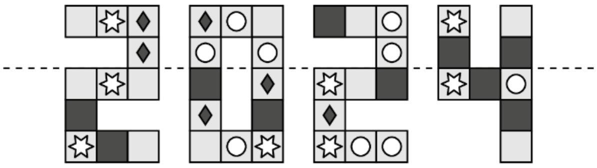
MATEMATIČKI KLOKAN 2024.

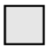
RJEŠENJA ZADATAKA

B

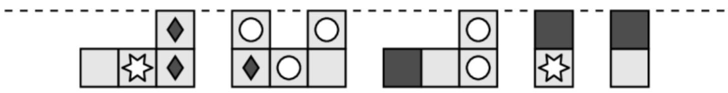
Pitanja za 3 boda:

1. [Iran] Ana je presavinula prikazanu sliku po isprekidanoj liniji. Koji će se kvadrat preslikati u sebi identičan?



A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: B



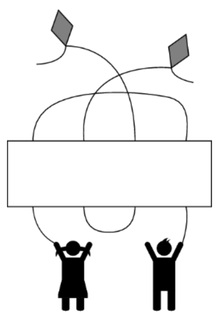
2. [Austrija] Igra skakanja izvodi se tako da igrač skače po jednom u svaki kvadrat, izmjenjujući obje noge – lijevu nogu – obje noge – desnu nogu – obje noge – lijevu nogu itd., kao što je prikazano na slici.
Marija je započela igru počevši s obje noge pa skočivši na lijevu nogu itd. U kojemu će od sljedećih kvadrata Marija skočiti samo na desnu nogu?

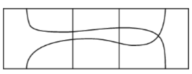
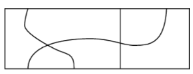
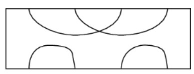
A) 10. B) 15. C) 20. D) 22. E) 23.

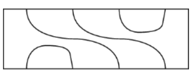
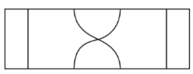
Rješenje: C

Samo na desnu nogu Marija je skočila na svakom 4. polju, tj. na 4., 8., 12… Od ponuđenih rješenja jedino je 20 višekratnik broja 4.

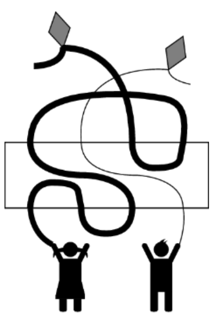
3. [Katalonija] Koju naljepnicu treba staviti u pravokutni prostor na slici tako da svako dijete bude povezano s različitim zmajem?



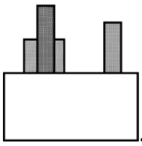
A)  B)  C) 

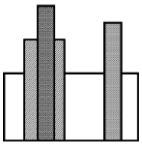
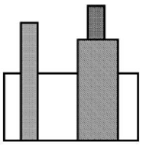
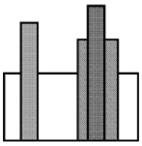
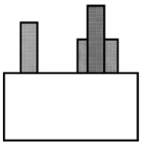
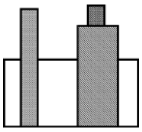
D)  E) 

Rješenje: D



4. [Švicarska] Petar je uz bijeli zid postavio tri bloka.

Gledajući sprijeda, zid i blokovi izgledaju ovako: . Kako izgledaju straga?

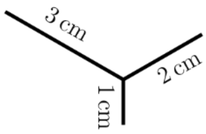
A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: B

Ako se gleda sa stražnje strane:
- sva tri bloka su ispred zida pa odgovor ne može biti D,
- dva bloka moraju biti na desnoj strani pa odgovor ne može biti A,
- svijetlo sivi blok je ispred tamno sivog pa odgovor ne može biti C.

Ako na slikama B i E usporedimo visine blokova koji stoje jedan ispred drugog, vidimo da bi na slici E tamno sivi blok morao biti viši pa je rješenje B.

5. [Njemačka] Maja želi nacrtati prikazani crtež bez podizanja olovke s papira. Koja je najkraća udaljenost koju mora prijeći olovkom kako bi to učinila? Na slici su dane duljine dužina. Svoj crtež može započeti gdje god želi.

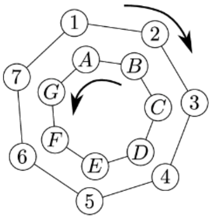


A) 6 cm B) 7 cm C) 8 cm D) 9 cm E) 10 cm

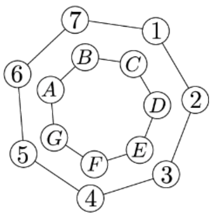
Rješenje: B

Za najmanju moguću ukupnu duljinu, najkraći dio treba prijeći dva puta pa je rješenje 3 + 1 + 1 + 2 = 7 cm.

6. [Meksiko] Dva su kola spojena i svako je označeno sa sedam pozicija. Kola se okreću u suprotnim smjerovima i svakome treba sedam minuta da napravi puni okret. Na kraju svake minute svako se slovo nađe točno ispred jednog broja. Slike prikazuju prva dva položaja kola gdje vidimo da je na početku slovo A ispred broja 1, slovo B ispred broja 2 i tako redom dalje. Kotači se okreću dok slovo C ne bude ispred broja 2. Ispred kojega je broja slovo F?



0 min



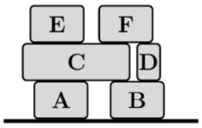
1 min

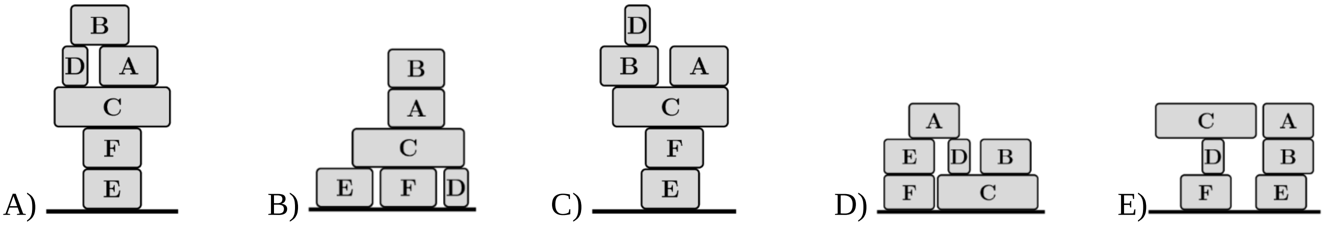
A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Rješenje: C

Umjesto da se oba kola okreću, možemo zamisliti da je vanjsko kolo fiksirano, a unutarnje se okreće, ali ne za jedno mjesto nego za dva u smjeru suprotnome od kazaljki na satu u jednoj minuti. Promatramo polje C. Počinje ispred polja 3, nakon jedne je minute ispred polja 1, nakon dvije minute ispred polja 6, nakon tri minute ispred polja 4, a nakon četiri minute ispred polja 2. Polje F počinje ispred polja 6, nakon jedne je minute ispred polja 4, nakon dvije minute ispred polja 2, nakon tri minute ispred polja 7, a nakon četiri minute ispred polja 5. Točan je odgovor C.

7. [Grčka] Na kamionu je složeno šest kutija kao što je prikazano na slici. Radnik ih je premjestio na pod. Uzimao je kutiju po kutiju, i to tako da kutija koju je uzeo nema neku drugu kutiju na vrhu. Kutije je slagao na hrpu stavljajući ih ili na pod ili na vrh neke druge kutije. Koju od sljedećih hrpa nije mogao složiti?





Rješenje: C

Nakon što se premjeste kutije E i F, uzima se ili kutija C ili kutija D. Ako se uzme kutija C, nakon nje se mogu uzeti ili D ili A. Ako se uzme kutija D, iza nje se mogu uzeti ili kutija C ili kutija D. Odnosno, kutija B ne može se uzeti prije D, pa se ne može smjestiti ispod D. Zato je jedino nemoguće složiti hrpu C.

8. [Slovačka] Sobe u hotelu numerirane su brojevima uzlazno, počevši od 1. Nijedan broj nije izostavljen. Brojeći znamenke na brojevima svih soba, Kanga je znamenku 2 izbrojio 14 puta, a znamenku 5 izbrojio je 3 puta. Koji je najveći broj sobe u tom hotelu?

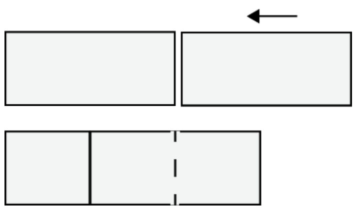
A) 25 B) 26 C) 34 D) 35 E) 41

Rješenje: C

S četrnaest znamenki 2 numerirane mogu biti sobe 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 i 32. Prvi sljedeći broj koji ima znamenku 2 je broj 42. Soba s tim brojem ne postoji jer bi u suprotnome Kanga izbrojio barem 15 znamenaka 2. Dakle, soba ima manje od 42. S tri znamenke 5 mogu se numerirati sobe 5, 15 i 25. Prvi sljedeći broj koji ima znamenku 5 je 35, a budući da je Kanga izbrojio znamenku 5 tri puta, ovaj hotel nema sobu broj 35. Dakle, hotel ima manje od 35 soba. To znači da je soba 34 numerirana najvećim brojem, odnosno rješenje je C.

Pitanja za 4 boda:

9. [Norveška] Dva sukladna pravokutnika, svaki površine 18, stavljena su djelomično jedan preko drugoga tako da tvore novi pravokutnik, kao što je prikazano na slici. Novi pravokutnik može se podijeliti na tri sukladna kvadrata. Kolika je površina novog pravokutnika?

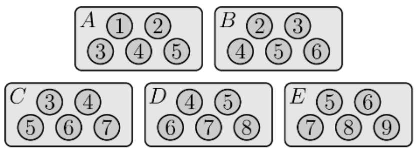


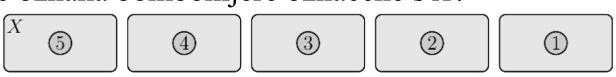
A) 24 B) 27 C) 30 D) 32 E) 36

Rješenje: B

Ukupna površina tih dvaju pravokutnika je 36. Kad se preklope, čine tri sukladna kvadrata pa je preklopljeni dio pola pravokutnika i površina mu je 9. Stoga je ukupna površina novog pravokutnika za 9 manja od površine dvaju početnih, tj. 36 – 9 = 27. Rješenje je B.

10. [Grčka] Zoran ima pet bombonijera označenih s *A, B, C, D, E*. Čokoladice u bombonijeri označene su brojevima, ovisno o okusu, kako je prikazano. Iz svake je bombonijere pojeo sve čokoladice osim jedne, a slika ispod prikazuje što je ostalo. Koja je oznaka bombonijere označene s *X*?





A) *A* B) *B* C) *C* D) *D* E) *E*

Rješenje: E

Označimo preostale bombonijere redom *Y, Z, W, U.*

Jedino bombonijera A sadrži čokoladicu okusa 1, pa je $U = A$.

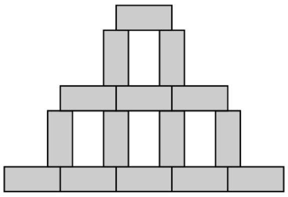
Bombonijere A i B sadrže čokoladicu okusa 2, no kako je $U = A$, onda je $W = B$.

Bombonijere A, B i C sadrže čokoladicu okusa 3, no kako je $U = A$ i $W = B$, onda je $Z = C$.

Bombonijere A, B, C i D sadrže čokoladicu okusa 4, no kako je $U = A$, $W = B$ i $Z = C$, onda je $Y = D$.

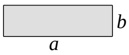
Dakle, $X = E$, tj. rješenje je E.

11. [Malezija] Goran je nacrtao nekoliko sukladnih pravokutnika i dobio prikazanu sliku. Širina slike je 45 cm, a visina 30 cm. Kolika je površina jednog pravokutnika?



A) 24 cm^2 B) 27 cm^2 C) 30 cm^2 D) 33 cm^2 E) 36 cm^2

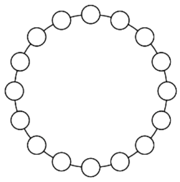
Rješenje: E



Ako je širina pravokutnika a, a visina b, vrijedi $5a = 45$ jer je širina slike jednaka ukupnoj širini pet pravokutnika. Zato je $a = 9$ cm.

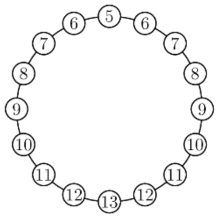
Također je $2a + 3b = 30$ jer je visina slike jednaka kao i dvije širine i tri visine pravokutnika. Zato je $3b = 12$, odnosno $b = 4$ cm. Površina pravokutnika je $9 \cdot 4 = 36$ cm^2. Rješenje je E.

12. [Grčka] Svaki od 16 prikazanih krugova sadrži jedan broj. Brojevi u susjednim krugovima razlikuju se za 1. Jedan od krugova sadrži broj 5, a jedan broj 13. Koliko je različitih brojeva napisano u tih 16 krugova?



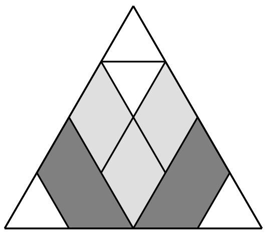
A) 9 B) 10 C) 13 D) 14 E) 16

Rješenje: A



Između 5 i 13 ima sedam prirodnih brojeva, što je ujedno i broj krugova između proizvoljnog kruga na slici i njemu dijametralno suprotnog. Stoga tih sedam krugova mora sadržavati brojeve 6, 7, 8, 9, 10, 11 i 12. No zbog simetrije preostalih sedam krugova sadrže iste te brojeve pa su u krugovima brojevi 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 i 13, što je devet različitih brojeva. Rješenje je A.

13. [Hrvatska] Jednakostraničan trokut popločan je s četiri sukladna trokuta, dva sukladna trapeza i tri sukladna romba. Koja je tvrdnja istinita?



A) Svijetlo siva je površina najveća. B) Tamno siva je površina najveća.

C) Svijetlo siva i tamno siva površina su jednake. D) Bijela je površina pola tamno sive.

D) Bijela je površina pola svijetlo sive.

Rješenje: C

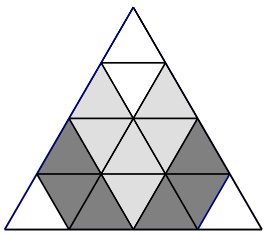
Podijelimo rombove na dva sukladna trokuta, a trapeze na tri sukladna trokuta.

Sada je zadani trokut popločan sa 16 sukladnih jednakostraničnih trokuta.

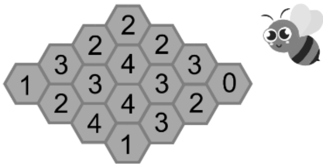
Bijela površina popločana je s 4 takva trokuta, svijetlo siva sa 6, a tamno siva također sa 6.

Jedina istinita tvrdnja je „Svijetlo siva i tamno siva površina su jednake“.

To znači da je rješenje C.

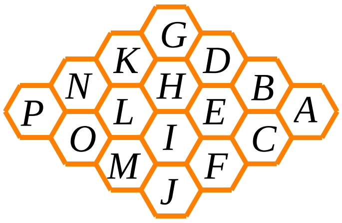


14. [Turska] Na slici je prikazano saće sa 16 ćelija. Neke od njih sadrže med. Broj u svakoj ćeliji pokazuje koliko njezinih susjednih ćelija sadrži med. Ćelije su susjedne ako imaju zajednički brid. Koliko ćelija u tome saću sadrži med?

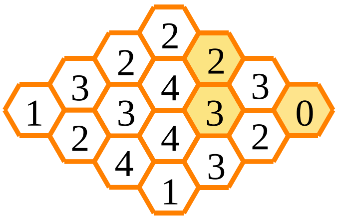


A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

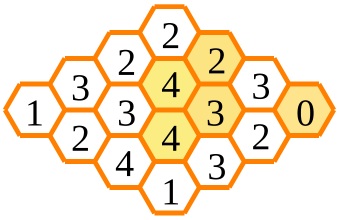
Rješenje: C



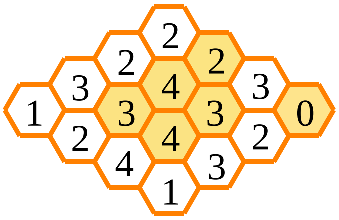
Označimo ćelije redom od *A* do *P*. U ćeliji *A* je 0, što znači da ćelije *B* i *C* ne sadrže med.
Kako *C* ne sadrži med, a tri susjedne ćelije od *B* sadrže, onda ćelije ***A*, *D*** i ***E*** sadrže med.



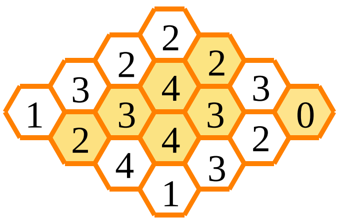
Dvije ćelije susjedne ćeliji *C* sadrže med, a to su *A* i *E*, pa *F* ne sadrži med.
Ćelija *D* sadrži med, a tri ćelije susjedne *E* sadrže, pa su to (uz *D*) još ćelije ***H*** i ***I***.



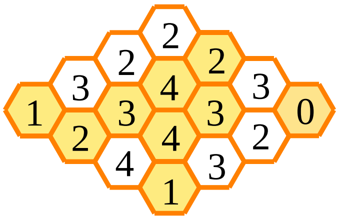
Sad zaključujemo da *G* ne sadrži med jer su dvije ćelije susjedne *D* koje sadrže med *E* i *H*. Na isti način zaključujemo za ćelije susjedne *G* pa *K* ne sadrži med jer *H* i *D* sadrže. To znači da ***L*** sadrži med jer četiri susjedne *H* sadrže med.



Kako *L* i *H* sadrže med, onda ga *N* ne sadrži jer dvije susjedne *K* sadrže med, a to su *L* i *H*.
Kako jedna susjedna *P* sadrži med, to može biti samo ***O***. Također, kako jedna susjedna *J* sadrži med, onda ga *M* ne sadrži.

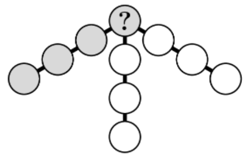


Četiri susjedne *M* sadrže med, pa i ***J*** sadrži med. Konačno, dvije susjedne *O* sadrže med, pa je to (uz *L*) ćelija ***P***.



Ukupno devet ćelija sadrži med pa je rješenje C.

15. [Grčka] Sanja želi smjestiti brojeve od 1 do 10, po jedan u svaki krug na prikazanoj slici. Brojeve će smjestiti tako da zbroj brojeva u četiri kruga koja su na istoj dužini, npr. u sivim krugovima, bude jednak 23. Koji broj treba upisati u krug označen upitnikom?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

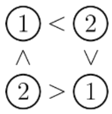
Rješenje: D

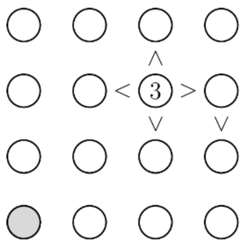
Zbroj svih brojeva upisanih u krugove je $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$. Kako je zbroj brojeva u četiri kruga na istoj dužini 23, zbrojimo ih na sve tri dužine i dobijemo $3 \cdot 23 = 69$. No, time smo broj u zajedničkome krugu zbrojili tri puta pa dodatna dva broja iznose $(69 - 55) : 2 = 14 : 2 = 7$.

Pokažimo još i primjer jednog popunjavanja prema zadanim uvjetima: $7 + 1 + 6 + 9 = 7 + 3 + 5 + 8 = 7 + 2 + 4 + 10$.

Rješenje je D.

16. [Norveška] Sonja želi dovršiti prikazanu slagalicu tako da u svakome retku i u svakom stupcu budu upisani brojevi 1, 2, 3 i 4, svaki točno jednom. Brojeve će smjestiti tako da istaknuti simboli uređaja < i > daju točan odnos vrijednosti u krugovima između kojih su postavljeni kao na primjer:





Koji će broj upisati u sivi krug?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 2 ili 3

Rješenje: A

Kako je desno od 3 manji broj, a ispod tog broja također manji, jedina je mogućnost da je desno od 3 broj 2, a ispod 2 broj 1. Kako je lijevo od 3 manji broj, a desno smo već upisali 2, onda je jedina mogućnost da je lijevo broj 1. U nizu tablica prikazan je način popunjavanja uz uvjet da su u svakome retku i svakom stupcu brojevi 1, 2, 3 i 4, a svaki je zapisan samo jednom.

		3	2
			1

4	1	3	2
			1

		1	
4	1	3	2
		2	1
		4	

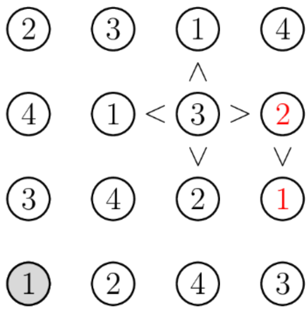
		1	4
4	1	3	2
		2	1
		4	3

		1	4
4	1	3	2
3	4	2	1
		4	3

	3	1	4
4	1	3	2
3	4	2	1
	2	4	3

2	3	1	4
4	1	3	2
3	4	2	1
1	2	4	3

U sivi krug treba upisati broj 1 pa je rješenje A.



Pitanja za 5 bodova:

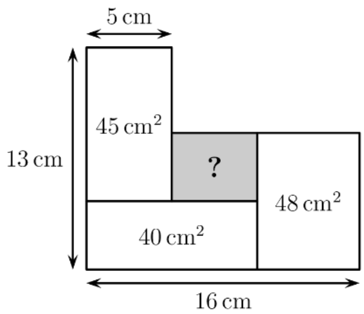
17. [Slovačka] Tri identične kocke postavljene su na stol. Koliki je zbroj svih brojeva na stranama koje dotiču stol?

A) 26 B) 40 C) 43 D) 47 E) 56

Rješenje: C

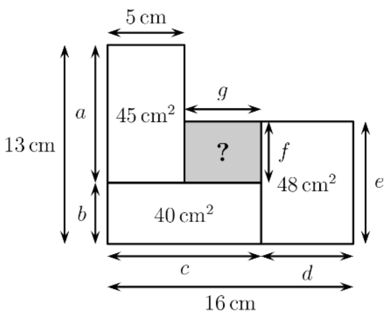
Ako na prvoj kocki pogledamo broj 22 iz perspektive kako ga zapisujemo, vidimo da je „desno“ pozicioniran broj 34. Na trećoj kocki vidimo da je „lijevo“ od 22 broj 13 pa je on nasuprot broju 34. Kad pogledamo broj 13 na drugoj kocki iz perspektive kako ga zapisujemo, iznad je broj 5. To znači da je nasuprot broju 5 broj 22. Ostaje odrediti broj koji je nasuprot broju 17. To je jedini preostali broj, broj 8. Traženi zbroj je 13 + 22 + 8 = 43. Rješenje je C.

18. [Mianmar] Na slici su četiri pravokutnika koji se međusobno dodiruju. Kolika je površina osjenčanog pravokutnika?



A) 12 cm^2 B) 14 cm^2 C) 16 cm^2 D) 18 cm^2 E) 20 cm^2

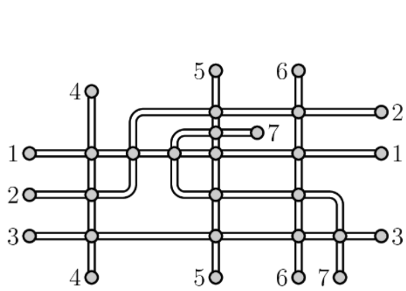
Rješenje: E



Iz pravokutnika površine 45 cm^2 dobijemo a = 45 : 5 = 9 cm. Onda je b = 13 – 9 = 4 cm. Sada iz pravokutnika površine 40 cm^2 dobijemo c = 40 : 4 = 10 cm. Onda je d = 16 – 10 = 6 cm. Iz pravokutnika površine 48 cm^2 zatim dobijemo e = 48 : 6 = 8 cm. Sada je f = 8 – 4 = 4 cm. Konačno, g = 16 – 5 – 6 = 5 cm pa je površina osjenčanog pravokutnika 5 · 4 = 20 cm^2.

Rješenje je E.

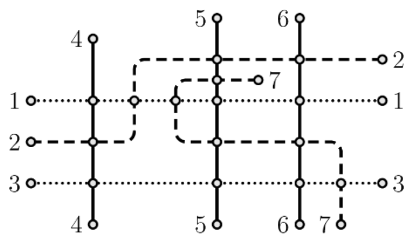
19. [Grčka] Na slici je prikazan plan sedam željezničkih linija jednoga manjeg grada. Stanice su označene krugovima. Mea želi obojiti linije tako da one koje imaju zajedničku stanicu budu obojene različitim bojama. S koliko najmanje različitih boja to može napraviti?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

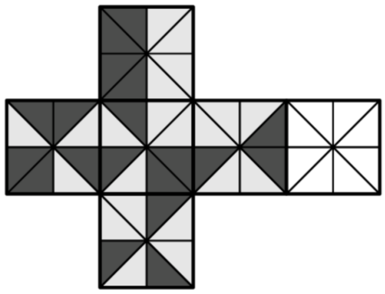
Rješenje: A

Promotrimo linije 1, 2 i 4. Svaka od njih ima zajedničku stanicu s preostale dvije. To znači da nam ukupno trebaju najmanje tri različite boje. Označimo te linije na crtežu s tri različite crte. Pokažimo sada da je to ujedno i dovoljan broj za obojiti ostale linije. Npr. linija 6 ima zajedničku stanicu s 1 i 2, stoga je obojimo istom bojom kao i liniju 4. Isto vrijedi za liniju 5.



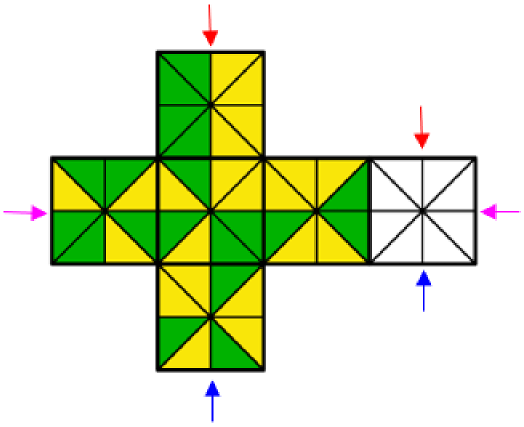
Liniju 7 možemo obojiti istom bojom kao i 2, a liniju 3 bojom linije 1. Dakle, trebaju nam najmanje tri različite boje.
Rješenje je A.

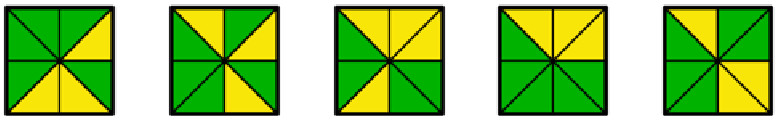
20. [Njemačka] Od dane mreže Matija želi složiti kocku tako da trokuti koji dodiruju zajednički brid svake dvije strane kocke budu jednako osjenčani. Koji od kvadrata može biti neosjenčani dio mreže da bi složio takvu kocku?



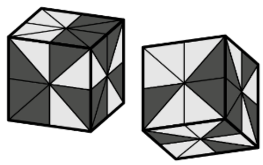
A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: B
Obojimo mrežu kako bismo jednostavnije uočili rješenje i označimo strelicama istih boja bridove koji se spajaju.





Uočimo da je rješenje drugi kvadrat slijeva, pri čemu se bridovi označeni crvenim i plavim strelicama spajaju zrcalno. Rješenje je B.



21. [Katalonija] Baka je za svoje unuke kupila bombone. Podijelila ih je tako da je svako unuče dobilo vrećicu s istim brojem bombona. U vrećice je stavila najveći mogući broj bombona. Kad je bila gotova, vidjela je da je u svakoj vrećici 20 bombona, a da joj je 12 bombona ostalo. Koji je najmanji mogući broj bombona imala baka?

A) 52 B) 232 C) 272 D) 411 E) 432

Rješenje: C
Budući da je baki ostalo 12 bombona, broj unučadi mora biti veći od 12. Kako tražimo najmanji mogući broj bombona, to će biti u slučaju kad je broj unučadi najmanji moguć, a to je 13. Budući da se u svakoj vrećici nalazi 20 bombona, baka je mogla imati najmanje $13 \cdot 20 + 12 = 272$ bombona. Rješenje je C.

22. [Izrael] Nevio planira razrezati uže na 12 jednakih dijelova pa označava mjesta na kojima treba prerezati uže. Ilko planira prerezati isto uže na 16 jednakih dijelova pa također označava mjesta na kojima to treba učiniti. Potom Ljiljana reže uže na označenim mjestima. Koliko je dijelova užeta dobila Ljiljana?

A) 24 B) 25 C) 27 D) 28 E) 29

Rješenje: A
Budući da planira rezati uže na 12 jednakih dijelova, Nevio je označio svaku dvanaestinu pomoću 11 oznaka. No Ilko planira rezati uže na 16 jednakih dijelova pa je označio svaku šesnaestinu pomoću 15

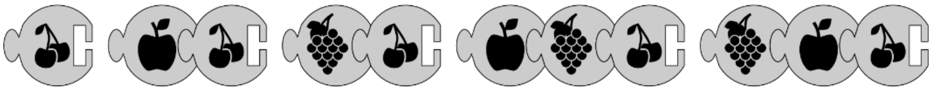
oznaka. Na tri su mjesta obojica stavila oznake jer je $\frac{3}{12}=\frac{4}{16}$, $\frac{6}{12}=\frac{8}{16}$ i $\frac{9}{12}=\frac{12}{16}$. To znači da je Ljiljana rezala uže na 11 + 15 – 3 = 23 mjesta, čime je dobila 24 dijela užeta. Rješenje je A.

23. [Njemačka] Iva se igra sa sedam dijelova prikazane slagalice. Želi složiti gusjenicu s jednom glavom, jednim repom i jednim, dva ili tri dijela između. Koliko različitih gusjenica može složiti? Iva ne smije zakretati dijelove.

A) 10 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Rješenje: E

Glavu gusjenice Iva može odabrati na 2 različita načina. Isto tako, rep može odabrati na 2 različita načina. Dakle, glavu i rep gusjenice može odabrati na 4 različita načina. Za svaki od tih odabira tijelo gusjenice može složiti na 5 različitih načina, a to su



To znači da može složiti 4 · 5 = 20 različitih gusjenica. Rješenje je E.

24. [Katalonija] Dora je na ploču zapisala troznamenkasti broj. Potom je Drago dopisao četvrtu znamenku, desno od broja, i rekao Dori: „Gle, broj se povećao za 2024.“ Koju je znamenku dopisao Drago?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 9

Rješenje: D

Dora je zapisala broj $\overline{abc}$, a kad je Drago dopisao znamenku, dobio je $\overline{abcd}$.

Kako se prvi broj povećao za 2024, vrijedi $\overline{abcd}-\overline{abc}=2024$.

To znači da je $1000a+100b+10c+d-100a-10b-c=2024$, tj. $9(100a+10b+c)=2024-d$.

Broj 9 dijeli lijevu stranu pa dijeli i desnu stranu. Broj 9 dijeli 2024 – *d* samo ako je znamenka *d* jednaka 8. Drago je dopisao znamenku 8. Rješenje je D.

Obavijesti o rješenjima zadataka i rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2024/