Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da
skeniram knjižicu "Antje funkcija - Funkcija najveće cijelo" i objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR

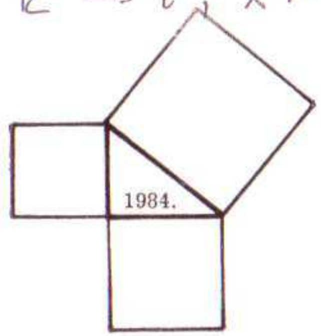
PITAGORINI MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE
25

Luka Čeliković:

ANTJE FUNKCIJA

$$[\ ] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto [x]$$

FUNKCIJA „NAJVEĆE CIJELO"
$\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$



Beli Manastir, 1990.

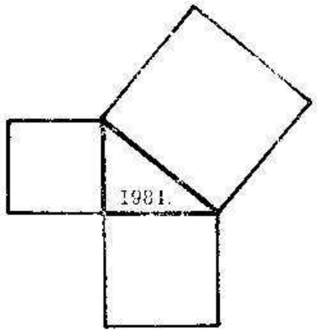
DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR

PITAGORINI MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE
25

Luka Čeliković:

ANTJE FUNKCIJA

$[\ ]: \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto [x]$



Beli Manastir, 1990.

Izdavač:
Društvo mladih matematičara »PITAGORA« Beli Manastir
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:
Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:
Branko Vujaklija

Tisak:
Grafičko poduzeće »Slovo« Beli Manastir

ANTJE FUNKCIJA

Definicija: Neka je $x \in R$. Tada $[x] \in Z$ zovemo najveći cijeli dio od x koji ne premašuje x, a $\{x\} = x - [x] \in [0,1)$ razlomljeni (decimalni) dio od x.

(Na primjer: $x = 3{,}8 \Rightarrow [x] = 3 \wedge \{x\} = 0{,}8$; $x = -5{,}6 \Rightarrow [x] = -6 \wedge \{x\} = 0{,}4$; $x = \pm 7 \Rightarrow [x] = \pm 7 \wedge \{x\} = 0$).

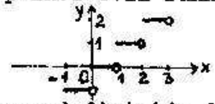
Kako su $[x]$ i $\{x\}$ definirani za svaki realan broj x, tada možemo definirati slijedeće funkcije:

$[\;]: R \to Z$, $x \mapsto [x]$ (antje funkcija, funkcija najveći cijeli dio),

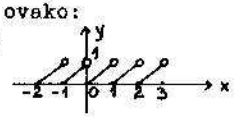
$\{\;\}: R \to [0,1)$, $x \mapsto \{x\}$ (funkcija razlomljeni dio).

Grafički prikaz ovih funkcija izgleda ovako:

$x \mapsto [x]$



$x \mapsto \{x\}$



Iz same definicije funkcija $x \mapsto [x]$ i $x \mapsto \{x\}$ proizlaze njihova svojstva. O tome govori slijedeći teorem:

Teorem 1: (a) $x = [x] + \{x\}$, $[x] = x - \{x\}$;

(b) $0 \leq \{x\} < 1$;

(c) $x - 1 < [x] \leq x$;

(d) $[x] \leq x < [x] + 1$;

(e) $[k + x] = k + [x]$, $k \in Z$;

(f) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$;

(g) $[x - y] \leq [x] - [y] \leq [x - y] + 1$;

(h) $[x] \cdot [y] \leq [xy] \leq [x][y] + [x] + [y]$, $x, y \in R^+$;

(i) $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$, $n \in N$;

(j) $\left[\sqrt{[x]}\right] = \left[\sqrt{x}\right]$, $x \in R_0^+$.

Dokaz:

(a) Neposredno slijedi iz definicije.

(b) ″ ″ ″ ″ .

(c) $x - 1 \overset{(a)}{=} [x] + \underbrace{\{x\} - 1}_{<0} \overset{(b)}{<} [x] \overset{(D)}{\leq} x \Rightarrow x - 1 < [x] \leq x$.

(d) $[x] \overset{(D)}{\leq} x \overset{(a)}{=} [x] + \underbrace{\{x\}}_{<1} \overset{(b)}{<} [x] + 1 \Rightarrow [x] \leq x < [x] + 1$.

(e) $k + x \overset{(a)}{=} k + ([x] + \{x\}) = (k + [x]) + \underbrace{\{x\}}_{<1} \overset{(D)}{\Rightarrow} [k + x] = k + [x]$, $k \in Z$

(f) $[x+y] \overset{(a)}{=} \left[[x] + \{x\} + [y] + \{y\}\right] \overset{(e)}{=} [x] + [y] + \underbrace{[\underbrace{\{x\} + \{y\}}_{<2}]}_{\leq 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

(g) $x = (x-y) + y \overset{(f)}{\Rightarrow} [x-y] + [y] \leq [x] \leq [x-y] + [y] + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x-y] \leq [x] - [y] \leq [x-y] + 1$.

(h) $[x]\cdot[y] \overset{(D)}{\leq} xy \overset{(d)}{<} ([x]+1)([y]+1) \Rightarrow$

$[x]\cdot[y] \leq xy \leq ([x]+1)([y]+1) - 1 = [x]\cdot[y] + [x] + [y] \Rightarrow$

$\Rightarrow [x]\cdot[y] \leq xy \leq [x]\cdot[y] + [x] + [y]$, $x, y \in R_0^+$.

(i) Prema teoremu o dijeljenju vrijedi:

$\forall [x] \in Z$, $\forall n \in N$, $\exists !\, q \in Z$, $\exists !\, r \in N_0$, $0 \leq r \leq n-1$, $[x] = nq + r$ $(*)$.

Odavde je $x \overset{(a)}{=} [x] + \{x\} \overset{(*)}{=} (nq+r) + \{x\} = nq + \underbrace{(r + \{x\})}_{\in [0,n)}$ $(**)$,

pa je $\left[\frac{x}{n}\right] \overset{(**)}{=} \left[\frac{nq+r+\{x\}}{n}\right] = \left[q + \frac{r+\{x\}}{n}\right] \overset{(e)}{=} q + \underbrace{\left[\frac{r+\{x\}}{n}\right]}_{<1} \overset{(D)}{=} q$.

Kako je i $\left[\frac{[x]}{n}\right] \overset{(*)}{=} \left[\frac{nq+r}{n}\right] = \left[q + \frac{r}{n}\right] = q + \underbrace{\left[\frac{r}{n}\right]}_{<1} \overset{(D)}{=} q$,

tada je $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$, $n \in N$.

(j) Neka je $n^2 \leq x < (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Tada je:

$n^2 \leq [x] + \{x\} < (n+1)^2$, $n^2 \leq [x] < (n+1)^2$, $n \leq \sqrt{[x]} < n+1$,

$\left[\sqrt{[x]}\right] = n$,

a s druge strane je $n \leq \sqrt{x} < n+1$, $[\sqrt{x}] = n$,

pa je $\left[\sqrt{[x]}\right] = [\sqrt{x}]$, $x \in R_0^+$.

<u>Zadatak 1</u>: Riješiti jednadžbu $\left[\frac{2x+2}{3}\right] = x$, $x \in R$.

Rješenje:

$\underbrace{\left[\frac{2x+2}{3}\right]}_{k \in Z} = x \Rightarrow x = k \in Z$ $(*)$.

Prvi način:

$T_{1(c)} \Rightarrow \frac{2x+2}{3} - 1 < x \leq \frac{2x+2}{3} \,\Big|\cdot 3 \Rightarrow 2x - 1 < 3x \leq 2x + 2 \,\Big| -2x \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 < x \leq 2 \overset{(*)}{\Rightarrow} x \in \{0, 1, 2\}$.

Drugi način:

$T_{1(d)} \Rightarrow x \leq \frac{2x+2}{3} < x + 3 \,\Big|\cdot 3 \Rightarrow 3x \leq 2x + 2 < 3x + 3 \,\Big| -3x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \leq -x < 1 \,\Big|\cdot(-1) \Rightarrow -1 < x \leq 2 \overset{(*)}{\Rightarrow} x \in \{0, 1, 2\}$.

Treći način:

$T_{1(a)} \Rightarrow \left\{\frac{2x+2}{3}\right\} = \frac{2x+2}{3} - \left[\frac{2x+2}{3}\right] \overset{(*)}{=} \frac{2x+2}{3} - x = \frac{2-x}{3} \overset{(T_{1(b)})}{\Rightarrow} \left\{\frac{2x+2}{3}\right\} =$

$= \frac{2-x}{3} \in [0, 1) \overset{(*)}{\Rightarrow} x \in \{0, 1, 2\}$.

Izvršite pokus.

<u>Zadatak 2</u> (Općinsko natjecanje SR Hrvatske, 1982.): Riješiti jednadžbu $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$, $x \in R$.

Rješenje:

$\underbrace{\left[\frac{x+1}{3}\right]}_{k \in Z} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = k \in Z \Rightarrow x = 2k + 1 \in Z$, $k \in Z$.

Supstitucijom $x = 2k+1$, zadana jednadžba postaje $\left[\frac{2k+2}{3}\right] = k$. Njena su rješenja (prema prethodnom zadatku) $k \in \{0, 1, 2\}$, pa za rješenja zadatka dobivamo $x \in \{1, 3, 5\}$. Izvršite pokus.

<u>Zadatak 3</u> (Općinsko natjecanje SR Hrvatske, 1986.): Riješiti jednadžbu $\left[\frac{x^2+3}{x+2}\right] = x - 1$, $x \in R$.

Rješenje:

$\underbrace{\left[\frac{x^2+3}{x+2}\right]}_{k \in Z} = x - 1 \Rightarrow x - 1 = k \in Z \Rightarrow x = k + 1 \in Z$, $k \in Z$ $(*)$.

Iz zadane jednadžbe dobivamo: $\left[x - 2 + \frac{7}{x+2}\right] = x - 1 \overset{(T_{1(d)})}{\Rightarrow} x - 2 +$

$+ \left[\frac{7}{x+2}\right] = x - 1 \Rightarrow \left[\frac{7}{x+2}\right] = 1 \overset{(T_{1(d)})}{\Rightarrow} 1 \leq \frac{7}{x+2} < 2 \,\Big|\cdot(x+2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2 \leq 7 < 2x + 4 \Rightarrow \frac{3}{2} < x \leq 5 \overset{(*)}{\Rightarrow} x \in \{2, 3, 4, 5\}$. Izvršite pokus.

Riješite zadatak supstitucijom $x = k+1$.

<u>Zadatak 4</u> (Republičko natjecanje SR Srbije, 1989.): Riješiti jednadžbu $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$, $x \in R$.

Rješenje:

$\underbrace{\left[\frac{5+6x}{8}\right]}_{k \in Z} = \frac{15x-7}{5} \Rightarrow \frac{15x-7}{5} = k \in Z \Rightarrow x = \frac{5k+7}{15}$, $k \in Z$ $(*)$.

$T_{1(d)} \Rightarrow k < \frac{5+6x}{8} \leq k+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} k < \frac{5 + 6\cdot\frac{5k+7}{15}}{8} \leq k+1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k < \frac{13}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \{0, 1\} \overset{(*)}{\Rightarrow} x \in \left\{\frac{7}{15}, \frac{4}{5}\right\}$. Izvršite pokus.

Zadatak 5: Riješiti jednadžbu $\left[\frac{2x+3}{5}\right]+\left[\frac{4x+7}{10}\right]=x,\ x\in R.$

Rješenje:

$$\underbrace{\left[\frac{2x+3}{5}\right]+\left[\frac{4x+7}{10}\right]}_{k\in Z}=x \quad\Rightarrow\quad x=k\in Z\ (*).$$

$$T_{1(c)}\Rightarrow \frac{2x+3}{5}-1+\frac{4x+7}{10}-1<x\leq\frac{2x+3}{5}+\frac{4x+7}{10}\ \Rightarrow\ -\frac{7}{2}<x\leq\frac{13}{2}\ \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$, ali jedino $x\in\{-2,0,2,4,6\}$ zadovoljavaju zadanu jednadžbu. Izvršite pokus.

Zadatak 6: Riješiti jednadžbu $\left[\frac{2x+0,2}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3},\ x\in R.$

Rješenje:

$$\underbrace{\left[\frac{10x+1}{15}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]}_{k\in Z}=\frac{5x-4}{3}\ \Rightarrow\ \frac{5x-4}{3}=k\in Z\ \Rightarrow\ x=\frac{3k+4}{5},\ k\in Z,$$ pa zadana jednadžba postaje $\left[\frac{2k+3}{5}\right]+\left[\frac{4k+7}{10}\right]=k$. Prema prethodnom zadatku je $k\in\{-2,0,2,4,6\}$, pa je $x\in\left\{-\frac{2}{5},\frac{4}{5},2,\frac{16}{5},\frac{22}{5}\right\}$.

Izvršite pokus.

Zadatak 7 (Republičko natjecanje SR Srbije, 1988.): Riješiti jednadžbu $\{x\}=\frac{x+[x]+(x)}{10}$, gdje je $(x)=[x+\frac{1}{2}]$.

Rješenje:

$$(x)=[x+\tfrac{1}{2}]=\begin{cases}[x], & \text{za } x\in[0,\frac{1}{2})\\ [x]+1, & \text{za } x\in[\frac{1}{2},1).\end{cases}$$

$$\{x\}=\frac{x+[x]+(x)}{10}\ \Leftrightarrow\ 10\{x\}=[x]+\{x\}+[x]+(x)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 9\{x\}-2[x]-(x)=0\quad (*).$$

1^{o}) $\{x\}\in[0,\frac{1}{2})\ (**)\ \Rightarrow\ (x)=[x]\ \overset{(*)}{\Rightarrow}\ 9\{x\}-2[x]-[x]=0\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 3\{x\}=[x]\ \overset{(**)}{\Rightarrow}\ [x]=3\{x\}\in[0,\frac{3}{2})\ \Rightarrow\ [x]_1=0\in[0,\frac{3}{2})\ \wedge$
$\wedge\ [x]_2=1\in[0,\frac{3}{2})\ \Rightarrow\ \{x\}_1=\frac{1}{3}[x]_1=0\in[0,\frac{1}{2})\ \wedge\ \{x\}_2=\frac{1}{3}[x]_2=$
$=\frac{1}{3}\in[0,\frac{1}{2})\ \Rightarrow\ x_1=[x]_1+\{x\}_1=0+0=0\ \wedge\ x_2=[x]_2+\{x\}_2=$
$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

2^{o}) $\{x\}\in[\frac{1}{2},1)\ (***)\ \Rightarrow\ (x)=[x]+1\ \overset{(*)}{\Rightarrow}\ 9\{x\}-2[x]-[x]-1=0$
$\Rightarrow\ 9\{x\}-3[x]-1=0\ \overset{(***)}{\Rightarrow}\ [x]=3\{x\}-\frac{1}{3}\in[\frac{3}{2}-\frac{1}{3},3-\frac{1}{3})=[\frac{7}{6},\frac{8}{3})$
$\Rightarrow\ [x]=2\in[\frac{7}{6},\frac{8}{3})\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{3}[x]+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=\frac{7}{9}\in[\frac{1}{2},1)\ \Rightarrow\ x=$
$=[x]+\{x\}=\frac{25}{9}$.

Dakle, rješenja zadatka su $x\in\{0,\frac{4}{3},\frac{25}{9}\}$.

Zadatak 8 (Kanada, 1981.): Dokazati da jednadžba $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$ nema rješenja u skupu R.

Dokaz:

Iz $n[x]\leq[nx]\leq n[x]+n-1,\ n\in N$ (dokažite to !) slijedi:
$S=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]\geq[x]+2[x]+4[x]+$
$+8[x]+16[x]+32[x]=63[x]$ i $S\leq[x]+2[x]+1+4[x]+3+8[x]+$
$+7+16[x]+15+32[x]+31=63[x]+57$, tj. $63[x]\leq S\leq 63[x]+57$.
S druge strane je $12345=63\cdot195+60$, pa zadana jednadžba nema rješenja.

Zadatak 9 (Austrija, 1973.): Riješiti jednadžbu
$1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|},\ x\in R.$

Rješenje:

$x\neq1$.

$$1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}\ \Leftrightarrow\ |x-1|\cdot(1-|x+1|)=-\{x\}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |x-1|\cdot(|x+1|-1)=\{x\}\quad (*).$$

1^{o}) $x\in(-\infty,-1)$

$(*)\ \Rightarrow\ \underbrace{(-x+1)}_{>0}(-x-2)=\underbrace{\{x\}}_{\geq0}\ (**)\ \Rightarrow -x-2>0\ \Rightarrow\ x\in(-\infty,2]$.

$1^{o}1$) $x=-2$ je rješenje jednadžbe $(**)$.

$1^{o}2$) $x\in[-3,2)\ \Rightarrow\ \{x\}=x+3\ \overset{(**)}{\Rightarrow}\ (x-1)(x+2)=x+3\ \Rightarrow\ x^2=5$
$\Rightarrow\ x=-\sqrt{5}\in[-3,2)$.

$1^{o}3$) $x\in(-\infty,-3)\ \Rightarrow\ (x-1)(x+2)>4\cdot1=4<\{x\}\in[0,1)$, pa jednadžba $(**)$ nema rješenja.

2^{o}) $x\in[-1,1)$

$(*)\ \Rightarrow x\underbrace{(1-x)}_{>0}=\underbrace{\{x\}}_{\geq0}\ (***)\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x\geq0\\ x<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in[0,1)\ \Rightarrow\ \{x\}=x\ \overset{(***)}{\Rightarrow}$
$\overset{(***)}{\Rightarrow}\ x(1-x)=x\ |:(1-x)\neq0\ \Rightarrow\ x=0\in[0,1)$.

3^{o}) $x\in(1,\infty)$

$(*)\ \Rightarrow x(x-1)=\{x\}\ (****)$. No kako je $x(x-1)>x-1\geq\{x\}$, jednadžba $(****)$ nema rješenja.

Dakle, rješenja zadatka su $x\in\{-\sqrt{5},-2,0\}$.

Zadatak 10 (SFRJ, 1989.): Odrediti prirodne brojeve n za koje vrijedi jednakost $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{n}]=2n$.

Rješenje:

$n=33$ zadovoljava zadanu jednadžbu $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{33}]=$
$=66$ (provjerite to !).

Za $n = 33 + k > 33$, $k \in N$, zadana jednadžba nema rješenja jer je

$66 + [\sqrt[3]{34}] + \ldots + [\sqrt[3]{33+k}] > 66 + 2k$, zbog $[\sqrt[3]{34}] + \ldots + [\sqrt[3]{33+k}]$
$\geq \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{k} = 3k > 2k$.

Analogno se pokazuje da zadana jednadžba nema rješenja ni za $n < 33$.

Dakle, rješenje zadatka je $n = 33$.

Zadatak 11 (Engleska, 1975.): Riješiti jednadžbu

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{x^3-1}] = 400, \quad x \in N.$$

Rješenje:

Za $k = n^3 + r$, $r \geq 0$, tj. $n^3 \leq k \leq (n+1)^3 - 1$ je $[k] = n$, pa imamo:

$$S_k = [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{x^3-1}] = ([\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{7}]) +$$
$$+ ([\sqrt[3]{8}] + [\sqrt[3]{9}] + \ldots + [\sqrt[3]{26}]) + \ldots + ([\sqrt[3]{(k-1)^3}] + [\sqrt[3]{(x-1)^3+1}] +$$
$$+ \ldots + [\sqrt[3]{x^3-1}]) = \sum_{k=1}^{x-1} \underbrace{([\sqrt[3]{k^3}] + [\sqrt[3]{k^3+1}] + \ldots + [\sqrt[3]{(k+1)^3-1}])}_{(k+1)^3-1-(k^3-1) = 3k^2+3k+1 \text{ čl.}} =$$
$$= \sum_{k=1}^{x-1} (3k^2+3k+1)k \quad (*).$$

Iz $(*)$ izlazi da je $S_1 = 7$, $S_2 = 38$, $S_3 = 111$, $S_4 = 244$, ... ,
a odatle $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 400$.

Na osnovu toga, iz zadane jednadžbe slijedi da je $x - 1 = 4$, tj. $x = 5$.

Zadatak 12 (XI Kievska matematička olimpijada, 1971.): Riješiti jednadžbu $2^{[x]} = 1 + 2x$, $x \in R$.

Rješenje:

Dijeljenjem zadane jednadžbe sa 2, dobivamo $2^{[x]-1} = \frac{1}{2} + x$, tj.
$2^{[x]-1} = \frac{1}{2} + [x] + \{x\}$.

Za $[x] \in Z \setminus Z[-1,3]$ jednadžba nema rješenja jer je tada njena lijeva strana veća od desne strane.

1°) $[x] = -1 \Rightarrow 2^{-2} = \frac{1}{2} - 1 + \{x\} \Rightarrow \{x\} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = [x] + \{x\} = -\frac{1}{4}$.

2°) $[x] = 0 \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x = 0$.

3°) $[x] = 1 \Rightarrow \{x\} = -\frac{1}{2} < 0$, što je kontradikcija sa $T_{1(b)}$.

4°) $[x] = 2 \Rightarrow \{x\} = -\frac{1}{2} < 0$, ,, ,, ,, ,, ,, .

5°) $[x] = 3 \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Dakle, rješenja zadane jednadžbe su $x \in \{-\frac{1}{4}, 0, \frac{7}{2}\}$.

Izvršite pokus.

Zadatak 13 (Općinsko natjecanje SR Hrvatske, 1981.): Riješiti sistem jednadžbi: $x + [y] + \{z\} = 2{,}7$; $\{x\} + y + [z] = 4{,}3$; $[x] + \{y\} + z = 3{,}8$; $x, y, z \in R$.

Rješenje:

Zbrajanjem zadanih jednadžbi dobivamo $2(x+y+z) = 10{,}8$, tj. $x+y+z = 5{,}4$. Oduzmemo li od posljednje jednadžbe redom prvu, drugu, odnosno treću zadanu jednadžbu, dobivamo $\{y\} + [z] = 2{,}7$, $[x] + \{z\} = 1{,}1$, $\{x\} + [y] = 1{,}6$, odakle je $[z] = 2$, $\{y\} = 0{,}7$, $[x] = 1$, $\{z\} = 0{,}1$, $[y] = 1$, $\{x\} = 0{,}6$, pa je $x = [x] + \{x\} = 1{,}6$, $y = [y] + \{y\} = 1{,}7$, $z = [z] + \{z\} = 2{,}1$. Izvršite pokus.

Zadatak 14: Riješiti sistem jednadžbi: $2^{[x]} \cdot 2^{\sqrt{\{y\}}} = \sqrt{8}$,
$3^{[y]} \cdot 3^{\{x\}^2} = \frac{1}{3}$, $x, y \in R$.

Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} 2^{[x]} \cdot 2^{\sqrt{\{y\}}} = \sqrt{8} \\ 3^{[y]} \cdot 3^{\{x\}^2} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^{[x]+\sqrt{\{y\}}} = 2^{3/2} \\ 3^{[y]+\{x\}^2} = 3^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [x] + \sqrt{\{y\}} = 1 + \frac{1}{2} \\ [y] + \{x\}^2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [x] = 1, \ \sqrt{\{y\}} = \frac{1}{2} \\ [y] = -1, \ \{x\}^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [x] = 1, \ \{y\} = \frac{1}{4} \\ [y] = -1, \ \{x\} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1, \ y = -\frac{3}{4}.$$

Izvršite pokus.

Zadatak 15: Riješiti jednadžbu $[3x^2 - x] = x + 1$, $x \in R$.

Rješenje:

$$\underbrace{[3x^2-x]}_{k \in Z} = x+1 \Rightarrow x+1 = k \in Z \Rightarrow x = k-1 \in Z \Rightarrow 3x^2 - x \in Z \Rightarrow [3x^2-x] =$$
$$= 3x^2 - x \Rightarrow 3x^2 - x = x + 1 \text{ (na osnovu zadane jednadžbe)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in Z.$$

Zadatak 16: Naći realna rješenja jednadžbe $[(x-1)^2] = [x]$.

Rješenje:

Prema $T_{1(d)}$ za svaki $a \in R$ vrijedi $[a] \leq a < [a] + 1$ (1),
a iz $[a] = [b]$ izlazi $|a - b| < 1$ (2).

Sada iz zadane jednadžbe izlazi $|(x-1)^2 - x| < 1$, odnosno $-1 < x^2 - 3x + 1 < 1$, odakle je $x \in (0,1) \cup (2,3)$.

1°) Za $x \in (0,1)$, tj. $0 < x < 1$ je $-1 < x - 1 < 0$, a odavde $0 < (x-1)^2 < 1$, odnosno $[(x-1)^2] = 0$. Kako je za $x \in (0,1)$ i $[x] = 0$, to zadanu jednadžbu zadovoljavaju svi $x \in (0,1)$.

2°) Za $x \in (2,3)$ je $[x] = 2$. Nadalje se može pisati $x = 2 + a$ (3), gdje je $a \in (0,1)$ (4), pa iz zadane jednadžbe slijedi $[(1+a)^2] = 2$, odnosno prema (1) $2 \leq (1+a)^2 < 3$. Rješenje ove dvostruke nejednakosti je $a \in (-1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{3})$, pa je na osnovu (4) $a \in (-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{3})$, a odavde prema (3) $x \in (1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3})$.

Dakle, rješenja zadatka su svi $x \in (0,1) \cup (1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3})$.

Zadatak 17 (Republičko natjecanje SR Slovenije, 1987.): Naći sve prirodne brojeve n za koje je cijeli dio broja $n^2/3$ prost broj.

Rješenje:

Neka je $n = 3k+r$, $k \in N_0$, $r \in \{-1,0,1\}$. Tada je $n^2 = 9k^2+6kr+r^2$,

$\frac{n^2}{3} = 3k^2 + 2kr + \frac{r^2}{3} = k(3k+2r) + \frac{r^2}{3}$, $[\frac{n^2}{3}] = k(3k+2r)$ $(*)$.

Za $k > 1$, tj. $n > 4$, $[\frac{n^2}{3}]$ nije prost broj. Lako se provjeri da $n \in \{3,4\}$ zadovoljavaju uvjet zadatka.

Zadatak 18 (Švicarska, 1982. ; Engleska, 1984. ; SFRJ, 1987.): Dan je prirodan broj n. Odrediti broj rješenja jednadžbe $x^2 - [x^2] = (x-[x])^2$ za koje je $1 \le x \le n$.

Rješenje:

$x^2 - [x^2] = (x-[x])^2 \Leftrightarrow ([x]+\{x\})^2 - [([x]+\{x\})^2] = \{x\}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2 - [[x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2] = \{x\}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x]^2 + 2[x]\{x\} - [x]^2 - [2[x]\{x\} + \{x\}^2] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2[x]\{x\} = [2[x]\{x\} + \{x\}^2] \Leftrightarrow 2[x]\{x\} \in N_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{x\} \in \{0, \frac{1}{2[x]}, \frac{2}{2[x]}, \ldots, \frac{2[x]-1}{2[x]}\}$.

Za svaki $[x] \in [1, n-1]$ imamo $2[x]$ mogućnosti za $\{x\}$, a za $[x] = n$ samo jednu, $\{x\} = 0$, pa imamo $2\cdot(1+2+\ldots+(n-1)) + 1 = 2\cdot\frac{n(n-1)}{2} + 1 = n^2-n+1$ rješenja zadane jednadžbe.

Zadatak 19 (Republičko natjecanje SR Bosne i Hercegovine, 1988.): Koliko ima prirodnih brojeva $n \le 1988$ za koje vrijedi: $[\sqrt{n}] \mid n$?

Rješenje:

Neka je $[\sqrt{n}] = k \in N$. Tada je $k \le \sqrt{n} < k+1$, $k^2 \le n < (k+1)^2 = k^2+2k+1$, $n = k^2+p, 0 \le p < 2k+1$, pa izlazi

$k = [\sqrt{n}] \mid n = k^2+p \Leftrightarrow k \mid p < 2k+1 \Leftrightarrow p \in \{0,k,2k\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \in \{k^2, k^2+k, k^2+2k\}$. Za $k \in \{1,2,\ldots,43\}$, $p \in \{0,k,2k\}$, je $n = k^2+p < 1988$, a za $k = 44$ je samo $n = k^2 = 44^2 < 1988$, dok za $n = k^2+k = 44^2+44$ i $n = k^2+2k = 44^2+2\cdot 44$ je n veći od 1988.

Dakle, ukupan broj prirodnih brojeva n, koji zadovoljavaju uvjet $[\sqrt{n}] \mid n$, je $43\cdot 3 + 1 = 130$.

Zadatak 20 (Republičko natjecanje SR Hrvatske, 1986.): Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve x i sve prirodne brojeve d i n vrijedi

$[d^n x] - d\cdot[d^{n-1}x] = [d^n(x-[x])] - d\cdot[d^{n-1}(x-[x])]$.

Dokaz:

$[d^n x] - d\cdot[d^{n-1}x] = [d^n([x]+\{x\})] - d\cdot[d^{n-1}([x]+\{x\})] =$

$= [d^n[x] + d^n\{x\}] - d\cdot[d^{n-1}[x] + d^{n-1}\{x\}] =$

$= d^n[x] + [d^n\{x\}] - d^n[x] - d\cdot[d^{n-1}\{x\}] =$

$= [d^n(x-[x]) - d\cdot[d^{n-1}(x-[x])]$.

Zadatak 21 (XLIV Moskovska matematička olimpijada, 1981. ; Republičko natjecanje SR Srbije, 1987.): Dokazati da za svaki $x \in R^+$ vrijedi $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}]$.

Dokaz:

Iz $[\sqrt{x}] \le \sqrt{x} \Rightarrow [\sqrt{[\sqrt{x}]}] \le [\sqrt{\sqrt{x}}]$ $(*)$.

Dokažimo da u $(*)$ uvijek vrijedi jednakost. Pretpostavimo (suprotno tvrdnji) da postoji neki $x > 0$ za koji vrijedi $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] < [\sqrt{\sqrt{x}}]$. Tada, uz oznaku $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = n$, izlazi $n+1 \le [\sqrt{\sqrt{x}}]$, odnosno $n \le \sqrt{[\sqrt{x}]} < n+1 \le \sqrt{\sqrt{x}}\,\Big|^2$, $[\sqrt{x}] < (n+1)^2 \le \sqrt{x}$ $(**)$, odakle izlazi da $[\sqrt{x}]$ nije najveći cijeli dio koji nije veći od $\sqrt{x}$, što je u kontradikciji sa definicijom najvećeg cijelog dijela.

Zadatak 22 (Austrija, 1984.): Neka je a pozitivan korijen kvadratne jednadžbe $a^2-a-1=0$. Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost $[a^2n] = [a[an]] + 1$.

Dokaz:

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $a^2 = a+1$ $(*)$, odnosno $a^2-a = 1$ $(**)$, pa imamo: $[a[an]] - [a^2n] \overset{(*)}{=} [a[an]] - [(a+1)n] =$

$= [a[an]] - [an+n] \overset{(T_{1(e)})}{=} [a[an]] - [an] - n \overset{(T_{1(e)})}{=} [a[an] - [an]] - n = [(a-1)[an]] - n$.

Ostaje još pokazati da je $[(a-1)[an]] = n-1$ $(***)$.

$T_{1(c)} \Rightarrow an-1 < [an] \le an \,\big|\cdot(a-1) \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-1)an - \underbrace{(a-1)}_{<1} \le (a-1)[an] \le (a-1)an \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(a-1)a}_{a^2-a=1 \text{ (prema } (**))}n - 1 < (a-1)an - (a-1) \le (a-1)[an] \le (a-1)an \overset{(**)}{\Rightarrow}$

$\overset{(**)}{\Rightarrow} n-1 < (a-1)[an] \Rightarrow n \le (a-1)[an]$ $(****)$.

No, s druge strane je $n = (a-1)an \ge (a-1)[an]$ $(*****)$, pa i-

Luka Čeliković: Funkcija "najveće cijelo"
http://public.carnet.hr/mat-natj

$n-1 < (a-1)[an] \leq n$ (jer je a iracionalan broj) izlazi da je $n-1 = [(a-1)[an]]$, čime je (***), pa stim i tvrdnja zadatka dokazana.

<u>Zadatak 23</u> (Republičko natjecanje SR Slovenije, 1985.): Dokazati da za svaki $x \in R$ i svaki $n \in N$ vrijedi

$$[x] + [x + \tfrac{1}{n}] + \ldots + [x + \tfrac{n-1}{n}] = [nx] .$$

Dokaz:

Zbog $\{x\} \in [0,1)$, postoji $k \in [0,n)$ takav da je

$\{x\} \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ (*). Tada iz $[x + \frac{1}{n}] = [x + \frac{2}{n}] = \ldots = [x + \frac{n-k}{n}] = [x]$

i $[x + \frac{n-k+1}{n}] = [x + \frac{n-k+2}{n}] = \ldots = [x + \frac{n-1}{n}] = [x] + 1$ izlazi

$$[x] + [x + \tfrac{1}{n}] + \ldots + [x + \tfrac{n-k}{n}] + [x + \tfrac{n-k+1}{n}] + \ldots + [x + \tfrac{n-1}{n}] =$$

$= (n-k+1) \cdot [x] + (k-1) \cdot ([x] + 1) = n \cdot [x] + k - 1$. S druge strane je $[nx] = [n([x] + \{x\})] = [n[x] + n\{x\}] = n[x] + [n\{x\}] \overset{(*)}{=} n[x] + k - 1$, čime je tvrdnja zadatka dokazana.

<u>Zadatak 24</u>: Dokazati da za svaki $x \in R$ vrijedi $[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$.

Dokaz:

Neka je $x = [x] + \{x\}$. Za $0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}$ je $[x + \frac{1}{2}] = [x]$ i $[2x] - [x] = 2[x] - [x] = [x]$, a za $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$ je $[x + \frac{1}{2}] = [x] + 1$ i $[2x] - [x] = 2[x] + 1 - [x] = [x] + 1$, pa je tvrdnja zadatka očigledna.

<u>Zadatak 25</u> (Austrija, 1974.): Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$.

Dokaz:

$4n(n+1) < (2n+1)^2 \; |\sqrt{\ } \Rightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Rightarrow (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} < (2n+1) + (2n+1) = 4n+2 \Rightarrow (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+2 \; |\sqrt{\ } \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} \Rightarrow [\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] \leq [\sqrt{4n+2}]$.

Ostaje još pokazati da nejednakost nikada ne vrijedi. Pretpostavimo (suprotno tvrdnji) da postoji $n \in N$ za koji je $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] < [\sqrt{4n+2}]$. Tada postoji $m \in N$, takav da vrijedi $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < m \leq \sqrt{4n+2}$. Odavde kvadriranjem slijedi

$2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} < m^2 \leq 4n+2 \; | -2n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < m^2 - (2n+1) \leq 2n+1 \; |^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n(n+1) < (m^2-(2n+1))^2 \leq (2n+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n(n+1) < (m^2-(2n+1))^2 \leq 4n(n+1)+1$.

Kako je $(m^2-(2n+1))^2 \in N$, tada je $m^2-(2n+1) = 4n(n+1)+1$, tj.

$m^2 = 2 \cdot (2n+1)$. Desna strana posljednje jednakosti je djeljiva sa 2, a ne sa 4, a kvadrat prirodnog broja djeljivog sa 2 je djeljiv sa 4. Na taj način dolazimo do kontradikcije.

Dakle, uvijek vrijedi $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$, $n \in N$.

<u>Zadatak 26</u> (X Medjunarodna matematička olimpijada u Moskvi, 1968.): Naći sumu

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots \quad \text{za svaki prirodan broj n .}$$

Rješenje:

$$\sum_{i \in N_0} \left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}}\right] = \sum_{i \in N_0} \left[\frac{n}{2^{i+1}} + \frac{1}{2}\right] \overset{(Z_{24})}{=} \sum_{i \in N_0} \left([\tfrac{n}{2^i}] - [\tfrac{n}{2^{i+1}}]\right) = [n]$$

jer je $\lim\limits_{i \to \infty} \left[\frac{n}{2^{i+1}}\right] = 0$.

<u>Zadatak 27</u>: Naći sumu $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{n^2-1}]$, $n \in N$.

Rješenje:

Iz $\left[\sqrt{k^2}\right] = \left[\sqrt{k^2+1}\right] = \ldots = \left[\sqrt{(k+1)^2-1}\right] = k$ izlazi

$[\sqrt{k^2}] + [\sqrt{k^2+1}] + \ldots + [\sqrt{\underbrace{(k+1)^2-1}_{k^2+2k}}] = (2k+1)k$, pa imamo

$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{n^2-1}] = ([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + \ldots + [\sqrt{8}]) + \ldots + ([\sqrt{(n-1)^2}] + [\sqrt{(n-1)^2+1}] + \ldots + [\sqrt{n^2-1}]) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n-1} ([\sqrt{k^2}] + [\sqrt{k^2+1}] + \ldots + [\sqrt{(k+1)^2-1}]) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (2k+1)k =$

$= 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k = 2 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)$.

<u>Zadatak 28</u>: Ako su $x, y \in R_0^+$, tada je $[2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x+y]$.

Dokaz:

Neka je $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$. Ako je $\{x\} + \{y\} < 1$, tada je $[2x] + [2y] \geq 2[x] + 2[y] = ([x] + [y]) + ([x] + [y]) = [x] + [y] + [x+y]$. Ako je $\{x\} + \{y\} \geq 1$, tada je $\{x\} \geq \frac{1}{2}$ ili $\{y\} \geq \frac{1}{2}$, tj. $2\{x\} \geq 1$ ili $2\{y\} \geq 1$. Neka je na primjer $2\{x\} \geq 1$. Tada je $[2x] + [2y] \geq 2[x] + 1 + 2[y] = ([x] + [y]) + ([x] + [y] + 1) = [x] + [y] + [x+y]$.

<u>Zadatak 29</u> (XII Kievska olimpijada, 1972 ; XXXV Moskovska olimpijada, 1972.): Neka su a,b medjusobno prosti prirodni brojevi, pri čemu je $a > b$. Provjeriti što je veće

$$\sum_{k=1}^{b} \left[\frac{ka}{b}\right] \quad \text{ili} \quad \sum_{k=1}^{a} \left[\frac{kb}{a}\right].$$

Rješenje:

$$\left[\frac{ka}{b}\right] = \frac{ka}{b} - \left\{\frac{ka}{b}\right\}$$

$$M(a,b) = 1 \wedge a > b \Rightarrow \left\{\frac{ka}{b}\right\} = \begin{cases} \frac{k}{b}, & \text{za } k < b \\ 0, & \text{za } k = b \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{b} \left[\frac{ka}{b}\right] = \sum_{k=1}^{b} \frac{ka}{b} - \sum_{k=1}^{b-1} \frac{k}{b} = \frac{b(b+1)}{2}\cdot\frac{a}{b} - \frac{(b-1)b}{2}\cdot\frac{1}{b} = \frac{1}{2}(ab+a-b+1).$$

Analogno izlazi $\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right] = \frac{1}{2}(ab-a+b+1)$, pa je $\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right] - \sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right] = a - b > 0$. Dakle, $\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right] > \sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]$.

<u>Zadatak 30</u> (SAD, 1975.): Dokazati da za nenegativne brojeve x,y vrijedi nejednakost $[5x] + [5y] \geq [3x+y] + [3y+x]$.

Dokaz:

Označimo $f(x,y) = [5x] + [5y] - [3x+y] - [3y+x] - [x] - [y]$ i dokažimo da je $f(x,y) \geq 0$ za $x,y \geq 0$.

Neka su $x,y \in [0,1)$. Pretpostavimo (suprotno tvrdnji) da je $f(x,y) < 0$, tj. $[5x] + [5y] - [3x+y] - [3y+x] < 0$. Tada je $f(x,y) \leq -1$ (zbog $f(x,y) \in Z$). Nadalje je $f(x,y) > (5x-1)+(5y-1)-(3x+y)-(3y+x) = x+y-2$, odnosno (zbog $f(x,y) \leq -1$) $x+y-2 \leq -1$, tj. $y \leq 1-x$.

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $x \leq y$. Tada je $[5x] - [3y+x] \geq [5y] - [4y] \geq 0$, pa je $[5x] - [3x+y] = f(x,y) - ([5y] - [3y+x]) \leq -1$.

S druge strane je $[5x] - [3x+y] \geq [5x] - [3x+1-x] = [5x] - [2x+1]$, pa je $[5x] - [2x+1] \leq -1$, tj. $[5x] < [2x+1]$, odakle je $5x < 2x+1$, tj. $x < \frac{1}{3}$. No tada je $[2x+1] \leq [2\cdot\frac{1}{3} + 1] = 1$, tj. $[5x] < 1$, odnosno $x < \frac{1}{5}$.

Iz $[5x] - [3x+y] \leq -1$ slijedi $[3x+y] \geq 1 + [5x] = 1$, a odavde $y \geq 1 - 3x > \frac{2}{5}$ i $[5y] \geq 2$. Primjetimo da je $[3x+y] \leq [3\cdot\frac{1}{5} + 1] = 1$.

Ako je $y < \frac{3}{5}$, tada je $3y+x < 3\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2$, $[3y+x] \leq 1$ i $f(x,y) = [5x] + [5y] - [3x+y] - [3y+x] \geq 0+2-1-1 = 0$.

Ako je $y \geq \frac{3}{5}$, tada je $[5y] \geq 3$, $[3y+x] = [y+x+2y] \leq [y+x] + 2 \leq 2$, $f(x,y) \geq 0+3-1-2 = 0$.

Dakle, $f(x,y) \geq 0$ za $x,y \in [0,1)$.

Pošto je funkcija $f(x,y)$ periodična sa periodom 1 (provjerite to !), tada je $f(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in R_0^+$.

<u>Zadatak 31</u>: Ako se prirodan broj k može prikazati u obliku $k = n + [\sqrt{n} + \frac{1}{2}]$, $n \in N$, tada k nije potpun kvadrat ni jednog cijelog broja.

Dokaz:

Neka je $k = n + [\sqrt{n} + \frac{1}{2}]$. Tada je $m = k-n = [\sqrt{n} + \frac{1}{2}]$, pa imamo $m \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2} < m+1$, $m - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < m + \frac{1}{2}$, $m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n < m^2 + m + \frac{1}{4}$, $m^2 - m < n < m^2 + m + 1$, $m^2 < n+m < m^2 + 2m + 1$, $m^2 < k < (m+1)^2$, pa k nije potpun kvadrat ni jednog cijelog broja.

<u>Zadatak 32</u> (Republičko natjecanje SR Hrvatske, 1984.): Neka je p prost broj veći od 2. Dokazati da je $[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$ djeljivo sa p.

Dokaz:

$$[(2+\sqrt{5})^p] = [(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p],\quad (2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p = \ldots =$$

$$= 2\cdot(2^p + \binom{p}{2}\cdot 2^{p-2}\cdot 5 + \binom{p}{4}\cdot 2^{p-4}\cdot 5^2 + \ldots + \binom{p}{p-1}\cdot 5^{(p-1)/2}) \in Z \quad (*)$$

(jer je p neparan broj).

Za $k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ je $\binom{p}{2k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-2k+1)}{(2k)!}$ djeljivo sa p (jer brojnik sadrži p kao faktor, a nazivnik ne), pa imamo da je

$$[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1} = [(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p] - 2^{p+1} \overset{(*)}{=} 2\cdot(2^p + \binom{p}{2}\cdot 2^{p-2}\cdot 5 + \ldots + \binom{p}{p-1}\cdot 5^{(p-1)/2}) - 2^{p+1} = \binom{p}{2}\cdot 2^{p-2}\cdot 5 + \ldots + \binom{p}{p-1}\cdot 2\cdot 5^{(p-1)/2}$$

djeljivo sa p.

<u>Zadatak 33</u>: Neka je $m \in N$. Nizovi $x_1, x_2, \ldots$, $y_1, y_2, \ldots$ definirani su na slijedeći način:

$x_1 = m$, $y_1 = 1$, $x_{n+1} = [\frac{x_n + y_n}{2}]$, $y_{n+1} = [\frac{m}{x_{n+1}}]$. Dokazati da je $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = [\sqrt{m}]$.

Dokaz:

Dokažimo prvo da je $x_n \geq [\sqrt{m}]$, $\forall n \in N$ $(*)$.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

(a) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da je $x_k \geq [\sqrt{m}]$, odnosno $x_k = [\sqrt{m}] + r$, $r \geq 0$.

(c) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da je i $x_{k+1} \geq [\sqrt{m}]$.

Iz (b) prvo izlazi da je $y_k = [\frac{m}{[\sqrt{m}]+r}] \geq [\frac{[\sqrt{m}]^2}{[\sqrt{m}]+r}] \geq [\frac{[\sqrt{m}]^2 - r^2}{[\sqrt{m}]+r}] = [[\sqrt{m}] - r] = [\sqrt{m}] - r$, pa imamo:

$x_{k+1}=[\frac{x_k+y_k}{2}]\geq[\frac{[\sqrt{m}]+r+[\sqrt{m}]-r}{2}]=[\sqrt{m}]$.

Time je tvrdnja (*) dokazana.

Ostaje još pokazati da $\exists t\in N$, $x_t=[\sqrt{m}]$ (**).

Pretpostavimo (suprotno tvrdnji (**)) da je za svaki $s\in N$, $x_s>[\sqrt{m}]$, tj. $x_s=[\sqrt{m}]+r$, $r\geq 1$. Neka je nadalje $m=[\sqrt{m}]^2+p$, gdje je $0\leq p\leq 2[\sqrt{m}]$ (jer u protivnom za $p\geq 2[\sqrt{m}]+1$ izlazi $m\geq([\sqrt{m}]+1)^2$, što je očito nemoguće). Tada je

$$y_s=[\frac{m}{[\sqrt{m}]+r}]=[\frac{[\sqrt{m}]^2+r}{[\sqrt{m}]+r}]\leq[\frac{[\sqrt{m}]^2+2[\sqrt{m}]}{[\sqrt{m}]+1}]<[\frac{([\sqrt{m}]+1)^2}{[\sqrt{m}]+1}]=[[\sqrt{m}]+1]=$$

$=[\sqrt{m}]+1$, tj. $y_s<[\sqrt{m}]+1$.

Iz $y_s\leq[\sqrt{m}]<[\sqrt{m}]+r=x_s$ izlazi tada $y_s<x_s$, a odatle

$x_{s+1}=[\frac{x_s+y_s}{2}]<[\frac{2x_s}{2}]=[x_s]=x_s$, tj. $x_{s+1}<x_s$, što znači da je niz $x_1,x_2,\dots$ strogo opadajući, pa (uzevši u obzir (*)) mora vrijediti (**).

Teorem 2: Ako su $n,k\in N$, tada je $[\frac{n}{k}]$ jednako broju svih višekratnika $v\in\{1,2,\dots,n\}$ broja k.

Dokaz:

Neka je $n=kq+r$, $q,r\in N_0$, $0\leq r<k$. Tada su višekratnici broja k: $k,2k,\dots,qk$, tj. ukupno ih je q. S druge strane je

$[\frac{n}{k}]=[\frac{kq+r}{k}]=[q+\frac{r}{k}]=q+[\frac{r}{k}]=q$.

Zadatak 34 (SFRJ, 1988.): Ako je n prirodan broj veći od 1 za koji vrijedi $[\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+\dots+[\frac{n}{n}]=2+[\frac{n-1}{1}]+[\frac{n-1}{2}]+\dots+[\frac{n-1}{n-1}]$, onda je n prost broj.

Dokaz:

Prema teoremu 2 neposredno slijedi da je $[\frac{n}{k}]-[\frac{n-1}{k}]=\begin{cases}0, & \text{za } k\nmid n\\ 1, & \text{za } k|n\end{cases}$ (*).

Sada imamo:

$[\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+\dots+[\frac{n}{n}]=2+[\frac{n-1}{1}]+[\frac{n-1}{2}]+\dots+[\frac{n-1}{n-1}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n+[\frac{n}{2}]+\dots+[\frac{n}{n-1}]+1=2+(n-1)+[\frac{n-1}{2}]+\dots+[\frac{n-1}{n-1}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ([\frac{n}{2}]-[\frac{n-1}{2}])+([\frac{n}{3}]-[\frac{n-1}{3}])+\dots+([\frac{n}{n-1}]-[\frac{n-1}{n-1}])=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\frac{n}{k}]-[\frac{n-1}{k}]=0$, $\forall k\in\{2,3,\dots,n-1\} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} k\nmid n$, $\forall k\in\{2,3,\dots,n-1\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ n je prost broj.

Teorem 3: Neka je n prirodan broj, p prost broj i a najveći prirodan broj za koji vrijedi $p^a|n!$. Tada je

$a=[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\dots$

Dokaz:

Prema teoremu 2 broj višekratnika broja p koji nisu veći od n je $[\frac{n}{p}]$. Analogno broj višekratnika broja p^2 koji nisu veći od n je $[\frac{n}{p^2}]$, broja p^3 $[\frac{n}{p^3}]$,... Očito je da za $p^i>a$, $i\in N$, izlazi da je $[\frac{n}{p^{i+j}}]=0$, $j\in N_0$.

Sada je tvrdnja teorema očigledna.

Zadatak 35 (Republičko natjecanje SR Makedonije, 1986.): Sa koliko nula završava 1986! ?

Rješenje:

Neka su a i b najveći eksponenti baza 2 i 5, tako da su 2^a i 5^b sadržani u 1986!. Tada je prema teoremu 3:

$a=[\frac{1986}{2}]+[\frac{1986}{2^2}]+\dots+[\frac{1986}{2^{10}}]=993+496+248+124+62+31+15+7+$

$+3+1=1980$, $b=[\frac{1986}{5}]+[\frac{1986}{5^2}]+\dots+[\frac{1986}{5^4}]=397+79+15+3=494$,

pa $2^{1980}\cdot5^{494}|1986!$, tj. $10^{494}|1986!$.

Dakle, 1986! završava sa 494 nule.

Zadatak 36: Dokazati da je $\frac{1990!}{3^{990}\cdot7^{325}}$ prirodan broj.

Dokaz:

Neka su a,b redom najveći eksponenti baza 3 i 7, tako da su 3^a i 7^b sadržani u 1990!. Tada je po teoremu 3:

$a=[\frac{1990}{3}]+[\frac{1990}{3^2}]+\dots+[\frac{1990}{3^6}]=663+221+73+24+8+2=991$,

$b=[\frac{1990}{7}]+[\frac{1990}{7^2}]+[\frac{1990}{7^3}]=284+40+5=329$, pa $3^{991}\cdot7^{329}|1990!$.

Odatle izlazi da je $\frac{1990!}{3^{990}\cdot7^{325}}=\frac{3^{991}\cdot7^{329}\cdot n}{3^{900}\cdot7^{325}}=3\cdot7^4\cdot n$ $(n\in N)$ prirodan broj.

Zadatak 37: Dokazati da je $(1990+1)\cdot(1990+2)\dots(1990+1990)$ djeljivo sa 2^{1990}, a nije djeljivo sa 2^{1991}.

Dokaz:

$(1990+1)\cdot(1990+2)\dots(1990+1990) = 1991\cdot 1992\dots 3980 = \frac{3980!}{1990!}$.

Neka su a,b najveći prirodni brojevi takvi da $2^a | 1990!$ i $2^b | 3980!$. Tada je prema teoremu 3:

$$a = [\frac{1990}{2}] + \dots + [\frac{1990}{2^{10}}], \quad b = [\frac{3980}{2}] + [\frac{3980}{2^2}] + \dots + [\frac{3980}{2^{11}}] =$$

$$= [1990] + [\frac{1990}{2}] + \dots + [\frac{1990}{2^{10}}] = 1990 + a, \text{ pa je } b - a = 1990.$$

Dakle, $2^{1990} | \frac{3980!}{1990!}$, a $2^{1991} \nmid \frac{3980!}{1990!}$.

Zadatak 38: Neka su $r_1, r_2, \dots, r_k, n \in N$ i $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

Tada je $\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$ cio broj.

Dokaz:

Neka je p prost faktor broja n i a najveći prirodan broj za koji $p^a | n!$. Tada je prema teoremu 3 $a = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \dots$

Neka je nadalje b najveći prirodan broj za koji $p^k | r_1! \dots r_k!$.

$$\text{Tada je } b = \sum_{i=1}^{k} ([\frac{r_i}{p}] + [\frac{r_i}{p^2}] + \dots) \le [\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i}{p}] + [\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i}{p^2}] + \dots =$$

$$= [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \dots = a, \text{ tj. } b \le a.$$

Kako to vrijedi za svaki prost broj p, tvrdnja zadatka je dokazana.

Zadatak 39 (Kanada, 1985.): Dokazati $2^{n-1} | n! \Leftrightarrow n = 2^{k-1}, k \in N$.

Dokaz:

Neka je $n \in N$, $2^s \le n < 2^{s+1}$. Prema teoremu 3 eksponent baze 2 u kanonskom rastavu n! je $[\frac{n}{2}] + \dots + [\frac{n}{2^s}]$, pa vrijedi

$$2^{n-1} | n! \Leftrightarrow [\frac{n}{2}] + \dots + [\frac{n}{2^s}] \ge n-1 \quad (*).$$

Neka $2^{n-1} | n!$. Tada prema $(*)$ vrijedi $[\frac{n}{2}] + \dots + [\frac{n}{2^s}] \ge n-1$, tj. prema teoremu 1 $n-1 \le [\frac{n}{2}] + \dots + [\frac{n}{2^s}] \le \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{2^s} = n - \frac{1}{2^s} \le n-1$,

a to je moguće samo ako je $[\frac{n}{2}] = \frac{n}{2}, \dots, [\frac{n}{2^s}] = \frac{n}{2^s}$, što znači da $2^s | n$ $(**)$. Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi da je $n = 2^s$, tj. $\exists k = s+1 \in N$, $n = 2^{k-1}$.

Obratno, neka $\exists k \in N$, $n = 2^{k-1}$. Tada je $[\frac{n}{2}] + \dots + [\frac{n}{2^s}] = 2^{k-2} + \dots + 2 + 1 = n-1$, što znači da $2^{n-1} | n!$.

Zadatak 40 (XIV Medjunarodna matematička olimpijada u Poljskoj, 1972.): Dokazati da za svaka 2 nenegativna cijela broja m i n broj $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ je cio broj.

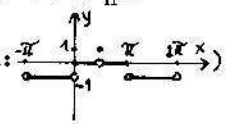
Dokaz:

Neka je p prost broj i a najveći prirodan broj za koji $p^a | (2m)!(2n)!$. Tada je (prema teoremu 3 i prema zadatku 24)

$$a = \sum_{i \in N} ([\frac{2m}{p^i}] + [\frac{2n}{p^i}]) \ge \sum_{i \in N} ([\frac{m}{p^i}] + [\frac{n}{p^i}] + [\frac{m+n}{p^i}]) = b,$$ gdje je b najveći prirodan broj za koji $p^b | m!n!(m+n)!$.

Iz $a \ge b$ slijedi tvrdnja zadatka.

Z a d a c i   z a   v j e ž b u :

1) Riješiti jednadžbu $[x^2] = 2$. (R: $x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3})$).
2) (XI Kievska mat. olimpijada, 1971.) Riješiti jednadžbu $[x] + \sqrt{x - [x]} = a$, $a \in R$. (R: $x = [a] + \{a\}^2$, $a \in R$).
3) Riješiti sistem jednadžbi: $\log_5 [\frac{2x-3}{4}] = 1$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{sign}[-2,41]$, $x \in R$. (R: $x = \frac{15\pi}{4}$).
4) Naći uvjete egzistencije rješenja jednadžbe $[ax^2 + bx + c] = d$, gdje je $a \neq 0$ i $d \in Z$. (R: Za $a > 0$ jedn. ima rješenja akko je $[-\frac{b^2 - 4ac}{2a}] \le d$, dok za $a < 0$ akko je $[-\frac{b^2-4ac}{2a}] \ge 1$).
5) (Svesovjetska olimpijada, 1980.) Dokažite da postoji beskonačno mnogo brojeva B za koje jednadžba $[x^{3/2}] + [y^{3/2}] = B$ ima bar 1980 rješenja za $x, y \in N$.
6) (XXII Kievska olimpijada, 1981.) Riješiti jednadžbu $\sin^2 2x + [\frac{x}{\pi}] = \cos^2 3x$. (R: $x \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{10}(2k+1), 0 \le k \le 4\}$).
7) (Belgija, 1979.) Koji se prirodni brojevi ne mogu predstaviti u obliku $[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}]$, gdje je $n \in N$? (R: $k = t^2$, $t \in N$).
8) Dokazati da je $[\frac{a}{m}] = \frac{a-r}{m}$, gdje je r ostatak dijeljenja a sa m, $a, m \in N$.
9) Ako je n neparan broj, tada je $[\frac{n}{2}] = \frac{n-1}{2}$.
10) Dokazati da je $[x_1 + x_2 + \dots + x_n] \ge [x_1] + [x_2] + \dots + [x_n]$.
11) Dokazati da je $[nx] \ge n[x]$, $n \in N$.
12) Nacrtati graf funkcije $f(x) = [\sin x]$. (R: 

).

13) Ako je $M(a,m)=1$, $a,b\geq 2$, tada je $\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{ka}{m}\right]=\frac{(m-1)(a-1)}{2}$.

14) $\left[\frac{4}{p}\right]+\left[\frac{8}{p}\right]+\left[\frac{12}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{2(p-1)}{p}\right]=\left[\frac{p+1}{4}\right]$, gdje je p neparan prost broj.

15) Koji eksponent ima prost broj p u kanonskom rastavu $p^n!$? (R: $\frac{p^n-1}{p-1}$).

16) Dan je beskonačan niz brojeva $a_1, a_2, \ldots$ jednakostima $a_k=k-1$, $k=1,2,3,4$, $a_{2n-1}=a_{2n-2}+2^{n-2}$ i $a_{2n}=a_{2n-5}+2^n$, $n\geq 3$. Dokazati da je $1+a_{2n-1}=\left[\frac{12}{7}\cdot 2^{n-1}\right]$.

17) $\left[\frac{(n-1)!}{n(n+1)}\right]$ je paran broj za $n>5$.

18) (Bugarska, 1983.) Ako brojevi a,b,c za $n\in N$ zadovoljavaju jednakost $[na]+[nb]=[nc]$, tada je jedan od brojeva a,b cijeli.

19) (Australija, 1988.) Neka je a najveći pozitivan korijen jednadžbe $x^3-3x^2+1=0$. Dokazati da su brojevi $[a^{1788}]$ i $[a^{1988}]$ djeljivi sa 17.

20) Dokazati da za $x\in R_0^+$ i $n\in N$ vrijedi nejednakost

$$[nx]\geq\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\ldots+\frac{[nx]}{n}.$$