MATEMATIČKI KLOKAN S
6 100 000 sudionika u 60 zemalja Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 23. ožujka 2017. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Student (IV. razred SŠ)

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

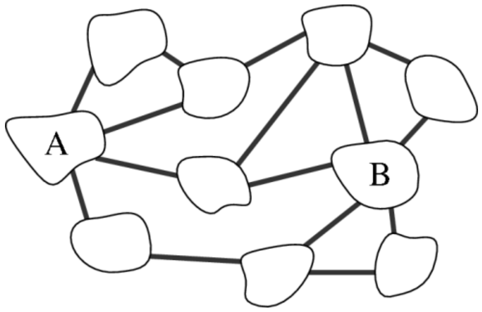
Pitanja za 3 boda:

1. Berislav se voli igrati svojim HO modelom željeznice. Neke stvari je izradio u HO omjeru $1 : 87$. Izradio je čak i 2 cm visok model svoga brata. Koliko je visok Berislavov brat?

A) 1.74 m B) 1.62 m C) 1.86 m D) 1.94 m E) 1.70 m

Rješenje: A
$1 : 87 = 2 : h \Rightarrow h = 174$ cm= 1.74 m.

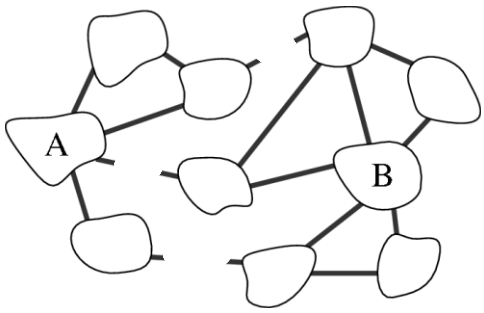
2. Na slici vidimo 10 otoka povezanih s 15 mostova. Koji je najmanji mogući broj mostova koje možemo eliminirati kako bi bilo nemoguće stići od otoka A do otoka B?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C

Primjerice:

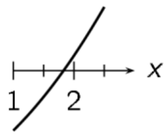


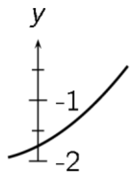
3. Za dva pozitivna broja a i b vrijedi da je 75% od a jednako 40% od b. To znači da je

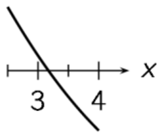
A) $15a = 8b$ B) $7a = 8b$ C) $3a = 2b$ D) $5a = 12b$ E) $8a = 15b$

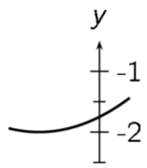
Rješenje: A
Iz $\frac{75}{100}a = \frac{40}{100}b$ slijedi $15a = 8b$.

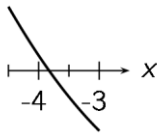
4. Četiri od danih pet isječaka dijelovi su grafa iste kvadratne funkcije. Koji isječak nije dio tog grafa?

A) 

B) 

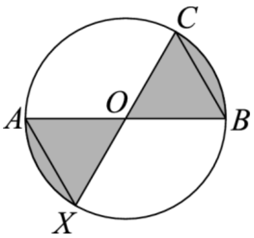
C) 

D) 

E) 

Rješenje: C

5. Dan je krug sa središtem u točki O i dijametrima $\overline{AB}$ i $\overline{CX}$ te vrijedi $|OB| = |BC|$. Koliki dio površine kruga je osjenčen?

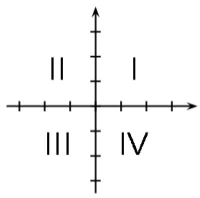


A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{4}{11}$

Rješenje: B

Trokuti OAX i OBC jednakostranični su. Stoga kutovi $\angle XOA$ i $\angle COB$ imaju mjeru 60°. Kružni isječci koji pripadaju tim kutovima imaju površinu $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ površine kruga. Dva takva isječka onda imaju površinu $\frac{1}{3}$ površine kruga.

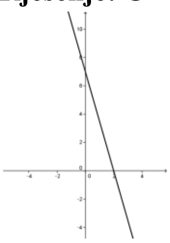
6. U kojem kvadrantu ne leži ni jedna točka grafa linearne funkcije $f(x) = -3.5x + 7$?



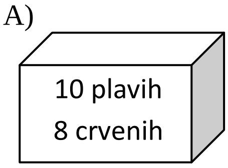
A) I B) II C) III D) IV

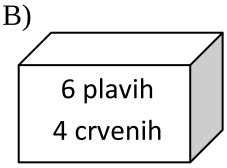
E) U svakom se kvadrantu nalazi barem jedna točka grafa.

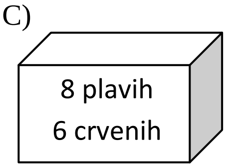
Rješenje: C

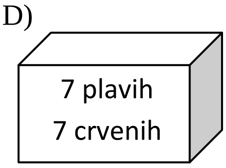


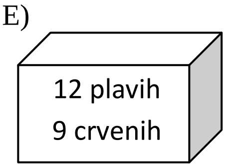
7. Svaka od danih pet kutija sadrži crvene i plave kuglice kao što je na njima označeno. Borna želi uzeti jednu kuglicu iz jedne od kutija ne gledajući. Iz koje kutije Borna treba izvući kuglicu kako bi vjerojatnost da izvuče plavu kuglicu bila najveća?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Rješenje: B

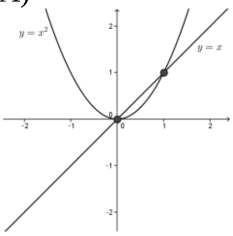
Za pojedinu ćemo kutiju traženu vjerojatnost dobiti ako podijelimo broj plavih kuglica s ukupnim brojem kuglica u toj kutiji. Dobivamo: A) $\frac{10}{18}$, B) $\frac{6}{10}$, C) $\frac{8}{14}$, D) $\frac{7}{14}$, E) $\frac{12}{21}$. Najveći od ovih brojeva je $\frac{6}{10}$.

8. Graf koje od danih funkcija ima najviše zajedničkih točaka s grafom funkcije $f(x) = x$?

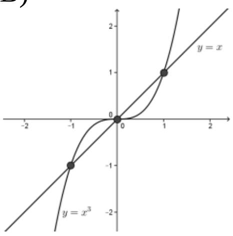
A) $g_1(x) = x^2$ B) $g_2(x) = x^3$ C) $g_3(x) = x^4$ D) $g_4(x) = -x^4$ E) $g_5(x) = -x$

Rješenje: B

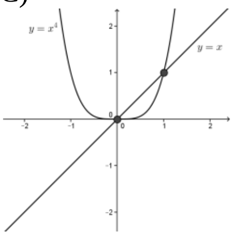
A)



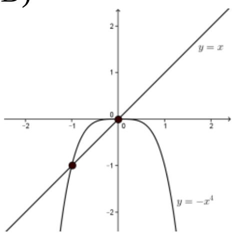
B)



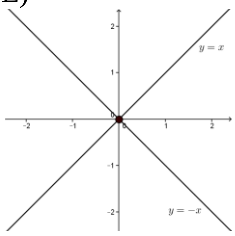
C)



D)

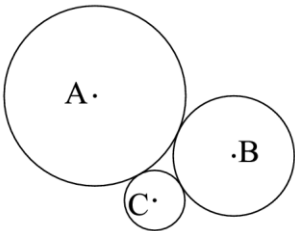


E)



Pitanja za 4 boda:

9. Tri kružnice koje se međusobno dodiruju imaju središta u točkama A, B i C te redom radijuse 3, 2 i 1. Kolika je površina trokuta ABC?



A) 6 B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 9 E) $2\sqrt{6}$

Rješenje: A

Duljine stranica trokuta ABC zbrojevi su radijusa odgovarajućih kružnica: 5, 4 i 3. Iz Heronove formule onda dobijemo $P = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 6$.

Ili, prema obratu Pitagorina poučka zamjećujemo da je trokut pravokutan (egipatski), te je njegova površina $P = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

10. Pozitivan broj p manji je od 1, a broj q veći je od 1. Koji je od danih brojeva najveći?

A) $p \cdot q$ B) $p + q$ C) $\frac{p}{q}$ D) p E) q

Rješenje: B

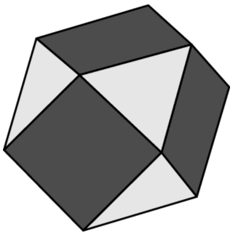
Za brojeve sa zadanim svojstvima vrijedi: $\frac{p}{q} < p, p < q, p \cdot q < q, q < p + q$ pa je najveći od danih brojeva $p + q$.

11. Dva uspravna valjka A i B imaju isti volumen. Radijus baze valjka B je 10% veći od radijusa baze valjka A. Koliko je veća visina valjka A od visine valjka B?

A) 5% B) 10% C) 11% D) 20% E) 21%

Rješenje: E
Označimo s r_A radijus baze valjka A i s r_B radijus baze valjka B te s h_A visinu valjka A i s h_B visinu valjka B. Vrijedi $r_B = 1.1r_A$ pa iz $r_A^2\pi h_A = r_B^2\pi h_B$ imamo $r_A^2 h_A = 1.21r_A^2 h_B$ tj. $h_A = 1.21h_B$. Znači da je visina valjka A 21% veća od visine valjka B.

12. Strane poliedra na slici trokuti su ili kvadrati. Svaki kvadrat okružuju 4 trokuta i svaki trokut okružuju 3 kvadrata. Ako kvadrata ima 6, koliko ima trokuta?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

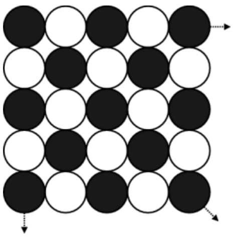
Rješenje: D
Svaki od 6 kvadrata okružen je s četiri trokuta, no svaki trokut zajednički je za tri kvadrata. Imamo $\frac{6\cdot 4}{3} = 8$ trokuta.

13. Imamo četiri simetrične igraće kocke u obliku tetraedra. Na stranama svake od njih su brojevi 2, 0, 1 i 7. Bacimo li sve četiri igraće kocke, kolika je vjerojatnost da možemo sastaviti broj 2017 koristeći točno jedan od tri vidljiva broja sa svake igraće kocke?

A) $\frac{1}{256}$ B) $\frac{63}{64}$ C) $\frac{81}{256}$ D) $\frac{3}{32}$ E) $\frac{29}{32}$

Rješenje: B
Razmislimo kada nećemo moći sastaviti broj 2017. Samo kada među vidljivim brojevima nema jedne od znamenki broja 2017, a za to su 4 mogućnosti - na stranama koje nisu vidljive treba biti: 0,0,0,0 ili 1,1,1,1 ili 2,2,2,2 ili 7,7,7,7. Ukupno ima $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ mogućnosti, a povoljnih $256 - 4 = 252$. Tražena vjerojatnost je $\frac{252}{256} = \frac{63}{64}$.

14. Julija ima 2017 žetona: 1009 ih je crno, a ostali su bijeli. Složila ih je u uzorak u obliku kvadrata kao na slici tako što je počela s crnim žetonom u gornjem lijevom uglu i alternirala boje u svakom retku i svakom stupcu. Koliko joj je žetona pojedine boje ostalo nakon što je dovršila najveći mogući kvadrat?



A) Nijedan. B) 40 svake boje. C) 40 crnih i 41 bijeli. D) 41 svake boje. E) 40 bijelih i 41 crni.

Rješenje: E
Bijelih žetona ima 1008. Najveći mogući kvadrat koji se može sastaviti od 2017 žetona je dimenzija 44×44. U njega je utrošeno $44^2 = 1936$ žetona, 968 svake boje.
Ostalo je $1009 - 968 = 41$ crnih i $1008 - 968 = 40$ bijelih žetona.

15. Dva su uzastopna broja takva da je suma znamenaka svakog od njih višekratnik broja 7. Koliko najmanje znamenki ima manji od ta dva broja?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Rješenje: C
Razlika u zbroju znamenaka ta dva broja mora biti višekratnik broja 7. Ako se poveća samo znamenka jedinica razlika je 1 (npr. 123 i 124). Ako se poveća znamenka desetica razlika je 8 (npr. 129 i 130). Ako se poveća znamenka stotica razlika je 17 (npr. 1299 i 1300). Ako se poveća znamenka tisućica razlika je 26 (npr. 1999 i 2000). Ako se poveća znamenka desettisućica razlika je 35 (npr. 19999 i 20000) - to je višekratnik broja 7 - broj mora biti barem peteroznamenkast. Radi se o brojevima 69999 i 700000.

16. Titi pokušava biti dobri mali Klokan, ali laganje je prezabavno. Zato je svaka treća njegova izjava laž, a ostatak je istina. (Ponekad Titi počne s lažnom izjavom, a ponekad s jednom ili dvije istinite izjave.)
Titi je zamislio dvoznamenkast broj i govori svojoj prijateljici o njemu:
„Jedna od njegovih znamenki je 2."
„Veći je od 50. "
„Paran je broj. "
„Manji je od 30. "
„Djeljiv je s 3. "
„Jedna od njegovih znamenki je 7. "
Kolika je suma znamenaka broja kojeg je Titi zamislio?

A) 9 B) 12 C) 13 D) 15 E) 17

Rješenje: D
Lažna izjava mora biti ili „Veći je od 50. " ili „Manji je od 30. " jer te dvije izjave ne mogu obje biti istinite. To znači da su izjave „Paran je broj. " i „Jedna od njegovih znamenki je 7. " sigurno istinite. Znamenka 7 mora biti znamenka desetica jer u protivnom broj ne bi bio paran. Broj je, dakle, veći od 50 što znači da je i izjava „Djeljiv je s 3. " istinita dok je „Jedna od njegovih znamenki je 2. " laž. Radi se o broju 78.

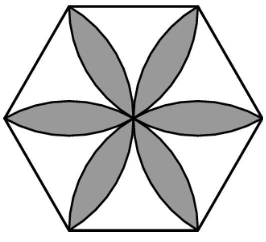
Pitanja za 5 bodova:

17. Koliko prirodnih brojeva ima svojstvo da je broj koji se dobije brisanjem njegove posljednje znamenke jednak 1/14 početnog broja?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje: C
Tražimo broj ($a = 10x + y$) za koji vrijedi $10x + y = 14x$ tj. $y = 4x$. Kako je y znamenka, x može biti samo 1 ili 2 (ne može biti 0 jer onda a ne bi bio prirodan).

18. Na slici je prikazan pravilan šesterokut sa stranicama duljine 1. Cvijet je konstruiran koristeći odsječke kružnica radijusa 1 sa središtem u vrhovima šesterokuta. Kolika je površina cvijeta?



A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $2\sqrt{3} - \pi$ D) $\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}$ E) $2\pi - 3\sqrt{3}$

Rješenje: E
Površina polovine jedne latice razlika je površine kružnog isječka kojem pripada kut od 60° i površine jednakostraničnog trokuta duljine stranice 1, tj. površina polovine latice je: $1^2\pi \cdot \frac{60}{360} - \frac{(1^2 \cdot \sqrt{3})}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.
Ukupna površina cvijeta je $12 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$.

19. Niz a_n zadan je rekurzivno: $a_1 = 2017$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$. Odredi a_{2017}.

A) -2017 B) $\frac{-1}{2016}$ C) $\frac{2016}{2017}$ D) 1 E) 2017

Rješenje: E
Raspišemo li prvih nekoliko članova uočit ćemo da se ponavljaju vrijednosti 2017, $\frac{2016}{2017}$, $-\frac{1}{2016}$. Podijelimo li 2017 s 3 dobit ćemo ostatak 1 što znači da vrijedi $a_{2017} = a_1 = 2017$.

20. Suma duljina stranica pravokutnog trokuta iznosi 18. Suma kvadrata duljina stranica tog trokuta iznosi 128. Odredi površinu ovog trokuta?

A) 18 B) 16 C) 12 D) 10 E) 9

Rješenje: E
Neka je c duljina hipotenuze, a a i b duljine kateta ovog trokuta.
Vrijedi: $a + b + c = 18$, $a^2 + b^2 + c^2 = 128$, $a^2 + b^2 = c^2$.
Iz zadnje dvije jednakosti slijedi $2c^2 = 128$ tj. $c = 8$. Sada imamo sustav $a + b = 10$, $a^2 + b^2 = 64$.
Kvadriramo li prvu jednadžbu pa oduzmemo drugu dobit ćemo $2ab = 36$, tj. $\frac{ab}{2} = 9$ što je površina zadanog trokuta.

21. U 5 kutija raspoređujete 5 bijelih i 5 crnih kuglica. U svakoj kutiji mora biti barem jedna kuglica. Protivnik izvlači jednu kuglicu iz kutije po izboru i pobjeđuje ako je izvučena kuglica bijele boje. Koji raspored kuglica će vam dati najbolje šanse za pobjedu?

A. U svaku kutiju stavimo jednu bijelu i jednu crnu kuglicu.
B. U tri kutije rasporedimo samo crne kuglice, a u dvije samo bijele kuglice.
C. U četiri kutije rasporedimo samo crne kuglice, a u jednu sve bijele kuglice.
D.U svaku kutiju stavimo po jednu crnu kuglicu, a u jednu dodamo i sve bijele kuglice.
E. U svaku kutiju stavimo po jednu bijelu kuglicu, a u jednu dodamo i sve crne kuglice.

Rješenje: D
Protivnik pobjeđuje s vjerojatnošću:
A) $\frac{1}{2}$ (svejedno je koju kutiju izabire)
B) $\frac{2}{5}$ (ako izabere kutiju u kojoj su samo bijele kuglice)
C) $\frac{1}{5}$ (ako izabere kutiju u kojoj su samo bijele kuglice)
D) $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ (ako izabere kutiju u kojoj su sve bijele kuglice i izvuče bijelu kuglicu)
E) $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ (ako izabere kutiju u kojoj su samo bijele kuglice ili izabere kutiju u kojoj su sve crne kuglice i izvuče bijelu kuglicu)
Vidimo da je najbolja opcija za nas D.

22. Vrijedi $|x| + x + y = 5$ i $x + |y| - y = 10$. Odredi vrijednosti izraza $x + y$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: A
Pretpostavimo da je $x < 0$. Tada imamo $-x + x + y = 5$, tj. $y = 5$ što dalje daje $x + 5 - 5 = 10$, tj. $x = 10$ što je u kontradikciji s pretpostavkom.
Dakle, vrijedi $x > 0$.
Pretpostavimo da je $y > 0$. Tada imamo: $x + y - y = 10$, tj. $x = 10$ što daje $10 + 10 + y = 5$, tj. $y = -15$ što je u kontradikciji s pretpostavkom.
Dakle, vrijedi $y < 0$.
Sada imamo sustav: $2x + y = 5$ i $x - 2y = 10$ čije je rješenje $(x, y) = (4, -3)$.

23. Koliko postoji troznamenkastih prirodnih brojeva ABC takvih da je $(A + B)^C$ troznamenkast prirodan broj i potencija broja 2?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

Rješenje: E
Troznamenkaste potencije broja 2 su $2^7, 2^8$ i 2^9. Zbroj znamenaka A i B može biti samo $2, 4, 8$ ili 16.
Pogledajmo tablicu:

$A + B =$	2	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$
A i B mogu biti	2,0; 1,1	1,3; 2,2; 3,1; 4,0	1,7; 2,6; 3,5; 4,4; 5,3; 6,2; 7,1; 8,0	7,9; 8,8; 9,7
C može biti	$7, 8, 9$	4	3	2
Broj načina	$2 \cdot 3 = 6$	4	8	3

Zbrojimo li vrijednosti iz zadnjeg retka dobit ćemo 21.

24. Svaki od 2017 ljudi koji žive na otoku su ili lažovi (koji uvijek lažu) ili iskreni ljudi (koji uvijek govore istinu). Više od 1000 stanovnika otoka sudjelovalo je na banketu gdje su svi sjedili za jednim okruglim stolom. Svaki od njih reče „Od dvoje ljudi koji sjede pored mene jedan je lažov, a jedan iskren čovjek.” Koliko iskrenih ljudi može najviše biti na otoku?

A) 1683 B) 668 C) 670 D) 1344 E) 1343

Rješenje: A
Krenimo od jednog iskrenog čovjeka (I_1). Neka je njemu slijeva lažov (L_1), a zdesna iskren čovjek (I_2).
Da bi izjava od I_2 bila istinita njemu zdesna mora sjedti lažov (L_2).
Da bi izjava od L_2 bila laž njemu zdesna mora sjediti iskren čovjek (I_3).
Da bi izjava od I_3 bila istinita njemu zdesna mora sjedti iskren čovjek (I_4).
Da bi izjava od I_4 bila istinita njemu zdesna mora sjedti lažov (L_3).
...
Raspored za okruglim stolom na banketu mora biti: *L I I L I I L I I* ... tj. nakon svakog lažova moraju uslijediti dva iskrena čovjeka. Kako je na banketu bilo više od 1000 ljudi znamo da ih je bilo barem 1002 (broj mora biti djeljiv s tri) od čega $\frac{1}{3}$ lažova tj. barem 334. Najveći broj iskrenih ljudi bit će ako su na banketu bila 1002 stanovnika i ako su svi ostali ljudi (osim ovih 334) iskreni, dakle njih 1683.

Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 27. travnja 2017. u 23:59.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2017. godine na oglasnoj ploči škole i na internet stranici HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2017. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 18. svibnja 2017. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na Internetu - **http://www.matematika.hr/klokan/2017/**.