iz jednakosti $1.4x + 1.6y = 1.54(x + y)$ imamo $\frac{x}{y} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{3}{7}$.

16. U tuljcu je 2015 klikera numeriranih od 1 do 2015. Klikeri s jednakim sumama znamenki iste su boje. Klikeri s različitim sumama znamenki različite su boje. Koliko je u tuljcu različitih boja klikera?

A) 10 B) 27 C) 28 D) 29 E) 2015

Rješenje: C

Najveću sumu znamenki ima broj 1999 i to je 28. Dakle, suma može biti bilo koji prirodan broj od 1 do 28.

Pitanja za 5 bodova:

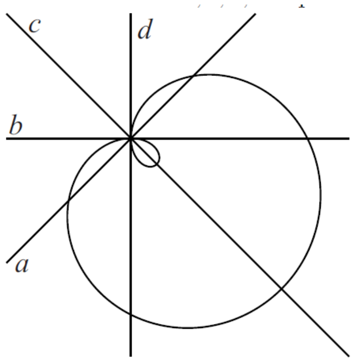
17. Na slici je tablica množenja do 10. Koliki je zbroj svih 100 umnožaka iz tablice?

$\times$	1	2	3	$\cdots$	10
1	1	2	3	$\cdots$	10
2	2	4	6	$\cdots$	20
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
10	10	20	30	$\cdots$	100

A) 1000 B) 2025 C) 2500 D) 3025 E) 5500

Rješenje: D
Označimo sumu prvog stupca sa S. Suma drugog stupca tada je $2S$, trećeg $3S$, ..., desetog $10S$. Zbroj svih brojeva u tablici je $S + 2S + 3S + \cdots + 10S = S(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) = S \cdot S = S^2$. Znamo da je $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ pa je rješenje $55^2 = 3025$.

18. Krivulju na slici opisuje jednadžba $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$. Koji od pravaca a, b, c, d predstavlja y-os?



A) a B) b C) c D) d E) Nijedan.

Rješenje: A
Uvrstimo li u jednadžbu $x = 0$ dobit ćemo presjeke krivulje sa y-osi. To su točke $(0, -\sqrt{2})$, $(0,0)$ i $(0, \sqrt{2})$. Tim presjecima odgovara pravac a sa slike.

19. Čitajući s lijeva na desno koja je od navedenih izjava prva točna?

A) C je točno. B) A je točno. C) E je netočno. D) B je netočno. E) $1 + 1 = 2$

Rješenje: D

20. Koliko ima pravilnih poligona koji imaju cjelobrojne mjere kutova (u stupnjevima)?

A) 17 B) 18 C) 22 D) 25 E) 60

Rješenje: C
Unutarnji kut pravilnog mnogokuta ima mjeru $180° - \frac{360°}{n}$. Da bi kut bio cijeli broj n treba biti djelitelj broja 360 strogo veći od 2. Njih ima 22.

21. Koliko se troznamenkastih brojeva može zapisati kao suma točno devet različitih potencija broja 2?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: E
511, 767, 895, 959, 991

22. Na ploči su nacrtani plavi i crveni pravokutnici. Točno sedam pravokutnika su kvadrati. Crvenih pravokutnika ima za tri više od plavih kvadrata. Crvenih kvadrata ima za dva više od plavih pravokutnika. Koliko je plavih pravokutnika nacrtano na ploči?

A) 1   B) 3   C) 5   D) 6   E) 10

Rješenje: B
Označimo: x - crveni pravokutnici koji nisu kvadrati, y - plavi pravokutnici koji nisu kvadrati, z - crveni kvadrati, w - plavi kvadrati. Vrijedi: $z + w = 7,\ x + z = w + 3, y + w + 2 = z$. Izrazimo li sve nepoznanice pomoću w imamo: $x = 2w - 4, y = 5 - 2w, z = 7 - w$. Sada vidimo da samo $w = 2$ daje sve nenegativne rezultate ($x = 0, y = 1, z = 5$). Stoga plavih pravokutnika ima $y + w = 3$.

23. U velikom krugu stoji 96 članova kluba brojača. Počinju govoriti brojeve 1, 2, 3, itd. naizmjenice u krug. Svaki član koji izgovori paran broj istupi iz kruga a ostatak nastavlja brojati, počevši drugu rundu s 97. Brojanje na ovaj način nastavljaju dok god ne ostane samo jedan član. Koji je broj taj član izgovorio u prvoj rundi?

A) 1   B) 17   C) 33   D) 65   E) 95

Rješenje: D
Ako gledamo samo brojeve koje su brojači izgovorili u prvoj rundi možemo zaključiti sljedeće: nakon prve runde ostaju samo neparni brojevi, nakon druge rundi ostaju brojevi koji pri dijeljenju s $4 = 2^2$ daju ostatak 1, u trećoj oni koji pri dijeljenju s $8 = 2^3$ daju ostatak 1 itd. Prikazano tablicom:

Runda	Izgovoreni brojevi	Ostalo igrača	Ostaju brojevi oblika
1	1 - 96	48	$2n + 1$
2	97 - 144	24	$4n + 1$
3	145 - 168	12	$8n + 1$
4	169 - 180	6	$16n + 1$
5	181 - 186	3	$32n + 1$
6	187 - 189	2	$64n + 1$
7	190 - 191	1	

U 7. rundi ostali su stoga brojevi 1 i 65, a nakon nje ostaje samo 65.

24. U riječi KANGAROO Branko i Bojan zamjenjuju slova znamenkama tako da dobiveni brojevi budu višekratnici broja 11. Obojica zamjenjuju različita slova različitin znamenkama i ista slova istim znamenkama ($K \neq 0$). Branko je pronašao najveći takav broj, a Bojan najmanji. U oba slučaja jedno slovo zamijenjeno je istom znamenkom. Koja je to znamenka?

A) 0   B) 3   C) 4   D) 5   E) 6

Rješenje: D
Broj je djeljiv brojem 11 ako je alternirajuća suma njegovih znamenki djeljiva s 11 (npr. za broj 2728 je $2 - 7 + 2 - 8 = -11$ pa je broj djeljiv s 11).
Za broj KANGAROO stoga treba vrijediti $K - A + N - G + A - R + O - O = K + N - G - R = 11n$.
Za najveći takav broj biramo $K = 9,\ A = 8,\ N = 7$. Onda mora biti $G = 5$ i $R = 0$. Na kraju izaberemo $O = 6$ i dobijemo broj 98758066.
Za najmanji takav broj biramo $K = 1,\ A = 0,\ N = 2$. Onda mora biti $G = 5$ i $R = 9$. Na kraju izaberemo $O = 3$ i dobijemo broj 10250933.
Vidimo da je u oba slučaja slovo G zamijenjeno znamenkom 5.