MATEMATIČKI KLOKAN 2024.

RJEŠENJA ZADATAKA

J

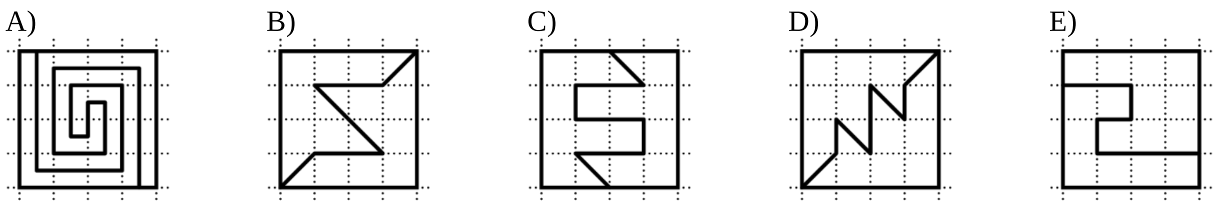
Pitanja za 3 boda:

1. [Uganda] Odredi vrijednost izraza $\frac{2 \cdot 0.24}{20 \cdot 2.4}$.

A) 0.01 B) 0.1 C) 1 D) 10 E) 100

Rješenje: A
$\frac{2 \cdot 0.24}{20 \cdot 2.4} = \frac{2 \cdot 0.24}{200 \cdot 0.24} = \frac{1}{100} = 0.01$

2. [Švicarska] Koji je od danih kvadrata podijeljen na dva dijela koja **nemaju** isti oblik?



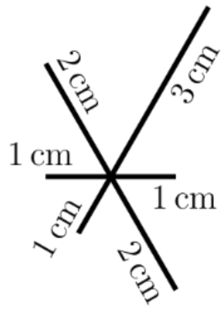
Rješenje: E

3. [Austrija] Igra skakanja izvodi se tako da igrač skače po jednom u svaki kvadrat, izmjenjujući lijevu nogu – obje noge – desnu nogu – obje noge – lijevu nogu – obje noge itd., kao što je prikazano na slici.
Maja je igrajući tu igru skočila u točno 48 kvadrata počevši skokom na lijevu nogu.
Koliko je puta tijekom igre njena lijeva noga dodirnula tlo?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 40 E) 48

Rješenje: C
Majina lijeva noga na tlu je u tri od četiri uzastopna skoka. Stoga će ukupno $\frac{3}{4} \cdot 48 = 36$ puta dodirnuti tlo.

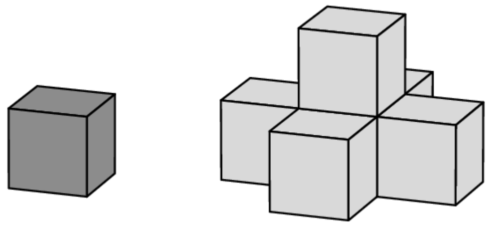
4. [Njemačka] Toma želi nacrtati prikazani crtež bez podizanja olovke s papira. Koja je najkraća udaljenost koju mora prijeći olovkom kako bi to učinio? Na slici su dane duljine dužina. Svoj crtež može započeti gdje god želi.



A) 14 cm B) 15 cm C) 16 cm D) 17 cm E) 18 cm

Rješenje: B
Najmanju će udaljenost prijeći ako počne na vanjskom kraju dužine duljine 3 cm, a završi na vanjskom kraju dužine duljine 2 cm (ili obrnuto). Udaljenost koju prijeđe tada je: $3 + 2 \cdot (1 + 2 + 1 + 1) + 2$ cm, tj. 15 cm.

5. [Brazil] Ivan izrađuje niz struktura na stolu. Počeo je s jednom kockom. Sljedeću strukturu izrađuje tako da dodaje 5 kocaka koje prikrivaju sve vidljive strane početne kocke, kao na slici. Koji je najmanji broj kocaka potreban kako bi se prekrile sve vidljive strane druge strukture?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 13 E) 19

Rješenje: D

Potrebno mu je 5 kocaka koje će prekriti gornju kocku (1 gore i 4 bočno) te 8 kocaka koje će prekriti sve strane donjeg kata strukture.

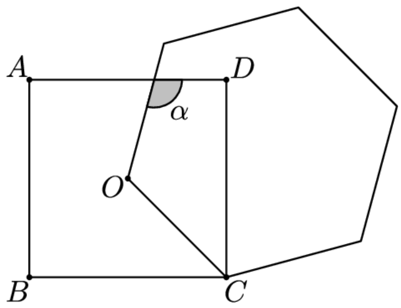
6. [Španjolska] Troznamenkasti palindrom broj je oblika aba, gdje su a i b znamenke (mogu biti jednake ili različite). Odredi zbroj znamenaka najvećeg troznamenkastog palindroma djeljivog brojem 6.

A) 16 B) 18 C) 20 D) 21 E) 24

Rješenje: E

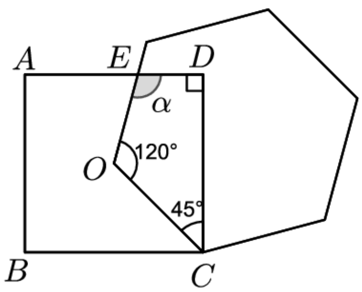
Kako bi broj bio djeljiv sa 6, on mora biti djeljiv s 2 i s 3. Broj je djeljiv s 2 ako mu je znamenka jedinica paran broj. Najveća parna znamenka je 8 pa je $a = 8$. Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3. Najveća znamenka za koju će $8 + b + 8$ biti djeljivo s 3 je $b = 8$. Traženi broj je 888, a zbroj njegovih znamenaka je 24.

7. [Katalonija] Martin je nacrtao kvadrat $ABCD$ i pravilan šesterokut stranice $\overline{OC}$, gdje je O sjecište dijagonala kvadrata (vidi sliku). Odredi mjeru kuta α.



A) 105° B) 110° C) 115° D) 120° E) 125°

Rješenje: A



Pogledaj sliku. U četverokutu $OCDE$ znamo da je kut kod vrha D pravi, kut kod vrha C iznosi 45° (kut između stranice kvadrata i njegove dijagonale), a kut kod vrha O iznosi 120° (unutarnji kut pravilnog šesterokuta).

Onda je $\alpha = 360° - 90° - 45° - 120° = 105°$.

8. [Mianmar] Ardal je ogradio zemljište oblika pravokutnika s 40 m ograde. Duljine stranica zemljišta izražene u metrima prosti su brojevi. Koja je najveća moguća površina Ardalovog zemljišta?

A) 99 m^2 B) 96 m^2 C) 91 m^2 D) 84 m^2 E) 51 m^2

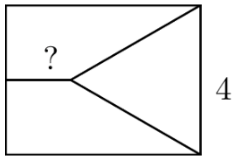
Rješenje: C

Opseg zemljišta jednak je duljini ograde: $2(a + b) = 40$, tj. $a + b = 20$. Kako su a i b prosti brojevi, imamo samo dvije mogućnosti za dimenzije zemljišta: 3×17 ili 7×13.

Najveća moguća površina stoga je $7 \cdot 13 = 91$ m^2.

Pitanja za 4 boda:

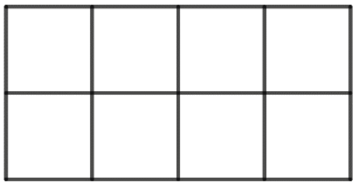
9. [Nizozemska] Pravokutnik je podijeljen na tri dijela jednakih površina. Jedan je dio jednakostraničan trokut stranice duljine 4 cm, a druga su dva dijela trapezi, kao na slici. Kolika je duljina kraće osnovice trapeza?



A) $\sqrt{2}$ cm   B) $\sqrt{3}$ cm   C) $2\sqrt{2}$ cm   D) 3 cm   E) $2\sqrt{3}$ cm

Rješenje: B
Visina jednakostraničnog trokuta duljine je $v = 2\sqrt{3}$. Površina jednakostraničnog trokuta iznosi $4\sqrt{3}$. Površina pravokutnika tri je puta veća, tj. iznosi $12\sqrt{3}$. Dulja stranica pravokutnika onda je duljine $a = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$. Duljina kraće osnovice trapeza onda je $a - v = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

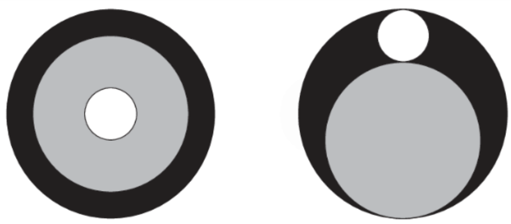
10. [Češka] Jelena upisuje slova A, B, C i D u prikazanu 2×4 tablicu. U svaku kućicu upisuje točno jedno slovo. Želi tablicu popuniti tako da se svako od četiri slova pojavljuje točno jednom u svakom retku i u svakom 2×2 kvadratu. Na koliko načina to može učiniti?



A) 12   B) 24   C) 48   D) 96   E) 198

Rješenje: B
Četiri slova A, B, C i D Jelena može u prvi red razmjestiti kako god želi. Za to postoji $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina (bilo koje od 4 slova upisuje u prvu kućicu, bilo koje od 3 preostala slova u drugu kućicu, jedno od preostala 2 slova u treću kućicu i jedino preostalo slovo u četvrtu kućicu).
Pogledajmo sada drugu kućicu drugog reda. U nju moramo upisati isto slovo kao u četvrtoj kućici prvog reda (inače bi se ponavljala slova u 2×2 kvadratima). I ostatak drugog reda jedinstveno je određen rasporedom slova u prvome redu. Jelena tablicu može popuniti na 24 načina.

11. [Brazil] Sanjin je od tri različita papira u boji izrezao tri kruga. Postavio ih je jedan na drugi kao na lijevoj slici. Zatim je premjestio krugove tako da se svaka dva kruga dodiruju u jednoj točki, kao na desnoj slici.
Na lijevoj je slici površina vidljivog crnog dijela sedam puta veća od površine bijelog kruga.
Koliki je omjer površina vidljivog crnog dijela na ove dvije slike?



A) $3 : 1$ B) $4 : 3$ C) $6 : 5$ D) $7 : 6$ E) $9 : 7$

Rješenje: D
Označimo površine crnog, sivog i bijelog izrezanog kruga redom s c, s i b. Na lijevoj je slici površina vidljivog crnog dijela $c - s = 7b$. Na desnoj je slici onda površina vidljivog crnog dijela $c - s - b = 7b - b = 6b$. Traženi omjer iznosi $7b : 6b = 7 : 6$.

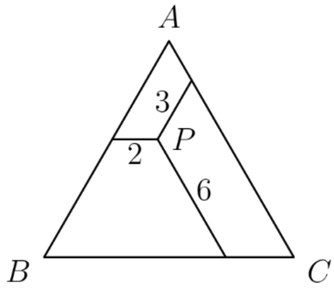
12. [Mađarska] Marijina kći upravo je rodila kćer. Za dvije će godine umnožak dobi Marije, njezine kćeri i njezine unuke iznositi 2024. I Marija i njezina kći imaju paran broj godina. Koliko godina Marija ima danas?

A) 42 B) 44 C) 46 D) 48 E) 50

Rješenje: B

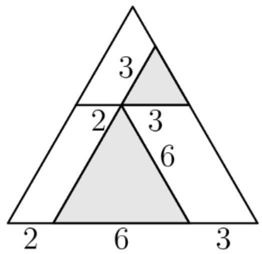
Za dvije godine Marijina će unuka imati dvije godine. Označimo Marijinu dob za dvije godine s $2m$, a dob njezine kćeri za dvije godine s $2k$ (obje imaju paran broj godina i $m > k$).
Tada vrijedi $2 \cdot (2k) \cdot (2m) = 2024$, tj. $k \cdot m = 253 = 11 \cdot 23$.
Zaključujemo da je $m = 23$, tj. $2m = 46$, pa Marija danas ima 44 godine.

13. [Grčka] Unutar jednakostraničnog trokuta odabrana je točka P. Iz točke P konstruiramo tri dužine paralelne sa stranicama trokuta, kao na slici. Ti segmenti su duljina 2 m, 3 m i 6 m. Koliki je opseg trokuta ABC?



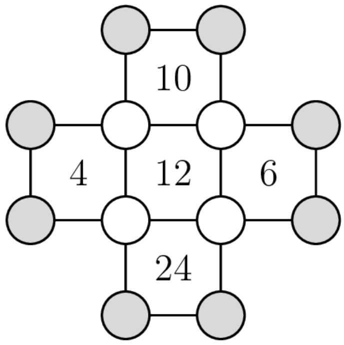
A) 22 m B) 26 m C) 33 m D) 39 m E) 44 m

Rješenje: C



Produljimo li dvije od dužina preko točke P, možemo uočiti jednakostranične trokute i paralelograme (vidi sliku) koji nas dovode do duljine stranice početnog trokuta: $2 + 6 + 3 = 11$ m.
Opseg trokuta je stoga 33 m.

14. [Grčka] U svaki od 12 krugova na slici upisan je jedan prirodan broj. U svaki kvadrat upisan je umnožak brojeva u njegovim vrhovima. Odredi umnožak osam brojeva koji se nalaze u sivim krugovima.

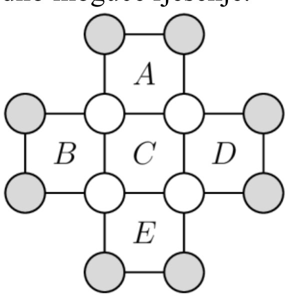


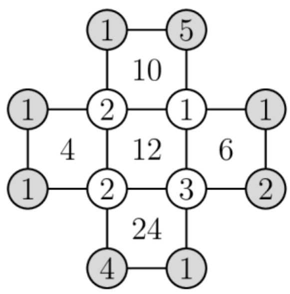
A) 20 B) 40 C) 80 D) 120 E) 480

Rješenje: B

Označimo umnoške upisane unutar kvadrata s A, B, C, D i E kao na lijevoj slici. U umnošku $ABDE$ svaki od brojeva u sivim krugovima pojavljuje se jednom, a svaki od brojeva u bijelim krugovima dva puta. Umnožak osam brojeva koji se nalaze u sivim krugovima stoga će biti $\frac{ABDE}{C^2} = 40$.

Na desnoj slici prikazano je jedno moguće rješenje.





15. [Katalonija] Filip ima n^3 $(n > 2)$ identičnih kockica. Od njih je napravio veliku kocku čiju je površinu zatim obojio. Broj kockica kojima je obojena samo jedna strana jednak je broju kockica kojima ni jedna strana nije obojena. Koliko iznosi n?

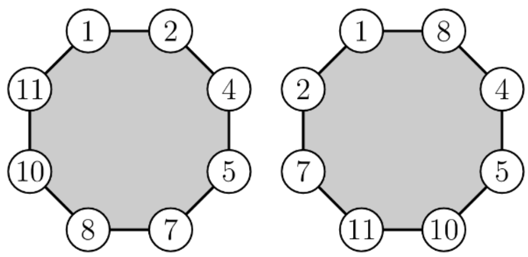
A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

Rješenje: D
Na svakoj strani velike kocke nalazi se $(n-2)^2$ kockica koje su obojene samo s jedne svoje strane, dakle ukupno ih je $6(n-2)^2$. Unutar velike kocke nalazi se $(n-2)^3$ kockica kojima ni jedna strana nije obojena. Iz jednakosti $6(n-2)^2 = (n-2)^3$ proizlazi da je $6 = n - 2$, tj. $n = 8$.

16. [Grčka] Kristina ima 12 karata numeriranih od 1 do 12. Po jednu kartu stavlja u svaki vrh osmerokuta na način da zbroj brojeva na kartama koje leže na istoj stranici bude višekratnik broja 3. Koje brojeve Kristina nije iskoristila?

A) 1, 5, 9, 12 B) 3, 5, 7, 9 C) 1, 2, 11, 12 D) 5, 6, 7, 8 E) 3, 6, 9, 12

Rješenje: E
Ako je u jednom vrhu višekratnik broja 3, onda bi u svim vrhovima osmerokuta trebao biti višekratnik broja 3. Kako na raspolaganju imamo samo četiri višekratnika broja 3, to nije moguće. Brojeve 3, 6, 9 i 12 stoga ćemo izbaciti.
Dva moguća rješenja prikazana su na slici.



Pitanja za 5 bodova:

17. [Grčka] Rastav broja $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ na proste faktore oblika je kao na slici. Prosti faktori zapisani su u rastućem poretku. Tinta je prekrila neke faktore i neke eksponente. Koji je eksponent na broju 17?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C
Najveći faktor koji se pojavljuje u rastavu $n!$ na proste faktore je 47 pa možemo zaključiti da je $47 \leq n < 53$ (inače bi se u rastavu nalazio sljedeći prosti broj 53). Broj 13 pojavljuje se u rastavu četiri puta, što znači da se u broju $n!$ pojavljuju točno četiri višekratnika broja 13. To su brojevi 13, 26, 39 i 52 pa možemo zaključiti da je $n = 52$. Postoje tri višekratnika broja 17 koji su manji ili jednaki broju 52 (to su 17, 34 i 51) pa je eksponent na broju 17 jednak 3.

18. [Mađarska] Karlo naizmjenice po danima ili stalno laže ili stalno govori istinu. Jedan je dan izgovorio četiri od pet danih izjava. Koju izjavu nije mogao izgovoriti taj dan?

A) Lagao sam jučer i lagat ću sutra.

B) Govorim istinu danas i govorit ću istinu sutra.

C) Broj 2024 djeljiv je brojem 11.

D) Jučer je bila srijeda.

E) Sutra će biti subota.

Rješenje: C
Izjavu B Karlo može izgovoriti samo ako taj dan laže. Izjave D i E ne mogu obje biti istinite. Stoga imamo barem dvije lažne izjave. Karlo je taj dan lagao. U tom slučaju nije mogao izgovoriti izjavu C.

19. [Rusija] Zbroj znamenaka broja N tri je puta veći od zbroja znamenaka broja $N+1$. Koji je najmanji mogući zbroj znamenaka broja N?

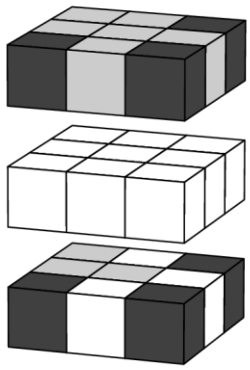
A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 27

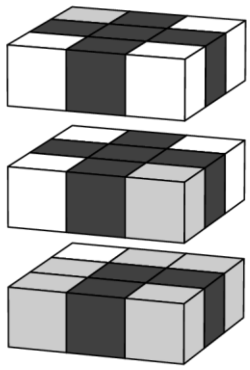
Rješenje: B
Zbroj znamenaka će se dodavanjem broja 1 smanjiti samo ako je posljednja znamenka broja N jednaka 9. U tom će slučaju posljednja znamenka broja $N+1$ biti 0, a pretposljednjoj se znamenki dodaje broj 1 pa se zbroj znamenaka smanjuje za 8 u usporedbi s brojem N. Označimo li zbroj znamenaka broja N s x, imamo $x = 3(x-8)$, iz čega proizlazi da je $x = 12$.
Ako broj N sadržava više od jedne znamenke 9, zbroj njegovih znamenaka je najmanje 18, što je već veće od 12. Broj za koji vrijedi opisano svojstvo je 39.

20. [Austrija] Jana ima crne, sive i bijele jedinične kocke. Iskoristit će njih 27 kako bi napravila kocku $3 \times 3 \times 3$. Želi da trećina površine te kocke bude crne, trećina sive, a trećina bijele boje. Označimo s A najmanji mogući broj crnih kockica kojima to može postići, a s B najveći mogući broj crnih kockica kojima to može postići. Koliko iznosi $B - A$?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 7 E) 9

Rješenje: D
Oplošje velike kocke bit će $6 \cdot 3^2 = 54$. Površina prekrivena pojedinom bojom treba biti jednaka 18.
Najmanji broj crnih kockica postići ćemo tako da postavimo njih 6 u vrhove velike kocke, dakle $A = 6$. Moguće rješenje dano je na lijevoj slici.
Najveći broj crnih kockica postići ćemo tako da jednu postavimo u sredinu velike kocke (njena se površina ne vidi), po jednu u sredinu svake od 6 strana velike kocke (svakoj se vidi jedna strana) te još njih 6 na brid (ne u vrh, tako se svakoj vide dvije strane). Dakle, $B = 13$. Moguće rješenje dano je na desnoj slici.
Odgovor je stoga $B - A = 7$.





21. [Katalonija] Ana je 24 puta bacila igraću kocku. Svaki se broj od 1 do 6 pojavio barem jednom. Broj 1 pojavio se više puta nego ijedan drugi broj. Ana je zbrojila sve dobivene brojeve. Zbroj koji je dobila bio je najveći mogući. Koji je zbroj dobila?

A) 83 B) 84 C) 89 D) 90 E) 100

Rješenje: D
Kako se svaki broj pojavio barem jednom, sigurni smo da zbroj u 6 bacanja iznosi $1+2+3+4+5+6 = 21$.
Razmotrimo preostalih 18 bacanja. Broj 1 pojavio se više puta nego ijedan drugi broj. Kako bismo postigli najveći mogući zbroj, broj 6 trebao bi se pojaviti jedan put manje od broja 1.
Ako se broj 1 pojavio 9 puta, najveći zbroj će biti $9 \cdot 1 + 8 \cdot 6 + 1 \cdot 5 = 62$.
Ako se broj 1 pojavio 8 puta, najveći zbroj će biti $8 \cdot 1 + 7 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 65$.
Ako se broj 1 pojavio 7 puta, najveći zbroj će biti $7 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = 68$.
Ako se broj 1 pojavio 6 puta, najveći zbroj će biti $6 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 69$. Ovaj rezultat dovodi nas do najvećeg mogućeg zbroja, 90.
Daljnje smanjivanje broja pojavljivanja jedinice ne povećava najveći mogući zbroj.

22. [Rusija] Olja se šetala parkom. Polovicu ukupnog vremena hodala je brzinom 2 km/h. Zatim je prehodala pola ukupnog puta brzinom 3 km/h. Do kraja šetnje hodala je brzinom 4 km/h. Koliki je dio ukupnog vremena hodala brzinom 4 km/h?

A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

Rješenje: A
Označimo vrijeme koje je Olji bilo potrebno da prehoda cijeli park s t, a vrijeme koje je hodala brzinom 4 km/h s x. Onda vrijeme koje je hodala brzinom 3 km/h iznosi $\frac{t}{2} - x$. Udaljenosti na ova tri dijela puta su ($s = v \cdot t$):

$s_1 = 2 \cdot \frac{t}{2} = t,$

$s_2 = 3 \cdot \left(\frac{t}{2} - x\right),$

$s_3 = 4 \cdot x.$

Znamo da je $s_2 = s_1 + s_3$, tj. $3 \cdot \left(\frac{t}{2} - x\right) = t + 4x$, iz čega slijedi da je $x = \frac{1}{14}t$.

23. [Turska] Alisa želi izbaciti neke cijele brojeve od 1 do 25, a zatim odvojiti preostale brojeve u dva skupa tako da umnožak brojeva unutar svakog skupa bude jednak. Koliko je najmanje brojeva Alisa mogla ukloniti?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

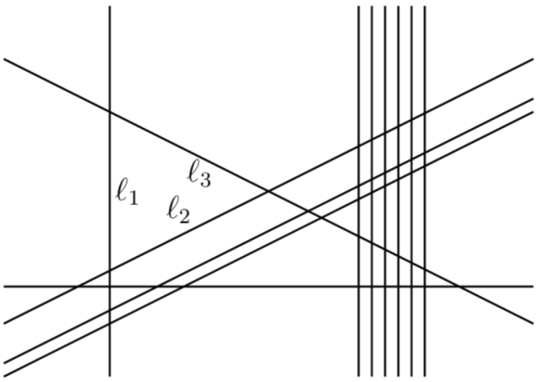
Rješenje: B
Umnožak brojeva unutar svakog skupa je isti pa njegov rastav na proste faktore također mora biti isti. Zato proste brojeve koji unutar skupa cijelih brojeva od 1 do 25 imaju neparan broj višekratnika treba ukloniti. To su brojevi 7, 13, 17, 19 i 23. Ostalih 20 brojeva može se odvojiti u dva skupa na željeni način, primjerice:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 25 = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$$

24. [Bjelorusija] Dano je n različitih pravaca $l_1, l_2, \ldots, l_n$ u ravnini. Pravac l_1 siječe točno 5 pravaca, pravac l_2 siječe točno 9 pravaca, a pravac l_3 siječe točno 11 pravaca. Koja je najmanja moguća vrijednost broja n?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Rješenje: B
Budući da jedan pravac siječe točno 11 pravaca, mora vrijediti $n \geq 12$.
Moguće je smisliti primjer s točno 12 pravaca. Uzmimo 7 međusobno paralelnih i još 3 međusobno paralelna pravca koji sijeku početnih 7. Trebaju nam još dva pravca koja se sijeku međusobno i sijeku prethodno nacrtanih 10 pravaca. Bilo koji od 7 međusobno paralelnih pravaca može biti l_1. Bilo koji od 3 međusobno paralelna pravca može biti l_2. Jedan od preostala dva pravca može biti l_3.



Obavijesti o rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2024/