MATEMATIČKI KLOKAN C 2018.

RJEŠENJA ZADATAKA

Pitanja za 3 boda:

1. Koliko je (20 + 18) : (20 – 18)?

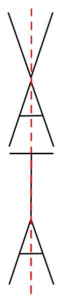
A) 18 B) 19 C) 20 D) 34 E) 36

Rješenje: B) 19
(20 + 18) : (20 – 18) = 38 : 2 = 19.

2. Kad se slova u riječi MAMA napišu vertikalno jedno ispod drugog, riječ ima vertikalnu os simetrije. Koja od sljedećih riječi također ima vertikalnu os simetrije, ako se napiše na isti način?

A) LAVA B) KAVA C) VAGA D) MANA E) VATA

Rješenje: E)



U riječi LAVA slovo L nema vertikalnu os simetrije.
U riječi KAVA slovo K nema vertikalnu os simetrije.
U riječi VAGA slovo G nema vertikalnu os simetrije.
U riječi MANA slovo N nema vertikalnu os simetrije.
U riječi VATA sva slova imaju vertikalnu os simetrije, koja im je zajednička ako su napisana jedno ispod drugog.

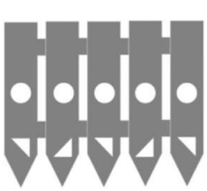
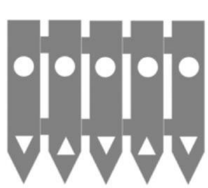
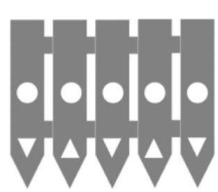
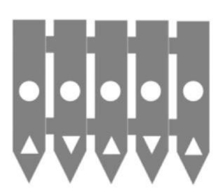
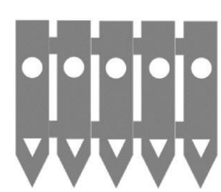
3. Kojim brojem treba zamijeniti znak ☺ da bi jednakost $2 \cdot 18 \cdot 14 = 6 \cdot$ ☺ $\cdot\ 7$ bila valjana?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Rješenje: D) 12
$2 \cdot 18 \cdot 14 = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 7 = 6 \cdot 12 \cdot 7 = 6 \cdot$ ☺ $\cdot\ 7$.

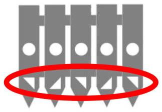
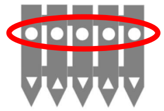
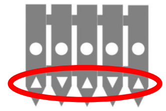
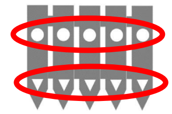
4. Ploče na Franjinoj ogradi pune su rupa, kako je prikazano na slici. Jedno je jutro, jedna od ploča pala ravno na pod. Koju od sljedećih ploča Franjo može vidjeti na podu, kad se približi ogradi?

A) B) C) D) E)

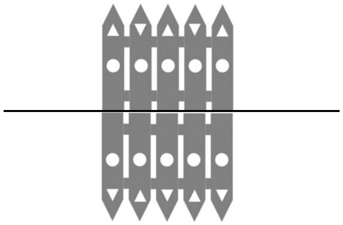






Rješenje: C)
Prilikom pada ploče ravno na pod, dobije se osnosimetrična slika ploče obzirom na pravac kojem pripada donji rub ograde.

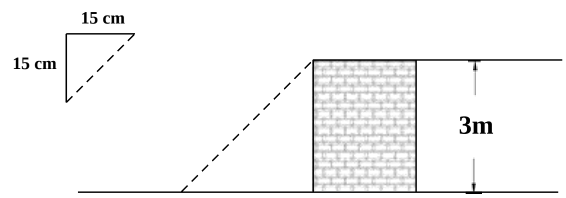
Na sljedećim slikama označeni su dijelovi ploča zbog kojih one nisu osnosimetrične zadanoj:

A)  B)  D)  E) 

Osnosimetrična slika zadanoj je slika C.



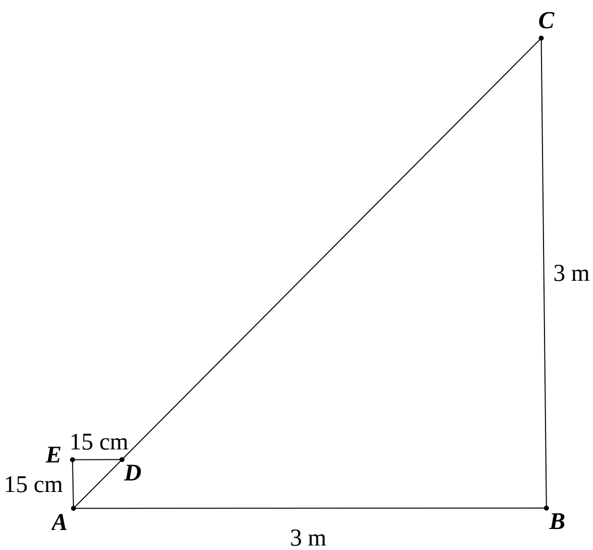
5. Josip gradi stepenište gdje je svaka stepenica 15 cm visoka i 15 cm široka, kako je pokazano na slici. Koliko treba takvih stepenica da bi drugi kat, izgrađen na 3 m visine, povezao s prvim katom?



A) 8 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Rješenje: D) 20

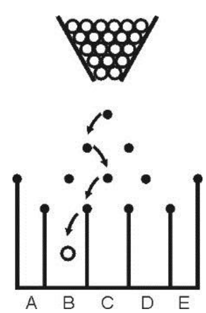
slika 1:



$3\text{ m} : 15\text{ cm} = 300\text{ cm} : 15\text{ cm} = 20.$

Da bi drugi kat povezao s prvim, Josip treba 20 stepenica.

6. Na ploču s čavlićima padaju loptice. Svaki put kad loptica udari čavlić odskoči na čavlić u prvom redu ispod, koji je ili direktno lijevo ili direktno desno od tog čavlića, dok ne padne u jedno od spremišta. Jedan od mogućih puteva prikazan je na slici. Na koliko različitih načina loptica može doći do spremišta B?

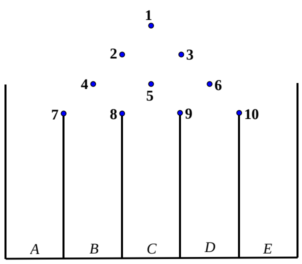


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

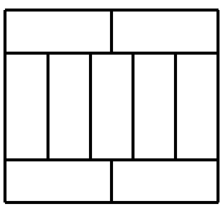
Rješenje: C) 4

Označimo čavliće u koje udaraju loptice redom s 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10.

Put loptice od vrha do dna jednoznačno možemo opisati nizom čavlića u koji loptica redom udara i oznakom spremišta. Tako je put loptice iz primjera na slici opisan nizom: 1-2-5-8-B.



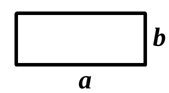
Najprije uočimo da u spremište B loptica može odskočiti samo od čavlića 7 ili 8.
Odredimo sve moguće putove do tih čavlića.
Ako je loptica od čavlića 1 odskočila dolje lijevo, udarit će u čavlić 2, nakon čega ima dvije mogućnosti 4 ili 5. Te dijelove puta možemo označiti 1-2-4, odnosno 1-2-5.
U slučaju 1-2-4 može udariti u 7 ili 8 što označimo s 1-2-4-7 ili 1-2-4-8.
U slučaju 1-2-4-7 može odskočiti u spremište A ili u spremište B. To znači da je jedan od mogućih putova 1-2-4-7-B.
Na sličan način dobivamo ostale putove.
Konačno, postoji točno 4 različita puta do spremišta B:
1-2-4-7-B
1-2-4-8-B
1-2-5-8-B
1-3-5-8-B.

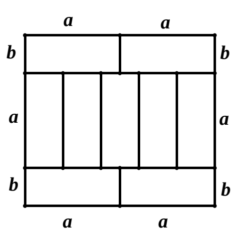
7. 

Veliki pravokutnik sastoji se od devet sukladnih manjih pravokutnika kako je prikazano na slici. Ako je duljina veće stranice manjeg pravokutnika 10 cm, koliki je opseg velikog pravokutnika?

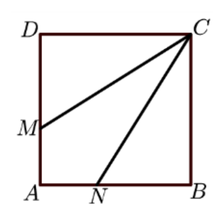
A) 40 cm B) 48 cm C) 76 cm D) 81 cm E) 90 cm

Rješenje: C) 76
Svi manji pravokutnici su međusobno sukladni. Označimo im duljine stranica s a i b.
Iz slike zaključujemo da je $2a = 5b$.
Kako je $a = 10$ cm, onda je $5b = 20$ odnosno $b = 4$ cm.



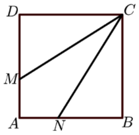


Opseg većeg pravokutnika je:
$o = 6a + 4b$
$o = 6 \cdot 10 + 4 \cdot 4$
$o = 76$ cm



8. Duljina stranice kvadrata $ABCD$ je 3 cm. Na stranicama $\overline{AD}$ i $\overline{AB}$ nalaze se točke M i N tako da dužine $\overline{CM}$ i $\overline{CN}$ dijele kvadrat na tri dijela iste površine. Kolika je duljina dužine $\overline{DM}$?
A) 0.5 cm B) 1 cm C) 1.5 cm D) 2 cm E) 2.5 cm

Rješenje: D) 2 cm



Kako je duljina stranice kvadrata 3 cm, površina mu je 9 cm^2.
S obzirom na to da dužine $\overline{CM}$ i $\overline{CN}$ dijele kvadrat na tri dijela iste površine, površina $\triangle DMC$ je trećina površine kvadrata, odnosno 3 cm^2.

$$P_{\triangle DMC} = \frac{|DM| \cdot |DC|}{2}$$

$$\frac{|DM| \cdot 3}{2} = 3$$

$|DM| = 2$ cm.

Pitanja za 4 boda:

9. Pravokutnik je podijeljen na 40 jednakih kvadrata i sadrži više od jednog reda kvadrata. Andrija je obojao srednji red. Koliko kvadrata nije obojao?

A) 20 B) 30 C) 32 D) 35 E) 39

Rješenje: C) 32

Ukupan broj kvadrata jednak je umnošku broja redova i broja kvadrata u jednom redu.

Zapišimo sve moguće načine na koje se broj 40 može zapisati kao umnožak prirodnih brojeva:

$40 = 1 \cdot 40$

$40 = 2 \cdot 20$

$40 = 4 \cdot 10$

$40 = 5 \cdot 8$

Kako je Andrija obojao srednji red, broj redova mora biti neparan i veći od 1. Jedina takva mogućnost je da je pravokutnik podijeljen na 5 redova s po 8 kvadrata. Ako je obojao jedan red, ostalo je neobojano četiri reda, odnosno $4 \cdot 8 = 32$ kvadrata.

10. U jednoj od tri prostorije skriven je lav. Na vratima 1. prostorije je poruka „Lav je ovdje“, na vratima 2. prostorije je poruka „Lav nije ovdje“, a na vratima 3. prostorije je poruka „$2 + 3 = 2 \cdot 3$“. Samo jedna od tih poruka je istinita. U kojoj prostoriji je skriven lav?

A) U 1. prostoriji. B) U 2. prostoriji. C) U 3. prostoriji.

D) Može biti u bilo kojoj. E) Može biti ili u prostoriji 1 ili u prostoriji 2.

Rješenje: C) U prostoriji 3.

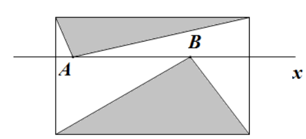
Poruka na 3. prostoriji nije istinita.

Ako je lav u 1. prostoriji tada je i istinita poruka na 1. prostoriji „Lav je ovdje“. No onda je istinita i poruka na 2. prostoriji „Lav nije ovdje“ što je nemoguće jer je samo jedna od tih poruka istinita. Dakle, lav nije u 1. prostoriji.

Ako je lav u 2. prostoriji, tada nije istinita poruka na 2. prostoriji „Lav nije ovdje“. No onda nije istinita ni poruka na 1. prostoriji „Lav je ovdje“, a kako nije istinita poruka na 3. prostoriji i taj slučaj je nemoguć jer jedna poruka mora biti istinita. Dakle, lav nije u 2. prostoriji.

Ako je lav u 3. prostoriji, tada poruka na 1. prostoriji „Lav je ovdje“ nije istinita, poruka na 2. prostoriji „Lav nije ovdje“ je istinita i poruka na 3. prostoriji nije istinita. Time je ispunjen uvjet zadatka. Dakle, lav je u 3. prostoriji.

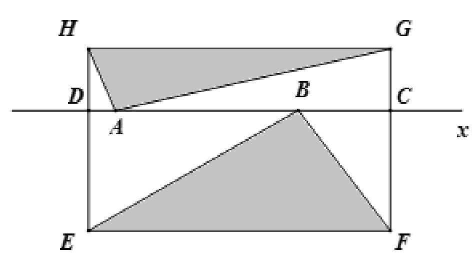
11. Pravokutnik na slici presječen je pravcem *x* paralelnim s dvjema njegovim stranicama. Na pravcu *x*, unutar pravokutnika, označene su točke *A* i *B*, kako je prikazano na slici. Površina osjenčanih dijelova je 10 cm^2. Kolika je površina pravokutnika?



A) 18 cm^2 B) 20 cm^2 C) 22 cm^2 D) 24 cm^2 E) To ovisi o položaju točaka *A* i *B*.

Rješenje: B) 20 cm^2

Uz oznake kao na slici vrijedi:



$P_{EFGH} = P_{EFCD} + P_{DCGH}$

Pravokutnik *EFCD* i trokut *EFB* imaju istu osnovicu i istu visinu pa je $P_{EFCD} = 2P_{AFB}$.

Pravokutnik *DCGH* i trokut *AGH* imaju istu osnovicu i istu visinu pa je $P_{DCGH} = 2P_{AGH}$.

$P_{EFGH} = P_{EFCD} + P_{DCGH}$
$P_{EFGH} = 2P_{EFB} + 2P_{AGH}$
$P_{EFGH} = 2 \cdot (P_{EFB} + P_{AGH})$
$P_{EFGH} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ cm}^2$

12. Katarina treba napisati niz prostih brojeva manjih od 100. Mora iskoristiti svaku od znamenaka 1,2,3,4,5 točno jednom i ne smije koristiti niti jednu drugu znamenku. Koji od prostih brojeva će sigurno biti u njezinom nizu?

A) 2	B) 5	C) 31	D) 41	E) 53

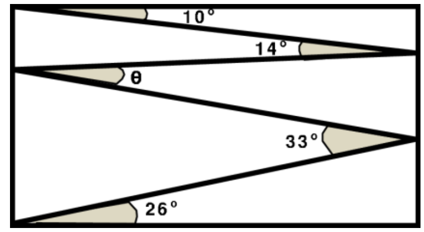
Rješenje: D) 41
1. način
Budući da Katarina mora upotrijebiti znamenku 4, može ju upotrijebiti samo u zapisu dvoznamenkastog broja i to na mjestu desetica. Naime, jednoznamenkasti broj 4 nije prost, a i svaki dvoznamenkasti broj koji završava na 4 nije prost (djeljiv je s 2). Prosti brojevi sa znamenkom desetica 4 su 41, 43, 47. Broj 47 otpada jer 7 nije među dozvoljenim znamenkama. Ako napiše 43, tada od znamenaka 1, 2 i 5 treba napraviti ostale proste brojeve, a to je nemoguće. Naime, 1 ne može biti samostalan nego mora biti znamenka u dvoznamenkastom broju. A radi se o ovim brojevima: 12, 15, 21 ili 51. I oni su svi složeni. Dakle, preostaje samo da je napisala prosti broj 41. Od preostalih znamenaka 2, 3, 5 može sastaviti proste brojeve. Na primjer, upravo 2, 3, 5 su prosti. Ili 23 i 5, ili 53 i 2.
2. način
Ako u nizu ima broj 2, tada od preostalih znamenaka može zapisati proste brojeve: 3, 5 i 41 ili 41 i 53.
Ako u nizu ima prost broj 3, tada od preostalih znamenaka može zapisati proste brojeve 2, 5 i 41.
Ako u nizu ima prost broj 5, tada od preostalih znamenaka može zapisati proste brojeve 2, 3 i 41 ili 23 i 41.
Ako u nizu ima prost broj 13, tada od preostalih znamenaka ne može zapisati proste brojeve.
Ako u nizu ima prost broj 31, tada od preostalih znamenaka ne može zapisati proste brojeve.
Ako u nizu ima prost broj 41, tada od preostalih znamenaka može zapisati proste brojeve: 2, 3 i 5 ili 5 i 23 ili 2 i 53.
Ako u nizu ima prost broj 23, tada od preostalih znamenaka može zapisati proste brojeve 5 i 41.
Ako u nizu ima prost broj 53, tada od preostalih znamenaka može zapisati proste brojeve 2 i 41.
Dakle, jedini prost broj koji se javlja u svim nizovima je broj 41.

13. Hotel na jednom hrvatskom otoku koristi reklamni slogan „350 sunčanih dana svake godine!“. Koliko najmanje dana, prema tom oglasu, Hrvoje mora ostati u hotelu u 2018. godini kako bi sigurno imao dva uzastopna sunčana dana?

A) 17	B) 21	C) 31	D) 32	E) 35

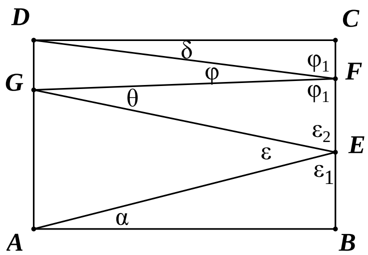
Rješenje: D) 32
2018. godina nije prijestupna (jer nije djeljiva s 4) pa ima 365 dana.
Kako je 365 – 350 = 15, na tom otoku ima najviše 15 dana koji su oblačni (sa ili bez oborina). Najdulje treba ostati u slučaju kad se dan za danom izmjenjuju sunčan i oblačan dan.
Ako je 1. dan bio sunčan, onda su prvih 15 parnih dana oblačni, odnosno 2., 4., itd. do 30. dana su oblačni. Poslije toga slijede sunčani dani pa je prvi par uzastopnih sunčanih dana 31. i 32. dan. Znači Hrvoje najmanje mora ostati 32 dana da bi sigurno imao dva uzastopna sunčana dana.
Ako je prvi dan oblačan, tada su i prvih 15 neparnih dana oblačni, odnosno 1., 3., 5. itd. do 29. dana su oblačni. Poslije toga slijede sunčani dani pa je prvi par uzastopnih sunčanih dana 30. i 31. dan. Znači Hrvoje najmanje mora ostati 31 dan da bi sigurno imao dva uzastopna sunčana dana.
Dakle, u najnepovoljnijem slučaju mora ostati najmanje 32 dana da bi sigurno imao dva uzastopna sunčana dana.

14. Vjeran je unutar pravokutnika nacrtao cik-cak linije, određujući pritom kutove veličina 10°, 14°, 33° i 26° kao što je pokazano na slici. Kolika je veličina kuta θ?



A) 11° B) 12° C) 16° D) 17° E) 33°

Rješenje: A) 11°



$\alpha = 26°,\ \varepsilon = 33°,\ \varphi = 14°$ i $\delta = 10°$

$\triangle ABE$ i $\triangle CDF$ su pravokutni trokuti pa vrijedi:

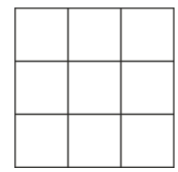
$\varepsilon_1 = 90° - \alpha = 64°$ i $\varphi_1 = 90° - \delta = 80°$.

Kako je $\varepsilon_1 + \varepsilon + \varepsilon_2 = 180°$, $\varepsilon_2 = 83°$.

Kako je $\varphi_1 + \varphi + \varphi_2 = 180°$, $\varphi_2 = 86°$.

Konačno, iz $\theta + \varepsilon_2 + \varphi_1 = 180°$ dobivamo $\theta = 11°$.

15. Nina je cijele brojeve od 1 do 9 upisala nekim redom u svaku ćeliju 3x3 tablice. Potom je računala zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu. Pet takvih zbrojeva, u nekom poretku, su 12, 13, 15, 16 i 17. Koji je šesti zbroj?



A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

Rješenje: A) 17

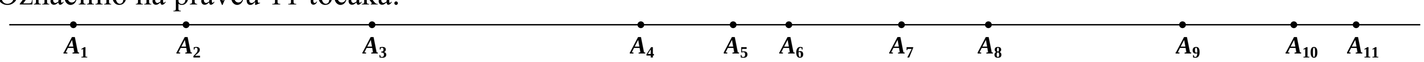
U tablici ima 3 reda i 3 stupca. Poznato je 5 od 6 zbrojeva njihovih elemenata. Označimo s x taj nepoznati zbroj. Zbrajanjem zbrojeva u svim recima i stupcima dobije se dvostruku zbroj svih brojeva u tablici.
Kako su u tablici upisani brojevi od 1 do 9, njihov zbroj je:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = (1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) + 9 = 5 \cdot 9 = 45.$
Stoga vrijedi:
$x + 12 + 13 + 15 + 16 + 17 = 2 \cdot 45$
$x + 73 = 90$
$x = 17$

16. Na pravcu je označeno jedanaest točaka. Zbroj svih udaljenosti između prve i preostalih točaka je 2018. Zbroj svih udaljenosti između druge i svih preostalih točaka (uključujući i prvu) je 2000. Kolika je udaljenost prve i druge točke?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: B) 2

Označimo na pravcu 11 točaka:



$$|A_1A_2| + |A_1A_3| + |A_1A_4| + |A_1A_5| + |A_1A_6| + |A_1A_7| + |A_1A_8| + |A_1A_9| + |A_1A_{10}| + |A_1A_{11}| = 2018$$
$$|A_2A_1| + |A_2A_3| + |A_2A_4| + |A_2A_5| + |A_2A_6| + |A_2A_7| + |A_2A_8| + |A_2A_9| + |A_2A_{10}| + |A_2A_{11}| = 2000$$

Zapišimo udaljenost prve i treće točke kao zbroj udaljenosti od prve i druge i udaljenosti od druge i treće točke:
$|A_1A_3| = |A_1A_2| + |A_2A_3|$.
Analogno napravimo za ostale točke pa dobijemo:
$$|A_1A_2| + |A_1A_2| + |A_2A_3| + |A_1A_2| + |A_2A_4| + |A_1A_2| + |A_2A_5| + |A_1A_2| + |A_2A_6| +$$
$$|A_1A_2| + |A_2A_7| + |A_1A_2| + |A_2A_8| + |A_1A_2| + |A_2A_9| + |A_1A_2| + |A_2A_{10}| + |A_1A_2| + |A_2A_{11}| = 2018$$
Što možemo zapisati u obliku:
$$9 \cdot |A_1A_2| + |A_1A_2| + |A_2A_3| + |A_2A_4| + |A_2A_5| + |A_2A_6| + |A_2A_7| + |A_2A_8| + |A_2A_9| + |A_2A_{10}| + |A_2A_{11}| = 2018$$

Konačno:

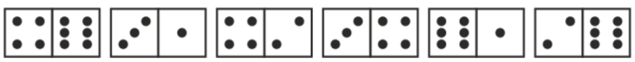
$$9 \cdot |A_1A_2| + 2000 = 2018$$

$$9 \cdot |A_1A_2| = 18$$

$$|A_1A_2| = 2$$

Pitanja za 5 bodova:

17. Domino pločice složene su pravilno ako imaju isti broj točkica na krajevima s kojima se dodiruju dvije susjedne pločice. Paula je složila šest domino pločica u liniju kako je prikazano na slici. U jednom potezu je dozvoljena zamjena mjesta bilo koje dvije pločice ili rotacija jedne. Koji je najmanji broj poteza potrebnih da se ovaj niz domino pločica pravilno posloži?

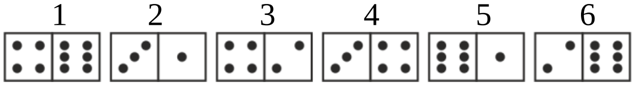


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Nemoguće je složiti pravilno.

Rješenje: C) 3

Označimo redom domino pločice na slici:

1 2 3 4 5 6



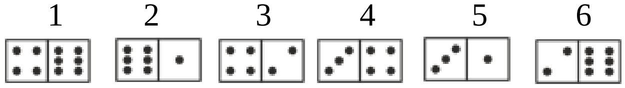
U tih šest domino pločica ima 2 jedinice, 2 dvojke, 2 trojke, 3 četvorke i 3 šestice pa je cilj ostaviti prvu i zadnju pločicu na mjestu na kojem su postavljene jer 1. počinje četvorkom, a zadnja završava šesticom.

Ako koristimo samo jedan potez, znači jednu zamjenu dviju pločica ili jednu rotaciju jedne pločice nemoguće ih je povezati na pravilan način.

Provjerimo je li moguće napraviti pravilno povezivanje samo s 2 poteza.

Da bi povezali 1. pločicu, jedina mogućnost je da nastavimo s 5. pločicom čime je potrebno napraviti zamjenu 2. i 5. Nakon toga je poredak kao na slici:

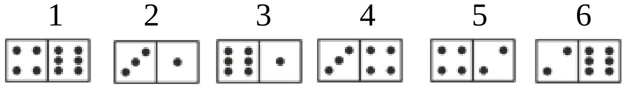
1 2 3 4 5 6



Sad je jasno da s još samo jednom zamjenom ili samo jednom rotacijom ne možemo doći do rješenja.

Ako u početnom poretku krećemo od povezivanja 6. pločice, jedina mogućnost je da napravimo zamjenu 3. i 5. Nakon toga je poredak kao na slici:

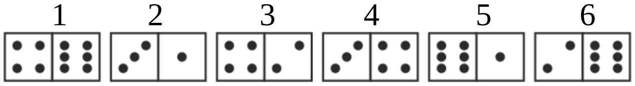
1 2 3 4 5 6



Sad je jasno da s još samo jednom zamjenom ili samo jednom rotacijom ne možemo doći do rješenja.

Zaključak: Ako koristimo samo dva poteza nemoguće je povezati pločice na pravilan način.

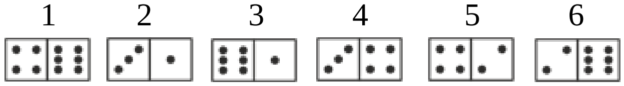
1 2 3 4 5 6



Ako koristimo 3 poteza, jedno od mogućih rješenja je:

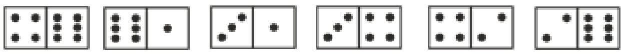
1. potez: zamjena pločica 3 i 5, nakon čega se dobije:

1 2 3 4 5 6



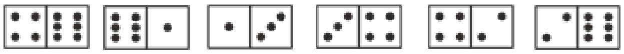
2. potez: zamjena pločica 2 i 3, nakon čega se dobije:

1 2 3 4 5 6



3. potez: rotacija pločice 3, nakon čega se dobije:

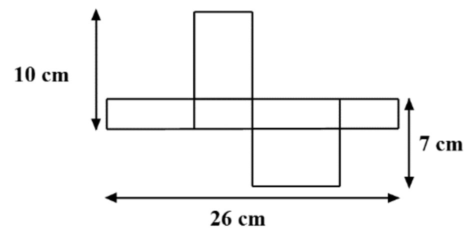
1 2 3 4 5 6



Dakle, najmanji broj poteza je 3.

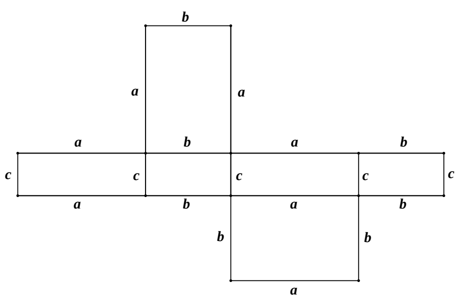
18. Na slici je mreža kutije oblika kvadra. Koliki je obujam kutije?

A) 43 cm^3 B) 70 cm^3 C) 80 cm^3 D) 100 cm^3 E) 1820 cm^3



Rješenje: C) 80 cm^3

Označimo duljine bridova s a, b i c.



Vrijedi:
$2a + 2b = 26$, odnosno $a + b = 13$
$a + c = 10$
$b + c = 7$
Onda je:
$a = 10 - c$
$b = 7 - c$
Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo:
$10 - c + 7 - c = 13$
$c = 2$.

Onda je $a = 8$ i $b = 5$.
Obujam kutije je $V = 8 \cdot 5 \cdot 2 = 80$ cm^3.

19. Ana, Buga i Mirna bile su u kupovini. Buga je potrošila samo 15% količine novca koji je potrošila Mirna. Međutim, Ana je potrošila 60% više od Mirne. Zajedno su potrošile 550 kn. Koliko je potrošila Ana?

A) 30 kn B) 200 kn C) 250 kn D) 260 kn E) 320 kn

Rješenje: E) 320 kn

Ako je x količina koju je potrošila Mirna, onda je 15% od $x = 0.15x$ količina koju je potrošila Buga, a Ana je potrošila x + 60% od $x = 1.6x$.

Ukupno su potrošile:
$x + 0.15x + 1.6x = 550$
$2.75x = 550$
$x = 200$ kn
Ana je potrošila $1.6 \cdot 200 = 320$ kn.

20. Maja želi upisati brojeve u svaku ćeliju na rubu 5x6 tablice. Svaki broj koji upisuje jednak je zbroju dvaju brojeva u susjednim ćelijama s kojima ta ćelija ima zajednički rub. Dva su broja već upisana kako je prikazano na slici. Koji će broj upisati u ćeliju označenu s x?

10					3
	x				

A) 10 B) 7 C) 13 D) –13 E) –3

Rješenje: B) 7

Označimo slovima nepoznate vrijednosti upisane u ćelije između upisanih vrijednosti 3, 10 i x.

10	a	b	c	d	3
e					
f					
g					
h	x				

Kako je $10 + b = a$ i $a + c = b$, vrijedi $10 + b + a + c = a + b$, odnosno $c = -10$.

Nadalje vrijedi:

$3 + c = d$ pa je $d = -7$

$b + d = c$ pa je $b = -3$

$a + c = b$ pa je $a = 7$

$e + a = 10$ pa je $e = 3$

$f + 10 = e$ pa je $f = -7$

$g + e = f$ pa je $g = -10$

$h + f = g$ pa je $h = -3$

$g + x = h$ pa je $x = 7$

21. Sanja trenira skok u dalj. Dosadašnja joj je prosječna duljina skoka 3.80 m. Sljedeći put skočila je 3.99 m i prosjek je narastao na 3.81 m. Koliko mora skočiti sljedeći puta da bi povećala prosjek na 3.82 m?

A) 3.97 m B) 4.00 m C) 4.01 m D) 4.03 m E) 4.04 m

Rješenje: C) 4.01 m

Ako je Sanja u n skokova imala prosjek skoka 3.80 m, onda je:

$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = 3.8$, odnosno $x_1 + \ldots + x_n = 3.8n$

Sljedećim skokom duljine 3.99 povećala je prosjek na 3.81, pa je:

$\frac{x_1 + \ldots + x_n + 3.99}{n+1} = 3.81$, odnosno $x_1 + \ldots + x_n + 3.99 = 3.81(n+1)$

Iz tih jednakosti dobijemo:

$3.8n + 3.99 = 3.81(n+1)$

$3.8n + 3.99 = 3.81n + 3.81$

$0.01n = 0.18$

$n = 18$

Označimo duljinu zadnjeg skoka x i dobijemo:

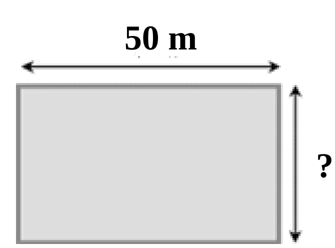
$\frac{x_1 + \ldots + x_{18} + 3.99 + x}{18+2} = 3.82$

$x_1 + \ldots + x_{18} + 3.99 + x = 3.82 \cdot 20$

$3.8 \cdot 18 + 3.99 + x = 76.4$

$x = 4.01\text{m}$

22. Roč i Jan se utrkuju. Jan trči oko ruba bazena prikazanog na slici, dok Roč pliva duljinom bazena. Jan trči tri puta brže nego što Roč pliva. Roč je preplivao šest duljina bazena u vremenu u kojem je Jan optrčao pet puta oko bazena. Kolika je širina tog bazena?

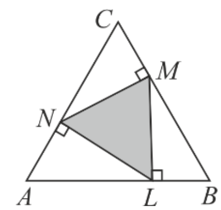


A) 25 m B) 40 m C) 50 m D) 80 m E) 180 m

Rješenje: B) 40 m
Ako je v brzina kojom Roč pliva, onda je $3v$ brzina kojom Jan trči.
Roč je preplivao šest duljina bazena odnosno 300 m.
Za to vrijeme je Jan pretrčao $5 \cdot (100 + 2x) = (500 + 10x)$ m, gdje je x širina bazena.
Vrijeme je količnik prijeđenog puta i brzine, a Ročevo vrijeme plivanja jednako je Janovom vremenu trčanja pa vrijedi:

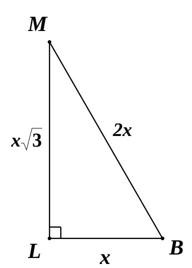
$$\frac{300}{v} = \frac{500+10x}{3v}$$
$$300 = \frac{500+10x}{3}$$
$$500+10x = 900$$
$$10x = 400$$
$$x = 40.$$

23. Točke L, M i N pripadaju stranicama jednakostraničnog $\triangle ABC$ prikazanog na slici, tako da je $MN \perp BC$, $LN \perp AC$ i $LM \perp AB$. Ako površina $\triangle ABC$ iznosi 36, kolika je površina $\triangle LMN$?



A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

Rješenje: B) 12
$\triangle ABC$ je jednakostraničan, pa je $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle ABC| = |\measuredangle BCA| = 60°$
Kako su $\triangle ALN$, $\triangle LBM$ i $\triangle NMC$ pravokutni trokuti, onda je:
$|\measuredangle ALN| = |\measuredangle BML| = |\measuredangle CNM| = 90° - 60° = 30°$.
Tada vrijedi:
$|\measuredangle MLN| = |\measuredangle NML| = |\measuredangle LNM| = 180° - 90° - 30° = 60°$
Iz toga slijedi da je $\triangle LMN$ jednakostraničan.



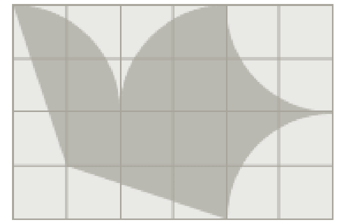
Kako je $|LM| = |MN| = |NL|$, trokuti $\triangle ALN$, $\triangle LBM$ i $\triangle NMC$ su sukladni.
Obzirom da je svaki od tih trokuta pola jednakostraničnog, duljine njegovih stranica koje pripadaju stranicama trokuta ABC možemo označiti kao na slici:

Sada vrijedi:
$x + 2x = a$,
$3x = a$
$x = \frac{a}{3}$.

pa je duljina stranice $\triangle LMN$ jednaka $x\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Kako je $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36$, onda je $a^2 = 48\sqrt{3}$ pa je $\left(x\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3a^2}{9} = 16\sqrt{3}$

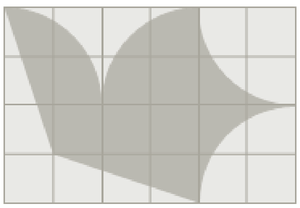
Konačno, površina $\triangle LMN$ je $\dfrac{16\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{4}=12$.



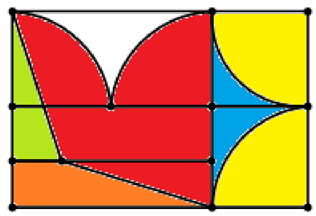
24. Frankin letački klub dizajnirao je zastavu s motivom golubice u letu na kvadratnoj mreži prikazanoj na slici. Površina golubice je 192 cm^2. Svaki dio ruba golubice pripada ili kružnici ili pravcu. Koje su dimenzije zastave?

A) 6 cm x 4 cm B) 12 cm x 8 cm C) 20 cm x 12 cm D) 24 cm x 16 cm E) 30 cm x 20 cm

Rješenje: D) 24 cm x 16 cm



Obojimo sliku i istaknimo neke dužine koje će omogućiti rekonstrukciju dijelova od kojih se sastoji golubica. Na osnovu toga zaključujemo da je površina golubice zbroj površina plavog i crvenog dijela.



Neka je r radijus kružnice čiju lukovi čine dio ruba golubice.
Odredimo najprije površinu plavog dijela golubice.
Jedan plavi dio je razlika površina kvadrata duljine stranice r i četvrtine kruga radijusa r.

Dakle, površina plavog dijela je: $2\cdot\left(r^2-\dfrac{1}{4}r^2\pi\right)=2r^2-\dfrac{1}{2}r^2\pi$.

Odredimo površinu crvenog dijela golubice.
Površina crvenog dijela dobije se tako da se od zbroja površina dvije četvrtine kruga radijusa r i pravokutnika sa stanicama duljina $2r$ i r oduzme površina pravokutnog trokuta (na slici označen zelenom bojom) duljina kateta $\dfrac{3}{2}r$ i $\dfrac{1}{2}r$ i površina trapeza (na slici označen narančastom bojom) duljina osnovica $\dfrac{1}{2}r$ i $2r$ čija visina ima duljinu $\dfrac{1}{2}r$.

Površina dvije četvrtine kruga radijusa r je $2\cdot\dfrac{1}{4}r^2\pi=\dfrac{1}{2}r^2\pi$

Površina pravokutnika sa stanicama duljina $2r$ i r je $2r\cdot r=2r^2$

Zbroj tih površina je $\dfrac{1}{2}r^2\pi+2r^2$

Površina zelenog pravokutnog trokuta duljina kateta $\dfrac{3}{2}r$ i $\dfrac{1}{2}r$ je $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}r\cdot\dfrac{1}{2}r=\dfrac{3}{8}r^2$

Površina narančastog trapeza duljina osnovica $\dfrac{1}{2}r$ i $2r$ čija visina ima duljinu $\dfrac{1}{2}r$ je

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}r+2r\right)\cdot\frac{1}{2}r=\frac{1}{4}r\cdot\frac{5}{2}r=\frac{5}{8}r^2$$

Zbroj tih površina je $\dfrac{3}{8}r^2+\dfrac{5}{8}r^2$

Dakle, površina crvenog dijela golubice je $\left(\frac{1}{2}r^2\pi+2r^2\right)-\left(\frac{3}{8}r^2+\frac{5}{8}r^2\right)=\frac{1}{2}r^2\pi+r^2$

Površina golubice je zbroj površina plavog i crvenog dijela:

$$\left(2r^2-\frac{1}{2}r^2\pi\right)+\left(\frac{1}{2}r^2\pi+r^2\right)=3r^2$$

Sada iz $3r^2=192$ dobijemo $r^2=64$, pa je $r=8$ cm.

Konačno, duljina zastave je $3r$, a širina $2r$ pa su dimenzije zastave 24 cm x 16 cm.

Rješenja zadataka bit će objavljena 20. travnja 2018. godine na mrežnim stranicama HMD-a. Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 27. travnja 2018. u 23:59. Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2018. godine na oglasnoj ploči škole i na mrežnim stranicama HMD-a.

Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2018. u 23:59.

Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 17. svibnja 2018. godine.

Obavijesti se mogu dobiti na stranici http://www.matematika.hr/ klokan/2018/ i na mrežnim stranicama HMD-a.