MATEMATIČKI KLOKAN

RJEŠENJA ZADATAKA

S

Pitanja za 3 boda:

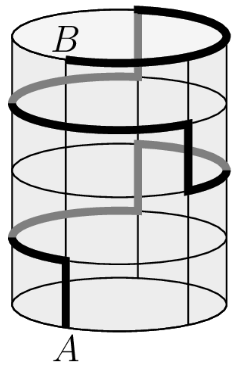
1. [Grčka] Izračunaj $\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222}$.

A) 1 B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{49}{10}$ D) $\frac{77}{110}$ E) 49

Rješenje
C

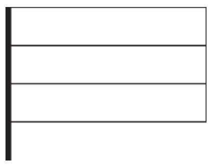
$$\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222} = \frac{7^2 \cdot 1111^2}{5 \cdot 1111 \cdot 2 \cdot 1111} = \frac{7^2}{5 \cdot 2} = \frac{49}{10}$$

2. [Grčka] Mrav hoda po valjku visine 15 cm i opsega baze 30 cm. Krenuo je iz točke A, pomicao se samo vertikalno prema gore ili horizotalno po kružnim lukovima te došao do točke B, kako je prikazano na slici. Koliki je put mrav prešao?



A) 45 cm B) 55 cm C) 60 cm D) 65 cm E) 75 cm

Rješenje
E
Uočimo da se ukupan put sastoji od jedne visine valjka i dvaju opsega njegove baze: $15 + 2 \cdot 30 = 75$ cm.



3. [Slovenija] Ema ima četiri različite bojice. Želi obojiti zastavu s tri pruge, kao na slici, tako da svaka pruga bude jedne boje te da nikoje dvije susjedne pruge ne budu iste boje. Na koliko to načina može napraviti?

A) 24 B) 27 C) 32 D) 36 E) 64

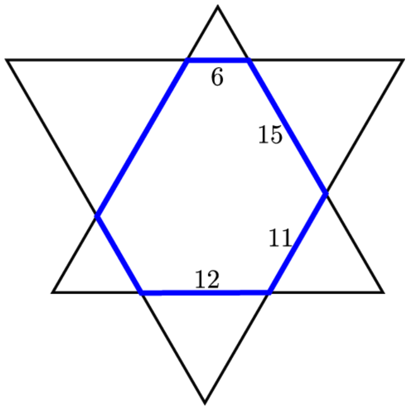
Rješenje
D
Za bojenje prve pruge Ema može odabrati bilo koju od svoje četiri boje. Za bojenje druge pruge može odabrati bilo koju od preostale tri boje. Za bojenje treće pruge također bira između tri boje (sve osim one kojom je obojila srednju prugu). Ukupno Ema ima $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ načina za bojenje zastave.

4. [Austrija] Koliko ima prirodnih brojeva n koji su djeljivi samo s tri različita broja, i to brojevima 1, 2 i n?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje
B
Broj treba biti djeljiv brojem 2, dakle može se zapisati kao $n = 2 \cdot k$. Tada je, osim s 1, 2 i n, djeljiv i brojem k. Jedini broj za koji se broj djelitelja neće povećati je broj $4 = 2 \cdot 2$.

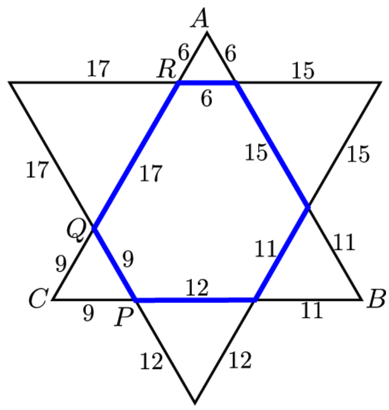
5. [Meksiko] Dva su jednakostranična trokuta smještena tako da tvore šesterokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne, kao na slici. Znamo duljine četiriju stranica toga šesterokuta. Koliko iznosi opseg šesterokuta?



A) 64 B) 66 C) 68 D) 70 E) 72

Rješenje

D



Kako su stranice danih jednakostraničnih trokuta paralelne, svi su trokuti izvan šesterokuta također jednakostranični.
Uočimo prvo da duljina stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC iznosi $6 + 15 + 11 = 32$.
Tada je i duljina stranice $\overline{BC}$ također 32, iz čega slijedi da je duljina dužine $\overline{PC}$ $32 - 11 - 12 = 9$.
Duljina dužine $\overline{AC}$ također je 32 pa je duljina dužine $\overline{QR}$ jednaka $32 - 9 - 6 = 17$.
Sada lako računamo opseg šesterokuta: $6 + 15 + 11 + 12 + 9 + 17 = 70$.

6. [Crna Gora] Koliko parova prirodnih brojeva x i y zadovoljava jednadžbu $x + 2y = 2^{10}$?

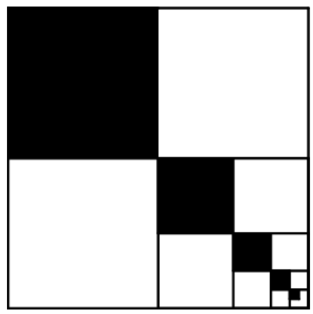
A) $2^9 - 1$ B) 2^9 C) $2^9 + 1$ D) $2^9 + 2$ E) 0

Rješenje

A

Vrijedi $x = 2^{10} - 2y = 2(2^9 - y)$. Da bi x bio prirodan broj, mora vrijediti $2^9 - y \geq 1$, tj. $y \leq 2^9 - 1$. Kako y može biti bilo koji prirodan broj do $2^9 - 1$, imamo $2^9 - 1$ parova (x, y) koji su rješenja jednadžbe.

7. [Nizozemska] Kvadrat površine 84 podijeljen je na četiri sukladna kvadrata. Gornji lijevi obojen je crno. Donji desni ponovo je podijeljen na četiri sukladna kvadrata. Gornji lijevi obojen je crno. Ovaj proces ponavlja se u beskonačnost. Kolika je ukupna površina obojena crno?



A) 24 B) 28 C) 31 D) 35 E) 42

Rješenje

B

Površina najvećega crnog kvadrata iznosi $\frac{84}{4} = 21$, a površinu svakog sljedećeg crnog kvadrata u nizu dobijemo množenjem s $\frac{1}{4}$. Tražena ukupna površina zbroj je geometrijskoga reda s prvim članom $a_1 = 21$ i kvocijentom $q = \frac{1}{4}$, tj. $a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 21 \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = 28$.

8. [Meksiko] Pia želi upisati prirodne brojeve od 1 do 9 u devet kvadratića na slici tako da zbroj brojeva u bilo koja tri susjedna kvadratića bude višekratnik broja 3. Brojevi 7 i 9 već su upisani. Na koliko načina Pia može popuniti preostale kvadratiće?

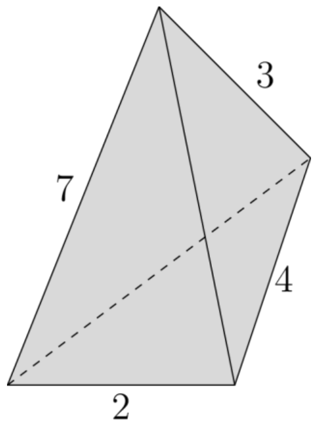
	7		9					

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Rješenje
E
Da bi zbroj brojeva u bilo koja tri susjedna kvadratića bio djeljiv brojem tri, ostatci pri dijeljenju s 3 trebaju se pojavljivati ciklički: ABCABCABC, gdje su A, B i C po jedan broj iz skupa mogućih ostataka pri dijeljenju brojem 3, $\{0,1,2\}$. Ostatak pri dijeljenju broja 7 brojem 3 je 1, a ostatak pri dijeljenju broja 9 brojem 3 je 0. Između tih dvaju brojeva treba biti broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2. Za to imamo tri izbora: 2, 5 ili 8.
Sada znamo da A znači „ostatak je 0“ (3, 6, 9), B znači „ostatak je 1“ (1, 4, 7), a C znači „ostatak je 2“ (2, 5, 8).
Nakon odabira broja koji će smjestiti između 7 i 9, za svako slovo ostala su nam po dva broja na izbor, koja možemo razmjestiti na 2 načina.
Ukupno Pia ima $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ načina kako popuniti preostale kvadratiće.

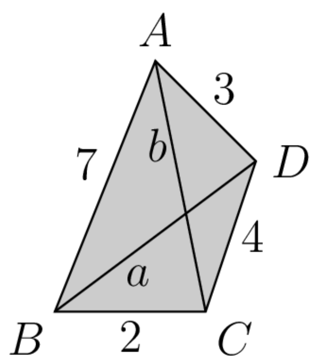
Pitanja za 4 boda:

9. [Grčka] Duljine bridova trostrane piramide prirodni su brojevi. Četiri duljine prikazane su na slici. Koliki je zbroj duljina preostalih dvaju bridova?



A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Rješenje
C
Označimo bridove čije duljine ne znamo, a i b, kao na slici.
Koristeći nejednakosti trokuta imamo:
Iz trokuta ABD: $a < 7 + 3$; $7 < a + 3$; $3 < 7 + a$.
Iz trokuta BCD: $a < 4 + 2$; $4 < a + 2$; $2 < 4 + a$.
Zaključujemo da mora vrijediti $4 < a < 6$ pa je jedini izbor $a = 5$.
Analogno iz trokuta ABC i ACD koristeći nejednakost trokuta zaključujemo da mora vrijediti $5 < b < 7$ pa je jedini izbor $b = 6$.
Zbroj duljina tih bridova je 11.



10. [Turska] Za svaki prirodan broj n definiran je broj $n!$ kao umnožak svih prirodnih brojeva od 1 do n, primjerice $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Odredi zbroj znamenaka broja N za koji vrijedi $N! = 6! \cdot 7!$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 9

Rješenje
A
$N! = 6! \cdot 7! = 7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 7! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$
pa je $N = 10$, a zbroj znamenaka toga broja 1.

11. [Grčka] Grafovi funkcija $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ prolaze kroz jednu zajedničku točku bez obzira na odabir parametra a. Odredi zbroj koordinata te točke.

A) 2 B) 4 C) 7 D) 8 E) Ništa od navedenog.

Rješenje
E
Za $a = 1$ imamo funkciju $y = x^3 + 3x^2 + 4$.
Za $a = 1$ imamo funkciju $y = x^3 + 3x^2 + x + 6$.
Točku koja pripada i jednom i drugom grafu dobit ćemo rješavajući sustav tih dviju jednadžbi. Oduzmemo li ih, dobivamo $0 = x + 2$, tj. $x = -2$.
Ordinatu ćemo dobiti uvrštavanjem toga broja u jednu od funkcija, $y = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 4 = 8$.
Rješenje je $x + y = 6$.

12. [Grčka] Dani su brojevi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, čiji je zbroj S. Znamo da vrijedi $a_k = k + S$ za svaki $k \in \{1,2,3,4,5\}$. Koliko iznosi S?

A) $\frac{15}{4}$ B) $-\frac{15}{4}$ C) -15 D) 15 E) Ništa od navedenog.

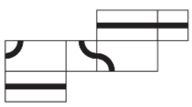
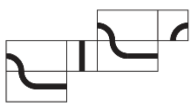
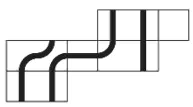
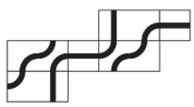
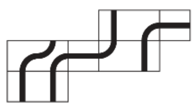
Rješenje
B
$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (1 + S) + (2 + S) + (3 + S) + (4 + S) + (5 + S) = 15 + 5S$.
Iz $S = 15 + 5S$ slijedi da je $S = -\frac{15}{4}$.

13. [Grčka] Koliko parova prirodnih brojeva m i n zadovoljava nejednakost $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

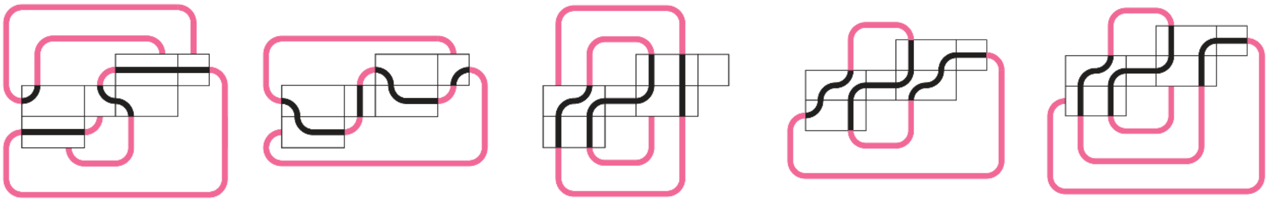
Rješenje
B
Budući da je apsolutna vrijednost bilo kojeg broja nenegativna te da su izrazi pod znakom apsolutne vrijednosti cijeli brojevi, slijedi da postoje tri mogućnosti: oba su pribrojnika jednaka 0; ili prvi je pribrojnik 0, a drugi je 1; ili pak prvi je pribrojnik 1, a drugi je 0.
Prva dva slučaja nemaju rješenje u skupu prirodnih brojeva jer kad bi bilo $2m - 2023 = 0$, tada m ne bi bio prirodan broj. Zato mora vrijediti $2n - m = 0$ i $|2m - 2023| = 1$. Iz prve jednakosti slijedi da je m paran.
Dalje iz $|2m - 2023| = 1$ slijedi da je $m = 1012$ ili $m = 1011$. Prihvaćamo samo parno rješenje.
Rješenje dane nejednadžbe je stoga jedinstveno: $(m, n) = (1012, 506)$.

14. [Slovenija] Leon je nacrtao zatvorenu krivulju na kvadru, a zatim je kvadar razmotao u mrežu. Koja od danih mreža može biti mreža Leonova kvadra?

A)  B)  C)  D)  E) 

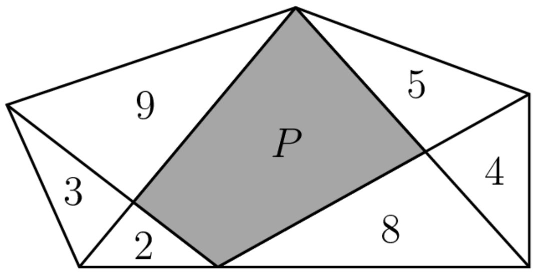
Rješenje
D

Mreže se mogu spojiti u kvadar na jedinstven način. Linije na slikama pokazuju koje je strane potrebno zalijepiti:



Vidimo da samo na kvadru D imamo zatvorenu krivulju.

15. [Grčka] Peterokut je podijeljen na manje dijelove kao što je prikazano na slici. Unutar svakog trokuta piše njegova površina. Kolika je površina osjenčanog četvrokuta P?

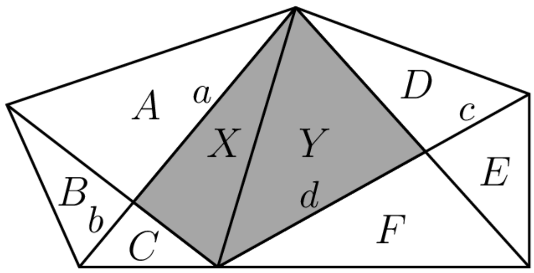


A) 15 B) $\frac{31}{2}$ C) 16 D) 17 E) 18

Rješenje

C

Nacrtajmo dijagonalu osjenčanog četverokuta.



Trokuti označeni A i B imaju istu visinu na stranice a, odnosno b. Te se stranice odnose isto kao i površine odgovarajućih trokuta, tj. $b : a = B : A$, odnosno $a = 3b$. Trokuti označeni X i C također imaju istu visinu pa vrijedi $b : a = C : X$, iz čega otkrivamo da je $X = 3C = 6$.

Analogno, $d : c = F : E$, odnosno $d = 2c$, iz čega dalje slijedi da je $d : c = Y : D$, pa je $Y = 2D = 10$.

Konačno, $P = X + Y = 16$.

16. [Grčka] Koliko je prirodnih brojeva koji dijele broj $2^{20}3^{23}$, no ne dijele broj $2^{10}3^{20}$?

A) 13 B) 30 C) 273 D) 460 E) Ništa od navedenog.

Rješenje

C

Svi djelitelji broja $A = 2^{10}3^{20}$ ujedno su i djelitelji broja $B = 2^{20}3^{23}$.

Svaki djelitelj broja A ili broja B oblika je 2^n3^m.

Za broj A biramo $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$ te $m \in \{0,1, \dots, 20\}$, stoga on ima $11 \cdot 21 = 231$ djelitelja.

Za broj B biramo $n \in \{0, 1, \dots, 20\}$ te $m \in \{0,1, \dots, 23\}$, stoga on ima $21 \cdot 24 = 504$ djelitelja.

Broj djelitelja broja B koji nisu djelitelji broja A je $504 - 231 = 273$.

Pitanja za 5 bodova:

17. [Grčka] Dvije realne funkcije realne varijable, f i g, zadovoljavaju jednadžbe $f(x)+2g(1-x)=x^2$ i $f(1-x)-g(x)=x^2$. Odredi f.

A) $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ B) $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ C) $-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ D) x^2-4x+5 E) Ne postoje takve funkcije.

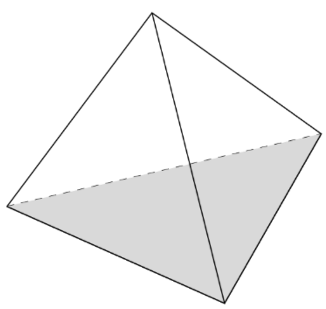
Rješenje
A
Iz druge jednadžbe vidimo da je $g(x)=f(1-x)-x^2$ pa je $g(1-x)=f(x)-(1-x)^2$.
Uvrstimo li taj izraz u prvu jednadžbu, dobivamo $f(x)+2f(x)-2(1-x)^2=x^2$, pa je
$3f(x)=x^2+2(1-2x+x^2)=3x^2-4x+2$. Dijeljenjem brojem 3 imamo $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

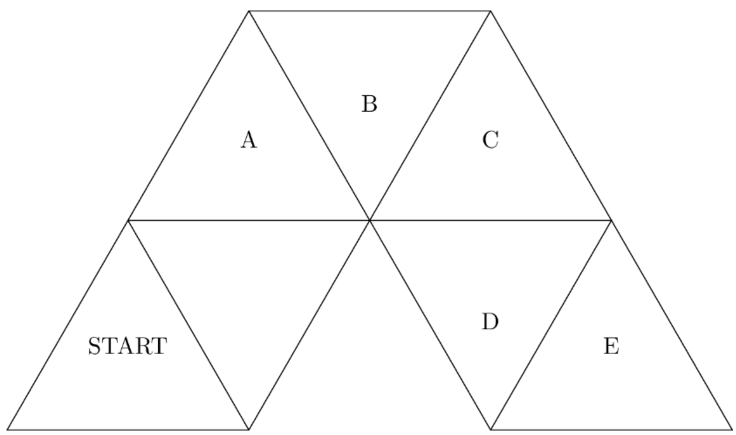
18. [Njemačka] Na natjecanju u *boulderingu* 13 se penjača natječe u tri kruga. Rezultat svakog natjecatelja umnožak je njegovih plasmana u svakom od tri kruga. Primjerice, ako jedan penjač u prvom krugu bude 4., u drugom 3., a u trećem krugu 6., njegov je konačan rezultat $4\cdot 3\cdot 6=72$. Što je konačan rezultat veći, to je ukupni plasman niži. Hana je u dva kruga zauzela 1. mjesto. Koji je njezin najniži mogući ukupni plasman?

A) 2. B) 3. C) 4. D) 5. E) 6.

Rješenje
B
Hanin najlošiji mogući rezultat je $1\cdot 1\cdot 13=13$ ako u trećem krugu bude posljednja.
Moguće je da postoje natjecatelji s rezultatima $2\cdot 2\cdot 2=8$ i $3\cdot 3\cdot 1=9$ koji bi u ukupnom poretku imali bolji plasman od Hane.
Pokažimo sada da nije moguće da troje penjača ima bolji plasman od Hane, odnosno konačan rezultat najviše 13.
Pretpostavimo suprotno, da na ljestvici postoji troje penjača ispred Hane. Umnožak njihovih konačnih rezultata bio bi najviše $13\cdot 13\cdot 13=2197$.
S druge strane, njihovi plasmani u prvom su krugu u najboljem slučaju 2, 3 i 4. Isto tako i u drugom krugu.
Njihovi plasmani u trećem krugu u najboljem su slučaju 1, 2 i 3. Umnožak njihovih konačnih rezultata stoga je najmanje $2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3=3456$ pa dolazimo do suprotnosti s pretpostavkom.
U ukupnom poretku ispred Hane može biti najviše dvoje penjača.

19. [Poljska] Jedna je strana pravilnog tetraedra obojena. Ta se strana na ploči postavi na polje START. Tetraedar sada pomičemo iz polja u polje rotirajući ga oko jednog brida. Na kojem će polju biti tetraedar kada obojena strana prvi put ponovo bude na ploči?

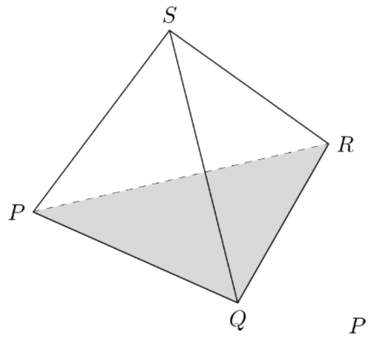


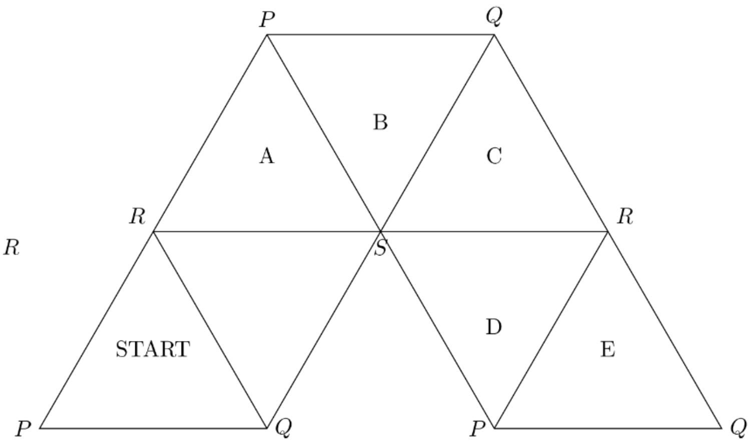


A) A B) B C) C D) D E) E

Rješenje
E

Označimo vrhove tetraedra P, Q, R, S. Na polju START na ploči nalaze se vrhovi P, Q, R. Sada na slici pratimo položaj vrhova na ploči dok se tetraedar po njoj pomiče.



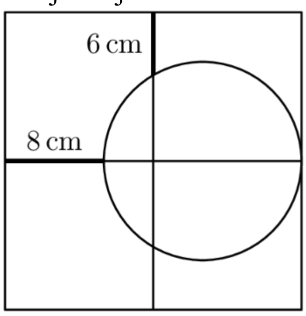


20. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost $f(x-5)+2 \leq x-2023 \leq f(x+4)-7$ za sve realne brojeve x. Odredi nultočku te funkcije.

A) 2016 B) 2020 C) 2021 D) 2023 E) 2025

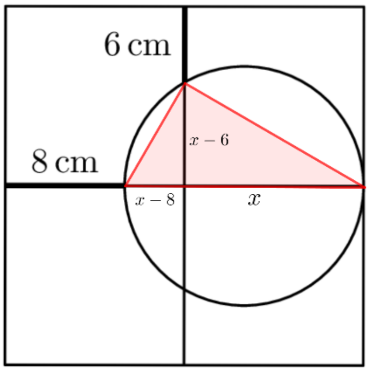
Rješenje
B
Rastavimo danu produljenu nejednakost na dvije nejednakosti:
$f(x-5)+2 \leq x-2023$ i $x-2023 \leq f(x+4)-7$.
Prvu možemo zapisati kao $f(x-5) \leq x-2025$, tj. $f(x-5) \leq (x-5)-2020$, pa vrijedi $f(t) \leq t-2020$ za sve realne brojeve t.
Drugu možemo zapisati kao $f(x+4) \geq x-2016$, tj. $f(x+4) \geq (x+4)-2020$, pa vrijedi $f(t) \geq t-2020$ za sve realne brojeve t.
Iz $f(t) \leq t-2020$ i $f(t) \geq t-2020$ slijedi $f(t) = t-2020$. Nultočka ove linearne funkcije je 2020.

21. [Njemačka] Kvadrat je podijeljen je na četiri sukladna kvadrata, kao na slici. Kružnica dodiruje desnu stranicu velikoga kvadrata u njezinom polovištu. Kolika je duljina stranice velikog kvadrata?



A) 18 cm B) 20 cm C) 24 cm D) 28 cm E) 30 cm

Rješenje
A
Neka je stranica velikog kvadrata duljine $2x$. Pogledajmo trokut istaknut na slici.



On je pravokutan (obodni kut nad promjerom). Visina na hipotenuzu je $x-6$, a odsječci na koje visina dijeli hipotenuzu duljina su $x-8$ i x.
Prema Euklidovu poučku vrijedi $(x-6)^2=(x-8)x$.
Rješenje ove jednadžbe je $x=9$ pa je duljina stranice velikog kvadrata $2\cdot 9=18$ cm.

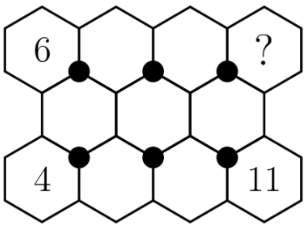
22. [Grčka] Koji je najveći zajednički djelitelj svih brojeva oblika $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$, gdje je n prirodan broj?

A) $2^9 3^3$ B) $2^3 3^3 5^3$ C) $2^6 3^3 5^3$ D) $2^8 3^2 5^3$ E) $2^9 3^3 5^3$

Rješenje
E
Radi se o kubu umnoška pet uzastopnih prirodnih brojeva. Među pet uzastopnih prirodnih brojeva sigurno se nalaze
- barem dva parna broja, a jedan od njih mora biti djeljiv brojem 4,
- barem jedan broj djeljiv brojem 3,
- barem jedan broj djeljiv brojem 5.

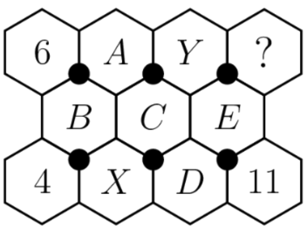
Svi brojevi danog oblika stoga će biti djeljivi brojem $(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)^3=2^9 3^3 5^3$.

23. [Poljska] Unutar šesterokuta na slici treba upisati sve prirodne brojeve od 1 do 11 tako da zbroj triju brojeva oko svake od šest crnih točaka bude jednak. Tri broja već su upisana. Koji će broj biti upisan u šesterokut s upitnikom?



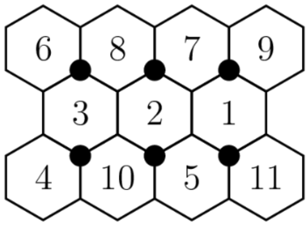
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Rješenje
E
Označimo šesterokute A, B, C, D, E, X, Y kao na slici.



Gledajući dvije točke krajnje lijevo možemo zaključiti da treba vrijediti $6+A+B=4+B+X$, tj. $X=A+2$.
Gledajući dvije središnje točke možemo zaključiti da treba vrijediti $A+C+Y=C+X+D$, tj. $Y=D+2$.
Gledajući dvije točke krajnje desno možemo zaključiti da treba vrijediti $Y+E+?=E+D+11$, tj. $11=?+2$ pa je $?=9$.

Evo i rješenja:



24. [Australija] Umnožak šest uzastopnih prirodnih brojeva dvanaestoznamenkast je broj oblika $\overline{abb\ cdd\ cdd\ abb}$, gdje su znamenke a, b, c i d također četiri uzastopna broja u nekom poretku. Koja je vrijednost znamenke d?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje
C
Među šest uzastopnih brojeva jedan će sigurno biti paran, a jedan djeljiv brojem 5, pa će njihov umnožak sigurno biti djeljiv brojem 10. Zato je znamenka b jednaka 0.
Kako su korištene znamenke uzastopni brojevi, znamo da će a, c i d biti $1, 2$ i 3 u nekom poretku, pa će vrijediti $a + c + d = 6$.
Dalje, među šest uzastopnih brojeva dva će sigurno biti djeljiva brojem 3 pa će njihov umnožak biti djeljiv brojem 9. Zato zbroj svih znamenaka našeg broja $2a + 2c + 4d$ mora biti djeljiv brojem 9, odnosno mora vrijediti $a + c + 2d = 9$**.**
Oduzimanjem gornjih dviju jednadžbi dobivamo $d = 3$.

Obavijesti o rješenjima zadataka i rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2023/