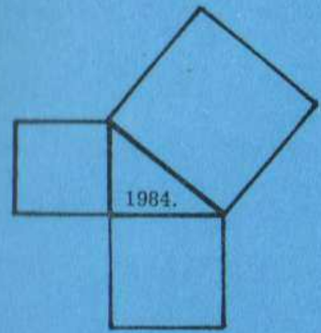
Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram knjižicu
"Jednadžbe - nestandardni zadaci za mlade matematičare"
i objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
»P I T A G O R A«
B E L I   M A N A S T I R

LUKA ČELIKOVIĆ

J E D N A D Ž B E
NESTANDARDNI ZADACI ZA MLADE MATEMATIČARE



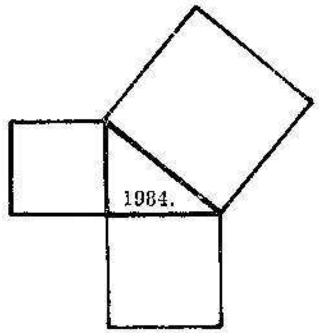
Beli Manastir, 1991.

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
»P I T A G O R A«
B E L I   M A N A S T I R

LUKA ČELIKOVIĆ

J E D N A D Ž B E

NESTANDARDNI ZADACI ZA MLADE MATEMATIČARE



Beli Manastir, 1991.

Luka Čeliković — JEDNADŽBE — NESTANDARDNI ZADACI ZA MLADE MATEMATIČARE

Izdavač:
DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »P I T A G O R A«
BELI MANASTIR

Recenzenti:
dr. Milutin Dostanić
dipl. ing. Vesna Šarić

Lektor:
prof. Eva Čeliković

Korektor:
Davorka Filipović

Tekst otipkao:
dipl. oecc. Josip Peran

Urednici:
Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:
Branko Vujaklija

Tisak:
DP »Slovo« Beli Manastir

Mišljenjem Republičkog komiteta za prosvjetu kulturu, fizičku i tehničku kulturu broj 532-03/1-90-01, od 30. 05. 1990, ova knjiga oslobođena je plaćanja poreza na promet.

S A D R Ž A J

I	Linearne jednadžbe	1
II	Kvadratne jednadžbe	5
III	Jednadžbe sa apsolutnim vrijednostima	12
IV	Racionalni i cjelobrojni korijeni jednadžbe sa cjelobrojnim koeficijentima	16
V	Kompleksni korijeni sa cjelobrojnim komponentama jednadžbe sa cjelobrojnim koeficijentima	17
VI	Rješavanje jednadžbi višeg stupnja sa cjelobrojnim koeficijentima metodom grupiranja članova i uvođenjem nove nepoznanice	18
VII	Iracionalne jednadžbe	21
VIII	Eksponencijalne jednadžbe	24
IX	Logaritamske jednadžbe	27
X	Binomne jednadžbe	31
XI	Trinomne jednadžbe	33
XII	Simetrične (recipročne) jednadžbe	33
XIII	Jednadžbe 3. stupnja	35
XIV	Jednadžbe 4. stupnja	37
XV	Sustav jednadžbi višeg stupnja	39
XVI	Trigonometrijske jednadžbe	43
XVII	Jednadžbe sa kompleksnim koeficijentima	54
XVIII	Približno rješavanje jednadžbi	57
XIX	Diofantove jednadžbe	59
XX	Jednadžbe kongruencije po modulu	68
XXI	Jednadžbe sa najvećim cijelim dijelom	74
XXII	Rekurzivne (diferencne) jednadžbe	77
XXIII	Funkcionalne jednadžbe	87
	Literatura	93

P R E D G O V O R

Ova zbirka sadrži 360 nestandardnih zadataka iz područja jednadžbi. Većina zadataka je riješena, a iza svakog dijela su dani zadaci za vježbu. Dio zadatak je uzet sa raznih natjecanja.

Zbirka je namijenjena svim ljubiteljima matematike, a prvenstveno mladim matematičarima za upotpunjavanje matematičkog znanja, kao i za pripremu za natjecanje.

Zahvaljujem se recenzentima dr. Milutinu Dostaniću iz Beograda i dipl. ing. Vesni Šarić iz Belog Manastira, koji su svojim primjedbama i prijedlozima znatno doprinijeli poboljšanju zbirke.

Također se zahvaljujem nastavniku Milanu Šariću, prosvjetnom savjetniku prof. Ivanu Staniću, te članovima Aktiva matematike CUO »Bratstvo-jedinstvo« Beli Manastir, koji su također pregledali materijal i dali korisne sugestije.

Nadalje se zahvaljujem lektoru prof. Evi Čeliković na otklanjanju gramatičkih grešaka, prof. Josipu Peranu na kucanju teksta, Davorki Filipović na korekturi, te radnim ljudima DP »Slovo« Beli Manastir na štampanju zbirke.

Zahvaljujem se i svima onima koji mi ukažu na eventualne greške.

Luka Čeliković

I - LINEARNE JEDNADŽBE

Jednadžbu oblika $ax+b=0$, $a,b\in R$ (1), gdje je x nepoznanica, zovemo linearna jednadžba (sa realnim koeficijentima) sa jednom nepoznanicom.

Diskusija rješenja jednadžbe (1):

(a) $a\neq 0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ (jednadžba je odredjena),

(b) $a=b=0 \Rightarrow x\in R$ (jednadžba je neodredjena),

(c) $a=0$ i $b\neq 0 \Rightarrow \emptyset$ (jednadžba je nemoguća).

Jednadžbu oblika $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$, $a_i\in R$, $i=1,2,\ldots,n$ (2),

gdje su x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ nepoznanice, zovemo linearna jednadžba (sa realnim koeficijentima) sa n nepoznanica.

Z a d a c i :

1) Riješiti jednadžbu $\frac{x-10}{1990}+\frac{x-11}{1989}+\ldots+\frac{x-15}{1985}=\frac{x-1990}{10}+$

$$+\frac{x-1989}{11}+\ldots+\frac{x-1985}{15},\ x\in R.$$

Rješenje:

Oduzmemo li od svakog razlomka zadane jednadžbe 1, dobivamo:

$$\frac{x-2000}{1990}+\ldots+\frac{x-2000}{1985}=\frac{x-2000}{10}+\ldots+\frac{x-2000}{15}$$

$$(x-2000)\left(\frac{1}{1990}+\ldots+\frac{1}{1985}-\frac{1}{10}-\ldots-\frac{1}{15}\right)=0$$

$x-2000=0$ (jer je druga zagrada negativan broj)

$x=2000$.

2) Diskutirati u ovisnosti od a i b rješenja (po x) jednadžbe

$$\frac{a}{3a-x}=\frac{2}{b-x},\ a,b\in R,\ x\in R.$$

Rješenje:

Za $x=3a$ ili $x=b$ jednadžba nema smisla. Takodjer za $a=0$ jednadžba je nemoguća, jer je tada njena lijeva strana jednaka nuli, dok desna nije.

Neka je $x\neq 3a$, $a\neq 0$ i $x\neq b$ (a).

Iz zadane jednadžbe tada dobivamo: $a(b-x)=2(3a-x)$, tj.

$(a-2)x=a(b-6)$ (b).

Za $a\neq 2$ rješenje jednadžbe (b) će biti: $x=\frac{a(b-6)}{a-2}$ (c),

pri čemu još moraju biti ispunjeni uvjeti (a):

$a \neq 0$ i $x \neq 3a$ i $x \neq b$

$\frac{a(b-6)}{a-2} \neq 3a$; $\frac{a(b-6)}{a-2} \neq b$

$\frac{a(b-3a)}{a-2} \neq 0$; $\frac{b-3a}{a-2} \neq 0$

$b \neq 3a$; $b-3a \neq 0$, $b \neq 3a$

Dakle, za $a \neq 0$, $a \neq 2$ i $b \neq 3a$ zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{a(b-6)}{a-2}$ (odredjena, moguća jednadžba). Za $a=2$ i $b=6$ prema (b) i (a) rješenja jednadžbe su svi $x \in R \setminus \{6\}$ (neodredjena jednadžba). Za $a=2$ i $b \neq 6$, ili $a=0$, ili $b=3a$ i $a \neq 0$ jednadžba nema rješenja (nemoguća jednadžba).

3) Riješiti sustav jednadžbi

$$\frac{3}{2x-5} + x - 3y + 4 = 0$$
$$\frac{5}{4x-10} - 2x + 6y + \frac{1}{2} = 0, \quad x, y \in R.$$

Rješenje:

Supstitucijom $u = \frac{1}{2x-5}$, $v = x-3y$ (1), zadani sustav jednadžbi prelazi u sustav: $3u+v=-4$, $\frac{5}{2}u - 2v = -\frac{1}{2}$, čije je rješenje: $u=v=-1$ (2). Iz (1) i (2) izlazi: $x=2$, $y=1$.

4) Riješiti sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n &= 1 \\ x_1 \quad +x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n &= 2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1} \quad &= n, \quad x_i \in R, \; i=1,2\ldots,n, \; n \in N. \end{aligned}$$

Rješenje:

Supstitucijom $x_1+x_2+\ldots x_n = t$ dobivamo sustav jednadžbi $t-x_i=i$, $i=1,2,\ldots,n$, čijim zbrajanjem izlazi:

$nt-t=\frac{1}{2}n(n+1)$, tj. $t=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}$, pa iz $x_i=t-i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ dobivamo rješenje zadatka:

$$x_i = \frac{n(n+1)}{2(n-1)} - i, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

5) Riješiti sustav jednadžbi

$$x_1+x_2+\ldots+x_{101}=0$$
$$x_1+x_2=x_2+x_3=\ldots=x_{100}+x_{101}=1, \; x_i \in R, \; i=1,\ldots,101.$$

Rješenje:

$x_1+x_2+\ldots+x_{101}=0$ (1).

Zbrajanjem jednadžbi: $x_1+x_2=1, \ldots, x_{100}+x_{101}=1$ dobivamo: $2\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_{101})-(x_1+x_{101})=100$, pa zbog (1) izlazi: $x_1+x_{101}=-100$ (2).

Iz $x_1+x_2=x_2+x_3$, $x_3+x_4=x_4+x_5, \ldots, x_{99}+x_{100}=x_{100}+x_{101}$ i iz $x_2+x_3=x_3+x_4$, $x_4+x_5=x_5+x_6, \ldots x_{98}+x_{99}=x_{99}+x_{100}$ izlazi: $x_1=x_3=x_5=\ldots=x_{101}$ i $x_2=x_4=x_6=\ldots=x_{100}$, odakle, zbog (2), slijedi:

$$x_1=x_3=\ldots=x_{101}=-50, \quad x_2=x_4=\ldots=x_{100}=51.$$

6) Diskutirati u ovisnosti od a rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in R, \; a \in R. \end{aligned}$$

Rješenje:

Zadatak ćemo riješiti Gauss-Jordanovom metodom eliminacije. Rješenja sustava jednadžbi ostat će nepromijenjena, ako vršimo elementarne transformacije sa jednadžbama: zamjena redoslijeda jednadžbi, množenje (dijeljenje) bilo koje jednadžbe nekim brojem različitim od nule, te dodavanje (oduzimanje) bilo kojoj jednadžbi linearnu kombinaciju ostalih jednadžbi.

Zbog jednostavnosti pisanja koristit ćemo tzv. matrični oblik, pri čemu će elementarne transformacije po recima predstavljati elementarne transformacije sa jednadžbama.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{I}-\text{IV} \\ \text{II}-\text{IV} \\ \text{III}-\text{IV} \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

1°) $a=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} -1x_1+0x_2+0x_3+0x_4 &= 0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4 &= 2 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4 &= 5 \\ 1x_1+1x_2+1x_3+1x_4 &= 1 \end{aligned}$$

pa je, zbog $2 \neq 0 \neq 5$, sustav jednadžbi nemoguć.

2°) $a=1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] IV-(I+II) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{tj.}$$

$x_1+x_4=-4$, $x_2=2$, $x_3=3$, odnosno

$x_1=-x_4-4$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4 \in R$. Sustav jednadžbi je neodredjen, a njegova rješenja možemo pisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \; t \in R.$$

3°) $a \in (R \setminus \{0,1\})$

Sustav jednadžbi je odredjen, a njegovo rješenje možemo pisati u obliku:
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/a \\ 3/a \\ (a-5)/a \end{bmatrix}$$

Izvršite diskusiju rješenja primjenom ranga matrice i metode determinanata.

V j e ž b e :

7) Diskutirati u ovisnosti od a i b rješenja (po x) jednadžbe
$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = 0, \; a,b \in R, \; x \in R.$$
(R : za $a \neq \pm b$ i $a \neq 0$ jedinstveno rješenje je $-b$, za $a=\pm b$ jednadžba nema smisla, a za $a=0$ i $b \neq 0$ rješenja su svi $x \in R$.)

8) Riješiti sustav jednadžbi:

$x_1+x_2+x_3=0$, $x_2+x_3+x_4=0, \ldots, x_{100}+x_1+x_2=0$, $x_1, \ldots, x_{100} \in R$.
(R: $x_i=0$, $i=1,2,\ldots,100$).

9) Riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} &2x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=1 \\ &x_1+2x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+2x_n=1, \quad x_1 \ldots, x_n \in R, \quad n \in N. \end{aligned}$$

(R: $x_i=1/(n+1)$, $i=1,2,\ldots,n$).

10) Riješiti sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - \quad x_n &= 2a \\ -x_1+3x_2 - x_3 - \ldots - \quad x_n &= 4a \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 - \ldots - \quad x_n &= 8a \\ \vdots \quad & \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots + (2^n-1)x_n &= 2^n a \end{aligned}, \quad x_1, \ldots, x_n \in R, \; n \in N, \; a \in R.$$

(R: $x_i=a(1+n \cdot 2^{n-1})$, $i=1,2,\ldots,n$).

11) Diskutirati rješenja sustava jednadžbi:
$ax+y+z=1$, $x+by+z=1$, $x+y+cz=1$, $a,b,c \in R$, $x,y,z \in R$.
(R: $D=abc-a-c+2$, $D_1=(b-1)(c-1)$, $D_2=(c-1)(a-1)$,
$D_3=(a-1)(b-1)$;
1°) $D \neq 0 \Rightarrow x=D_1/D$, $y=D_2/D$, $z=D_3/D$:
2°) $D=0$
(a) $a=b=c=1 \Rightarrow x+y+z=1$,
(b) $a \neq b=c=1 \Rightarrow x=0$, $y+z=1$,
(c) $b \neq c=a=1 \Rightarrow y=0$, $z+x=1$,
(d) $c \neq a=b=1 \Rightarrow z=0$, $x+y=1$,
(e) $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1 \Rightarrow \emptyset$).

II - KVADRATNE JEDNADŽBE

Jednadžbu oblika $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c \in R$, $a \neq 0$ (1) zovemo kvadratna jednadžba, a njena rješenja su dana izrazom
$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (2)$$

Izraz $D=b^2-4ac$ zovemo diskriminanta kvadratne jednadžbe, a služi nam za diskusiju rješenja jednadžbe (1):

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } D>0 \Rightarrow \text{rješenja su realna i različita,} \\ \text{(b) } D=0 \Rightarrow \text{rješenja su realna i jednaka,} \\ \text{(c) } D<0 \Rightarrow \text{rješenja su konjgirano-kompleksni brojevi.} \end{array}\right\} (3)$$

Ako jednadžbu (1) podijelimo sa $a \neq 0$, dobivamo tzv. normiranu kvadratnu jednadžbu: $x^2+px+q=0$ (4),

gdje je: $p=\frac{b}{a}=-S=-(x_1+x_2)$, $q=\frac{c}{a}=P=x_1x_2$ (5).

Za p=paran broj, rješenja jednadžbe (4) brže dobivamo po formuli:
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (6).$$

Pri $D>0$ uz pomoć p i q vršimo slijedeću diskusiju rješenja jednadžbe (4):

(a) $q>0$ i $p<0 \Rightarrow$ oba rješenja su pozitivna,
(b) $q>0$ i $p>0 \Rightarrow$ oba rješenja su negativna,
(c) $q<0$ i $p<0 \Rightarrow$ jedno rješenje je pozitivno a drugo negativno, a po apsolutnoj vrijednosti veće je pozitivno rješenje,
(d) $q<0$ i $p>0 \Rightarrow$ jedno rješenje je negativno a drugo pozitivno, a po apsolutnoj vrijednosti veće je negativno rješenje. (7)

Ako je $f(x)=ax^2+bx+c$, tada vrijedi:
Zadani realan broj u je izmedju rješenja $x_1<x_2$ kvadratne jednadžbe (1) ako je $a\cdot f(u)<0$, (8)

oba rješenja su manja od u ako je:

(a) $D\geq 0$,
(b) $a\cdot f(u)>0$,
(c) $a\cdot f'(u)>0$ (f'= derivacija od f), odnosno

$$u-\frac{S}{2}=u-\frac{x_1+x_2}{2}=u+\frac{b}{2a}>0$$ (9)

odnosno veća od u ako je:

(a) $D\geq 0$,
(b) $a\cdot f(u)>0$,
(c) $a\ f'(u)<0$, odnosno $u-\frac{S}{2}=u-\frac{x_1+x_2}{2}=u+\frac{b}{2a}<0$. (10)

Kvadratna jednadžba (1) ima točno jedno realno rješenje izmedju 2 zadana realna broja $u<v$ ako je $f(u)\cdot f(v)<0$, (11)
odnosno oba realna rješenja x_1, x_2 izmedju tih brojeva

ako vrijede svojstva:

(a) $a\cdot f(u)>0$,
(b) $a\ f(v)>0$,
(c) $D\geq 0$
(d) $f'(u)\cdot f'(v)<0$, odnosno $u<\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{S}{2}<v$. (12)

Zadaci:

12) Ispitati rješenja jednadžbe $(m+3)x^2-4mx+1-m=0$ u ovisnosti od $m\in R$, $x\in C$.

Rješenje:

Prema (3) je $D=b^2-4ac=20m^2+8m-12=4(m+1)(5m-3) \gtreqless 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\in R\setminus[-1,3/5] & \text{rješenja su realna i različita} \\ m\in\{-1,3/5\} & \text{rješenja su realna i jednaka} \\ m\in(-1,3/5) & \text{rješenja su konjugirano-kompl. br.} \end{cases}$$

Nadalje je prema (5):

$$p\ \frac{1-m}{m+3} \gtreqless 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-3,1) \\ m=1 \\ m\in R\setminus[-3,1] \end{cases}, \quad q=-\frac{4m}{m+3} \gtreqless 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-3,0) \\ m=0 \\ m\in R\setminus[-3,0] \end{cases}$$

pa prema (3) i (7) imamo:

m	D	q	p	x_1, x_2
	+	-	-	$x_1,x_2\in R$, $x_1<0<x_2$, $\lvert x_2\rvert>\lvert x_1\rvert$
-3	jedn. je lin.			$x=-1/3$
	+	+	+	$x_1,x_2\in R$, $x_1<x_2<0$
-1	0	+	+	$x_1,x_2\in R$, $x_1=x_2=-1$
	-	+	+	$x_1,x_2\in C$, $x_1=\bar{x}_2$
0	-	+	0	$x_1,x_2\in C$, $x_1=\bar{x}_2$
	-	+	-	$x_1,x_2\in C$, $x_1=\bar{x}_2$
$\frac{3}{5}$	0	+	-	$x_1,x_2\in R$, $x_1=x_2=1/3$
	+	+	-	$x_1,x_2\in R$, $0<x_1<x_2$
1	+	0	-	$x_1,x_2\in R$, $x_1=0$, $x_2=1$
	+	-	-	$x_1,x_2\in R$, $x_1<0<x_2$, $\lvert x_2\rvert>\lvert x_1\rvert$.

13) Ispitati položaj broja 2 prema rješenjima jednadžbe $mx^2-(2m-3)x+7-3m$, $m\in R$, $x\in C$.

Rješenje:

$D=(4m-1)\cdot(4m-9)$, $a\cdot f(2)=m(-3m+13)$, $a\cdot f'(2)=m(2m+3)$ odnosno $2-\frac{S}{2}=2+\frac{b}{2a}=\frac{2m+3}{2m}$.

Za $D=0$, $a\cdot f(2)=0$, $a\cdot f'(2)=0$ (odnosno $2-\frac{S}{2}=0$) za m dobivamo ove karakteristične vrijednosti (poredane po veličini): $-\frac{3}{2}$, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{13}{4}$, pa je rješenje zadatka dano ovom tabelom:

m	D	a f(2)	a f'(2)	položaj x_1, x_2 prema broju 2
	+	-	+	$x_1 < 2 < x_2$
$-\frac{3}{4}$	+	-	0	$x_1 < 2 < x_2$
	+	-	-	$x_1 < 2 < x_2$
0	+	0	0	lin. jedn. , $x = -\frac{3}{7} < 2$
	+	+	+	$x_1 < x_2 < 2$
$\frac{1}{4}$	0	+	+	$x_1 = x_2 < 2$
	-	+	+	rješ. su konjug.- kompl. br.
$\frac{9}{4}$	0	+	+	$x_1 = x_2 < 2$
	+	+	+	$x_1 < x_2 < 2$
$\frac{13}{4}$	+	0	+	$x_1 < x_2 = 2$
	+	-	+	$x_1 < 2 < x_2$

14) Za koje vrijednosti od $m \in R$ jednadžba $(m-2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$, $x \in R$, ima u intervalu $[-1, 1]$: a) jedno, b) oba rješenja?

Rješenje:

a) Prema (11) bit će jedno rješenje u intervalu $(-1,1)$ ako je $f(-1) \cdot f(1) < 0$, tj. $(5m+1)(m+1) < 0$, $m \in (-1, -\frac{1}{5})$. Ostaje još provjeriti za karakteristične vrijednosti za m: -1 i $-\frac{1}{5}$.

Za $m = -1$ dobivamo jednadžbu $3x^2 - 2x - 1 = 0$, čija su rješenja $x_1 = -\frac{1}{3}$ i $x_2 = -1$, a za $m = -\frac{1}{5}$ jednadžbu $11x^2 - 2x - 13 = 0$, čija su rješenja $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{13}{11}$. Rješenje pod a) je $m \in (-1, -\frac{1}{5}]$.

b) Prema (12) bit će oba rješenja u intervalu $(-1,1)$ ako vrijede svojstva:

(a) $a \cdot f(-1) > 0 \Leftrightarrow m \in R \setminus [-\frac{1}{5}, 2]$,

(b) $a \cdot f(1) > 0 \Leftrightarrow m \in R \setminus [-1, 2]$,

(c) $D \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-2, 3]$,

(d) $f'(-1) \cdot f'(1) < 0 \Leftrightarrow \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{m-2} \in (-1, 1) \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1)$.

Sva 4 uvjeta ispunjena su za $m \in [-2, -1)$, pri čemu je $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ za $m = -2$. Za $m = -1$ rješenja su (kao što smo već vidjeli) $x_1 = -\frac{1}{3}$ i $x_2 = -1$, pa je rješenje pod b): m $[-2, -1]$.

15) Za koje vrijednosti od $m \in R$ ima jednadžba $(3m-2)x^2 + 2mx + 3m = 0$, $x \in R$, oba rješenja izvan intervala $[-1, 0]$?

Rješenje:

Primjenom (8), (9) i(10) izlazi:

$x_1 < -1 < 0 < x_2$ za $m \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$; $-1 < 0 < x_1 < x_2$ ne zadovoljava ni jedan $m \in R$; $x_1 < x_2 < -1 < 0$ za $m \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$.

Dakle, $x_1, x_2 \notin [-1, 0]$ za $m \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$.

16) Odrediti one vrijednosti parametra $k \in R$ za koje su oba rješenja jednadžbe $(2-k)x^2 + (k+1)x - (k+1) = 0$, $x \in R$, pozitivna.

Rješenje:

Prema (10) je: $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D = 3(1+k)(3-k) \geq 0 \Leftrightarrow k \in (-1, 3) \\ a \cdot f(0) = -(2-k)(k+1) > 0 \Leftrightarrow k \in R \setminus [-1, 2] \\ 0 - \frac{S}{2} = -\frac{k+1}{2(2-k)} < 0 \Leftrightarrow k \in R \setminus [1, 2] \end{array} \right\} \Leftrightarrow k \in (2, 3).$$

Pokazati da se uvjeti (10) mogu zamijeniti uvjetima:

$$\left. \begin{array}{l} D \geq 0 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} > 0 \end{array} \right\} \quad (7a)$$

I riješite zadatak primjenom (7a).

17) Za koju vrijednost parametra m, $m \in R$ jednadžbe $2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$, $4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$, $x \in C$, imaju zajednički korijen?

Rješenje:

x 0 nije rješenje ni jedne jednadžbe.

Iz prve jednadžbe je $m = (2x^2 - 2x + 12)/3x$, a iz druge $m = (4x^2 + 2x + 36)/9x$, odakle je $x^2 - 4x = 0$, tj. $x = 4 \neq 0$, pa je $m = 3$.

18) Odrediti brojnu vrijednost parametra m, $m \in R$, u jednadžbi $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$, $x \in C$, tako da njeni korijeni zadovoljavaju uvjet: $3x_1 - 4x_2 = 11$.

Rješenje:

Iz $x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{m-1}{2}$ i $3x_1 - 4x_2 = 11$ izlazi:

$m_1 = -2$, $m_2 = \frac{33}{8}$.

19) Riješiti sustav jednadžbi: $x^2-5xy+4y^2=0$, $x^2+2x-3y-2=0$, $x,y\in R$.

Rješenje:

Kako $y=0$ nije rješenje sustava jednadžbi (jer u protivnom iz $y=0$ slijedi $x=0$, što ne zadovoljava drugu jednadžbu), tada dijeljenjem druge jednadžbe sa y^2 dobivamo:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+4=0.$$

Supstitucijom $\frac{x}{y}=t$ dobivamo jednadžbu $t^2-5t+4=0$, čija su rješenja $t_1=1$, $t_2=4$. Iz $\frac{x}{y}=1$ i $x^2+2x-3y-2=0$ izlazi $x^2-x-2=0$, $x_1=y_1=-1$, $x_2=y_2=2$, a iz $\frac{x}{y}=4$ i $x^2+2x-3y-2=0$ dobivamo: $16y^2+5y-2=0$, $y_{3,4}=\frac{-5\mp\sqrt{153}}{32}$, $x_{3,4}=\frac{-5\mp\sqrt{153}}{8}$, pa su rješenja zadatka: $(-1,-1),(2,2),\left(\frac{-5-\sqrt{153}}{8},\frac{-5-\sqrt{153}}{32}\right),\left(\frac{-5+\sqrt{153}}{8},\frac{-5+\sqrt{153}}{32}\right)$.

20) Riješiti sustav jednadžbi: $x^2+3xy-y^2=3$, $2x^2-xy+y^2=4$, $x,y\in R$.

Rješenje:

Eliminiranjem slobodnih koeficijenata metodom adicije dobivamo $2x^2-15xy+7y^2=0$, a odatle, analognim postupkom kao u prethodnom zadatku, dolazimo do rješenja sustava jednadžbi:

$(-1,-2),(1,2),\left(-\frac{7\sqrt{23}}{23},-\frac{\sqrt{23}}{23}\right),\left(\frac{7\sqrt{23}}{23},\frac{\sqrt{23}}{23}\right)$.

21) Riješiti sustav jednadžbi: $2(x^2+y^2)-5(x+y)=1$
$5xy-2(x+y)=20$, $x,y\in C$.

Rješenje:

Zadani sustav jednadžbi možemo pisati u obliku:

$$2(x+y)^2-5(x+y)-4xy-1=0$$
$$-2(x+y)+5xy-20=0.$$

Supstitucijom $x+y=u$, $xy=v$ dobivamo sustav: $2u^2-5u-4v-1=0$
$-2u+5v-20=0$,

čija su rješenja $\left(-\frac{17}{10},\frac{83}{25}\right)$, $(5,6)$, pa su rješenja zadatka:

$\left(\frac{-17-i\sqrt{1039}}{20},\frac{-17+i\sqrt{1039}}{20}\right)$, $\left(\frac{-17+i\sqrt{1039}}{20},\frac{-17-i\sqrt{1039}}{20}\right)$, $(2,3)$, $(3,2)$.

22) Riješiti jednadžbu $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$, $x,y\in R$.

Rješenje:

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $4(x+y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=0$, odakle je: $x+y=0, x-1=0, y+1=0$, tj. $x=1, y=-1$.

23) Riješiti sustav jednadžbi: $x+y=2$, $xy-z^2=1$, $x,y,z\in R$.

Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l}x+y=2\Leftrightarrow x=2-x\\ xy-z^2=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2-x\\ x(2-x)-z^2=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2-x\\ (x-1)^2+z^2=0\Leftrightarrow x=1, z=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=1, y=1, z=0.$

Vježbe:

24) Ne rješavajući jednadžbu $x^2+4x-5=0$ odrediti položaj broja -6 prema rješenjima $x_1\leq x_2$ te jednadžbe.
(R: $-6<x_1<x_2$).

25) Ne rješavajući jednadžbu $6x^2+13x-63=0$ odrediti položaj njenih rješenja prema brojevima 1 i 3.
(R: $x_1<1<x_2<3$).

26) Ispitati položaj broja 3 prema rješenjima jednadžbe $(m-1)x^2-2mx+3m-2=0$, $x\in C$, $m\in R$.
(R: $m\in(-\infty, 1/2)\cup(2,\infty)\Rightarrow$ rješ. su konjug.-kompl. br.,
$m\in(1,3/2)\cup(3/2,11/6)\Rightarrow x_1<3<x_2$,
$m=1/2\Rightarrow x_1=x_2<3$,
$m=1\Rightarrow$ jednadžba je linearna i $x=5/2<3$,
$m=11/6\Rightarrow x_1<x_2=3$,
$m=2\Rightarrow x_1=x_2<3$.)

27) Za koju vrijednost od $m\in R$ su oba rješenja jednadžbe $x^2-(m+2)x+2m+1=0$, $x\in R$, manja od 3?
(R: $m\in R^+$).

28) Za koju vrijednost od $m\in R$ ima jednadžba $mx^2-(2m-3)x+$

$+7-3m=0$, $x\in R$, rješenja između 0 i 4?
(R: Jednadžba ima jedno rješenje u intervalu $(0,4)$ za $m\in R\setminus[-19/5,\ 7/3]$, a oba rješenja u tom intervalu za $m\in[9/4,\ 7/3)$).

29) Za koje vrijednosti parametra $m\in R$ ima jednadžba
$(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$ realna rješenja?
(R: $m\in[1,6]$).

30) Za koje vrijednosti $m\in Z$ su rješenja jednadžbe mx^2-
$-(1-2m)x+m-2=0$ racionalna?
(R: $m=n(n+1)$, $n\in N_o$).

31) Za koje vrijednosti $m\in Z$ će oba rješenja jednadžbe
$(m-1)x^2-(m^2+1)x+m(m+1)=0$ biti cjelobrojna?
(R: $m\in\{0,3\}$).

32) Koja relacija postoji između parametara m i n, $m,n\in R$,
da bi jednadžbe $x^2+2(m-1)x+2m(m-2)=0$, $x^2+2(n-1)x+2n(n-2)=$
$=0$, $x\in C$, imale jedno i samo jedno zajedničko rješenje?
(R: $m^2+n^2-2(m+n)=0$).

33) Riješiti sustav jednadžbi: $\frac{x_1}{2}+\frac{1}{x_1}=x_2,\ \frac{x_2}{2}+\frac{1}{x_2}=x_3,\ \ldots$

$\ldots,\ \frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}=x_1;\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n\in R,\ n\in N.$

(R: $x_i=\mp\sqrt{2}$, $i=1,2,\ldots,n$).

III - JEDNADŽBE SA APSOLUTNIM VRIJEDNOSTIMA

Funkciju $|\ |:R\rightarrow R_o^+$, $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{za } x<0\\ 0, & \text{za } x=0\\ x, & \text{za } x>0\end{cases}$

zovemo apsolutana vrijednost.

Z a d a c i :

34) Riješiti jednadžbu $|3-x|+1=|x|-2x$, $x\in R$.

R j e š e n j e :

Karakteristične vrijednosti (poređane po veličini) nepoznanice x, za koje su izrazi pod znakom apsolutne vrijednosti jednaki 0 (nuli), su 0 i 3.

Stoga ćemo, uzevši u obzir da je

$|3-x|=\begin{cases}3-x, & \text{za } x<3\\ 0, & \text{za } x=3\\ -(3-x), & \text{za } x>3\end{cases}$ zbog $3-x \overset{>}{\underset{<}{=}} 0$ za $x \overset{<}{\underset{>}{=}} 3$

i $|x|=\begin{cases}-x, & \text{za } x<0\\ 0, & \text{za } x=0\\ x, & \text{za } x>0\end{cases}$, promotriti ove

slučajeve:

1°) $x\in(-\infty,0)$
$|3-x|+1=|x|-2x \Rightarrow 3-x+1=-x-2x \Rightarrow x=-2\in(-\infty,0)$;

2°) $x\in[0,3]$
$|3-x|+1=|x|-2x \Rightarrow 3-x+1=x-2x \Rightarrow 0x=-4$, kontradikcija;

3°) $x\in(3,+\infty)$
$|3-x|+1=|x|-2x \Rightarrow -(3-x)+1=x-2x \Rightarrow x=1\notin(3,+\infty)$,

pa nije rješenje zadane jednadžbe.
Rješenje zadatka je $x=-2$. Izvršite pokus.

Zadatak možemo riješiti i tabelarno ovako:

x	$-\infty<x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$3<x<\infty$
$3-x$	+	+	+	0	-
x	-	0	+	+	+
$\lvert 3-x\rvert$	$3-x$		$3-x$		$-3+x$
$\lvert x\rvert$	$-x$		x		x
$\lvert 3-x\rvert+1=\lvert x\rvert-2x$	$x=-2$		$0x=-4$		$x=1$
Rješenja	$x=-2$		$\emptyset$		$\emptyset$

Rješenje zadatka je, dakle, $x=-2$.

35) Riješiti jednadžbu $\frac{|2-x|-|2x-3|+4x-1}{|x+4|}=1$, $x\in R$.

Rješenje:

$-4,\ \frac{3}{2},\ 2.$

x	$-\infty<x<-4$	$-4<x<\frac{3}{2}$	$x=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}<x<2$	$x=2$	$2<x<\infty$
$2-x$	+	+	+	+	0	-
$2x-3$	-	-	0	+	+	+
$x+4$	-	+	+	+	+	+
Jednadžba	$x=-\frac{1}{3}$	$x=\frac{3}{2}$		$0x=0$		$x=2$
Rješenja	$\emptyset$	$x=\frac{3}{2}$		$x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$		$x=2$

Rješenja zadatka su svi $x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$.

36) **Riješiti jednadžbu** $||x-1|-1|=2,\ x\in R$.

Rješenje:

1° $x\in(-\infty,1]$

$|-(x-1)-1|=2 \Rightarrow |-x|=2,$

$1^\circ 1)$ $x\in(-\infty,0]$

$-x=2 \Rightarrow x=-2\in(-\infty,0]$

$1^\circ 2)$ $x\in[0,1]$

$-(-x)=2 \Rightarrow x=2\notin[0,1]$;

$2^\circ)$ $x\in[1,\infty)$

$|(x-1)-1|=2 \Rightarrow |x-2|=2,$

$2^\circ 1)$ $x\in[1,2]$

$-(x-2)=2 \Rightarrow x=0\notin[1,2]$

$2^\circ 2)$ $x\in[2,\infty)$

$x-2=2 \Rightarrow x=4\in[2,\infty)$.

Rješenja jednadžbe su, dakle, $x_1=-2,\ x_2=4$.

37) **Riješiti jednadžbu** $|||x-1|-1|-1|=2,\ x\in R$ (a).

Rješenje:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$1^\circ)$ $x\in(-\infty,1]$

(a) $\Rightarrow ||-(x-1)-1|-1|=2 \Rightarrow ||-x|-1|=2$ (b)

$-x=0 \Rightarrow x=0,$

$1^\circ 1)$ $x\in(-\infty,0]$

(b) $\Rightarrow |-x-1|=2$ (c), $-x-1=0 \Rightarrow x=-1,$

$1^\circ 1.1)$ $x\in(-\infty,-1]$

(c) $\Rightarrow -x-1=2 \Rightarrow x=-3\in$ $\in(-\infty,-1]$

$1^\circ 1.2)$ $x\in[-1,0]$

(c) $\Rightarrow -(-x-1)=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=1\notin[-1,0]$,

$1^\circ 2)$ $x\in[0,1]$

(b) $\Rightarrow |-(-x)-1|=2 \Rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow -(x-1)=2$ (zbog $x-1\le 0$, $\forall x\in[0,1]$) $\Rightarrow x=-1\notin[0,1]$;

$2^\circ)$ $x\in[1,\infty)$

(a) $\Rightarrow ||(x-1)-1|-1|=2 \Rightarrow ||x-2|-1|=2$ (d)

$x-2=0 \Rightarrow x=2,$

$2^\circ 1)$ $x\in[1,2]$

(d) $\Rightarrow |-(x-2)-1|=2 \Rightarrow |-x+1|=2 \Rightarrow -(-x+1)=2$ (zbog $-x+1\le 0$, $\forall x\in[1,2]$) $\Rightarrow x=3\notin[1,2]$,

$2^\circ 2)$ $x\in[2,\infty)$

(d) $\Rightarrow |(x-2)-1|=2 \Rightarrow |x-3|=2$ (e), $x-3=0 \Rightarrow x=3,$

$2^\circ 2.1)$ $x\in[2,3]$

(e) $\Rightarrow -(x-3)=2 \Rightarrow x=1\notin[2,3]$

$2^\circ 2.2)$ $x\in[3,\infty)$

(e) $\Rightarrow x-3=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=5\in[3,\infty)$.

Tabelarni prikaz rješenja zadatka bi izgledao ovako:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\|x-1\|$		$-x+1$		$-x+1$		$-x+1$		$x-1$		$x-1$		$x-1$	
$\|x-1\|-1$		$-x$		$-x$		$-x$		$x-2$		$x-2$		$x-2$	
		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\|\|x-1\|-1\|$		$-x$		$-x$		x		$-x+2$		$x-2$		$x-2$	
$\|\|x-1\|-1\|-1$		$-x-1$		$-x-1$		$x-1$		$-x+1$		$x-3$		$x-3$	
		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\|\|\|x-1\|-1\|-1\|$		$-x-1$		$x+1$		$-x+1$		$x-1$		$-x+3$		$x-3$	
		$-x-1=2$		$x+1=2$		$-x+1=2$		$x-1=2$		$-x+3=2$		$x-3=2$	
		$x=-3$		$x=1$		$x=-1$		$x=3$		$x=1$		$x=5$	
Rješenja		$x=-3$,		$\emptyset$		$\emptyset$		$\emptyset$		$\emptyset$		$x=5$	

Rješenja zadatka su, dakle: $x_1=-3,\ x_2=5$.

38) Riješiti jednadžbu $|x^2-7x+10|-|x-3|=6$.

Rješenje:

$x^2-7x+10=0 \Rightarrow x=2$ i $x=5$, $x-3=0 \Rightarrow x=3$; $2,3,5$.

x	$-\infty$		2		3		5		$+\infty$
$x^2-7x-10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Jednadžba		$x^2-6x+1=0$		$x^2-8x+19=0$		$x^2-6x+13=0$		$x^2-8x+7=0$	
Rješenja		$x=3-2\sqrt{2}$		$\emptyset$		$\emptyset$		$x=7$	

Rješenja jednadžbe su, dakle: $x_1=3-2\sqrt{2},\ x_2=7$.

39) Riješiti sustav jednadžbi: $|x-y|=2,\ |x|+|y|=4,\ x,y\in R$.

Rješenje:

$1^\circ)$ $x\ge 0,\ y\ge 0$

$1^\circ 1)$ $x\ge y\ge 0$

$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3,\ y=1$,

$1^\circ 2)$ $y\ge x\ge 0$

$\left.\begin{array}{l} -x+y=2 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1,\ y=3$;

$2^\circ)$ $x\le 0\le y$

$\left.\begin{array}{l} -x+y=2 \\ -x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=2$, kontradikcija, sustav jedn. nema rješenja;

$3^\circ)$ $x\le 0,\ y\le 0$

$3^\circ 1)$ $0\ge x\ge y$

$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ -x-y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-1,\ y=-3$,

$3^\circ 2)$ $0\ge y\ge x$

$\begin{array}{l} -x+y=2 \\ -x-y=4 \end{array} \Rightarrow x=-3,\ y=-1$;

$4^\circ)$ $x\ge 0\ge y \Rightarrow$ sustav jedn. nema rješenja.

Rješenja zadatka su: $(-3,-1), (-1,-3), (1,3), (3,1)$.

V j e ž b e :

40) $\dfrac{x-6|x|+14}{|x-2|+|x+2|}=\dfrac{3}{2}$, $x\in R$ (R: $x_1=-\frac{8}{7}$, $x_2=\frac{8}{5}$).

41) $||x-1|+|x+2||=3$, $x\in R$(R: $x\in[-2-1]$).

42) $||x+3|+|1-x||=2x-1$, $x\in R$. (R: $\emptyset$).

43) $|||1-x|\cdot 2-3|\cdot 4-5|=6$, $x\in R$ (R: $-\frac{15}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{31}{8}$).

44) $||||x|-2|-1|-2|=2$, $x\in R$(R: $-7,-3,-1,1,3,7$).

45) $|x^2-3|-1=0$, $x\in R$. (R: $\mp\sqrt{2}$, ∓ 2).

46) $|x-1|+|y-5|=1$
$|x-1|-y+5=0$, $x,y\in R$. (R: $(1/2,\ 11/2),(3/2,11/2)$).

47) $|x+y|=5$
$|xy|=6$, $x,y\in R$. (R: $(-6,1)$, $(-3-2)$, $(-2,-3)$, $(-1,6)$, $(1,-6)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(6,-1)$).

IV - RACIONALNI I CJELOBROJNI KORIJENI JEDNADŽBE SA CJELOBROJNIM KOEFICIJENTIMA

Ako je $x_o=\frac{p}{q}$ racionalan korijen jednadžbe
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_o=0$, $a_i\in Z$, $i=0,1,\ldots,n$ (1),
tada $p|a_o$ i $q|a_n$. (2)

Ukoliko je jednadžba (1) normirana ($a_n=1$), tada je svako njeno racionalno rješenje x_o ujedno i cjelobrojno i vrijedi: $x_o|a_o$. (3)

Ako je $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_o$, a_o, $a_o,\ldots,a_n\in Z$ i ako su $P(0)$ i $P(1)$ neparni brojevi, tada jednadžba (1) nema cjelobrojnih korijena. (4)

Ako je $x_o=p$ cjelobrojni korijen jednadžbe (1), tada za svaki cijeli broj k vrijedi: $p-k\,|\,P(k)$. (5)

Ako je $x_o=\frac{p}{q}$ racionalan korijen jednadžbe (1), tada za svaki cijeli broj k vrijedi: $p-kq\,|\,P(k)$. (6)

Inače, svaka jednadžba $a_nx^n+\ldots+a_o=0$, $a_o,\ldots,a_n\in R$,

ima točno n korijena $x_1,\ldots,x_n\in C$ za koje vrijedi $(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=0$, tj. $x^n-(x_1+x_2+\ldots+x_n)x^{n-1}+(x_1x_2+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}\mp\ldots+(-1)^n\cdot x_1x_2\ldots x_n=0$. (7)

Z a d a c i :

48) Riješiti jednadžbu $2x^3-11x^2+22x-15=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Faktori slobodnog člana -15 su: $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$, a faktori vodećeg člana 2 su: $\pm1,\pm2$, pa za svako racionalno rješenje $x=\frac{p}{q}$ vrijedi: $x\in\{\pm1,\pm3,\pm5,\pm15,\pm1/2,\pm3/2,\pm5/2,\pm15/2\}$. Direktnom provjerom ustanovljavamo da je $x_1=\frac{3}{2}$ (u eliminaciji elemenata posljednjeg skupa možemo koristiti i (6)), pa iz $(2x^3-11x^2+22x-15):(x-3/2)=x^2-4x+5$ izlazi $x^2-4x+5=0$, tj. $x_{2,3}=2\pm i$.

49) Riješiti jednadžbu $x^4-15x^2-10x+24=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Kako je zadana jednadžba normirana, svako njeno racionalno rješenje je cjelobrojno. Analognim postupkom kao u prethodnom zadatku nalazimo da je $x_1=1$ jedno njeno rješenje. Iz $x^3+x^2-14x-24=0$ dobivamo na sličan način drugo rješenje $x_2=-2$. Na kraju iz $x^2-x-12=0$ dobivamo preostala 2 rješenja: $x_3=-3$, $x_4=4$.

Vježbe:

50) $x^4+4x^3-x^2+16x-20=0$, $x\in C$. (R: $x_1=-5$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\mp 2i$).

51) $x^7+4x^4+5x^2-3=0$, $x\in Q$. (R: $\emptyset$).

V- KOMPLEKSNI KORIJENI SA CJELOBROJNIM KOMPONENATAMA JEDNADŽBE SA CJELOBROJNIM KOEFICIJENTIMA

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ako je } x_1=a+bi,\ a,b\in R,\ b\neq0, \text{ kompleksan korijen jednadžbe}\\ a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_o=0,\ a_i\in R,\ i=0,1,\ldots n, \text{ tada je to i}\\ x_2=\bar{x}_1=a-bi.\end{array}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ako je } x=a+bi,\ a,b\in Z,\ b\neq0, \text{ kompleksan korijen jednadžbe}\\ a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_o0=,\ a_i\in Z,\ i=0,1,\ldots,n, \text{ tada}\end{array}\right\}(2)$$
vrijedi: $(a^2+b^2)\,|\,a_o$.

Zadaci:

52) Riješiti jednadžbu $x^4+4x^3+9x^2+4x+8=0, \quad x\in C$.

Riješenje:

Kako su ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 faktori slobodnog člana 8 i kako je: $1=0^2+1^2$, $2=1^2$, $4=0^2+2^2$, $8=2^2+2^2$, tada ćemo kompleksna rješenja sa cjelobrojnim komponentama zdane jednadžbe, prema (2), tražiti izmedju brojeva: $\pm i$, $\pm 1\pm i$, $\pm 2i$, $\pm 2\pm 2i$. Direktnom provjerom nalazimo da je $x_1=i$ jedno rješenje zadane jednadžbe. Prema (1) je tada i $x_2=\overline{x}_1=-i$ drugo rješenje te jednadžbe. Ostala 2 rješenja možemo takodjer tražiti direktnom provjerom (primjenom (2), ako su i ta rješenja kompleksna sa cjelobrojnim komponentama, odnosno primjenom IV, ako su ona racionalna) ili dijeljenjem lijeve strane jednadžbe sa $(x-x_1)\,(x-x_2)=(x-i)\,(x+i)=x^2+1$, čime dobivamo: $(x^4+4x^3+9x^2+4x+8):(x^2+1)=x^2+4x+8$, pa iz $x^2+4x+8=0$ izlazi $x_{3,4}=-2\mp 2i$.

Vježbe:

53) Riješiti jednadžbu $x^4-4x^3+10x^2+12x-39=0, \quad x\in C$.

(R: $x_{1,2}=2\mp 3i$, $x_{3,4}=\mp\sqrt{3}$).

VI - RJEŠAVANJE JEDNADŽBI VIŠEG STUPNJA SA CJELOBROJNIM KOEFICIJENTIMA METODOM GRUPIRANJA ČLANOVA I UVODJENJEM NOVE NEPOZNANICE

Zadaci:

54) Riješiti jednadžbu $(x+5)^4+(x+3)^4=2, \quad x\in C$.

Riješenje:

Supstitucijom $x+4=t$ dobivamo:

$$(t+1)^4+(t-1)^4=2$$
$$t^4+6t^2=0$$
$$t^2(t^2+6)=0$$
$$t_{1,2}=0,\ t_{3,4}=\mp i\sqrt{6}$$
$$x_1=x_2=-4,\quad x_{3,4}=-4\mp i\sqrt{6}.$$

55) Riješiti jednadžbu $x^4-8x+63=0, \quad x\in C$.

Riješenje:

$$(x^4+16x^2+64)-(16x^2+8x+1)=0$$
$$(x^2+8)^2=(4x+1)^2$$
$$|x^2+8|=|4x+1|$$
$$x^2+8=\mp(4x+1)$$
$$x^2-4x+7=0 = x_{1,2}= 2\mp i\sqrt{3}$$
$$x^2+4x+9=0 = x_{3,4}= -2\mp i\sqrt{5}\ .$$

56) Riješiti jednadžbu $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35, \quad x\in C$.

Riješenje:

$$(12(3x^2+5x+2)+1)(3x^2+5x+2)=35$$
$$3x^2+5x+2=t$$
$$(12t+1)t=35,\ 12t^2+t-35=0,\ t_1=-\frac{7}{4},\ t_2=\frac{5}{3}$$
$$12x^2+20x+15=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\mp 2\sqrt{5}\,i}{6}$$
$$9x^2+15x+1=0 \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-5\mp\sqrt{21}}{6}\ .$$

57) Riješiti jednadžbu $32x^4-48x^3-10x^2+21x+5=0, \quad x\in C$.

Riješenje:

$$2\cdot(4x^2-3x)^2-7\cdot(4x^2-3x)+5=0$$
$$4x^2-3x=t$$
$$2t^2-7t+5=0,\quad t_1=1,\ t_2=\frac{5}{2}$$
$$4x^2-3x-1=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{4},\ x_2=1$$
$$8x^2-6x-5=0 \Rightarrow x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=\frac{5}{4}\ .$$

58) Riješiti jednadžbu $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}, \quad x\in C$.

Riješenje:

$x=0$ nije rješenje jednadžbe. Dijeljenjem obje strane jednadžbe sa $\frac{x}{x}$ dobivamo: $\dfrac{x-10+15x^{-1}}{x-6+15x^{-1}}=\dfrac{3}{x-8+15x^{-1}}$. Supstitucijom $x+15x^{-1}=t$ dobivamo: $\dfrac{t-10}{t-6}=\dfrac{3}{t-8}$, $t^2-21t+98=0$, $t_1=7$, $t_2=14$, odakle je: $x_{1,2}=\frac{1}{2}(7\mp i\sqrt{11})$, $x_{3,4}\,7\mp\sqrt{34}$.

59) Riješiti jednadžbu $x=1-1986(1-1986x^2)^2$, $x\in C$.

Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l}1-x=1986(1-1986x^2)^2\\ 1-1986x^2=t\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}1-x=1986t^2\\ 1-1986x^2=t\end{array}\right\}\Rightarrow 1986(t^2-x^2)=t-x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-x)(1986(t+x)-1)=0,$$

1°) $$\left.\begin{array}{l}t-x=0\Rightarrow t=x\\ 1-1986x^2=t\end{array}\right\}\Rightarrow 1-1986x^2=x\Rightarrow 1986x^2+x-1=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{7945}}{3972},$$

2°) $$\left.\begin{array}{l}1986(t+x)-1=0\Rightarrow t=\frac{1}{1986}-x\\ 1-1986x^2=t\end{array}\right\}\Rightarrow 1-1986x^2=\frac{1}{1986}-x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1986^2x^2-1986x-1985=0\Rightarrow x_{3,4}=\frac{1\mp5\sqrt{397}}{3972}.$$

60) Riješiti jednadžbu $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$, $x\in R$.

Rješenje:

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku:

$$(x^2-2x)^2+8(x^2-3x+3)=0.$$

Kako je $(x^2-2x)^2\geq 0$ i $x^2-3x+3>0$ (zbog $D<0$) za svaki realan broj x, tada je lijeva strana jednadžbe uvijek pozitivna, a desna jednaka nuli, pa jednadžba nema rješenja.

61) Riješiti jednadžbu $(x+7)^7-(x^7+7^7)=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Iz $(x+7)^7-(x^7+7^7)=0$ slijedi:

$(x+7)(x+7)^6-(x+7)(x^6-7x^5+7^2x^4-7^3x^3+7^4x^2-7^5x+7^6)=0$, tj.

$49x(x+7)(x^2+7x+49)^2=0$, odakle je:

$$x_1=0,\ x_2=x_3=-\frac{7}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{2}i,\ x_4=x_5=-\frac{7}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{2}i.$$

V j e ž b e :

62) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$, $x\in C$.

(R: $\frac{1}{2}(-5\mp i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-5\mp\sqrt{13})$).

63) $x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$, $x\in R$. (R: $\emptyset$).

VII - IRACIONALNE JEDNADŽBE

Jednadžbe kod kojih se nepoznanice pojavljuju pod korijenom zovu se iracionalne jednadžbe.

Ako tražimo realna rješenja jednadžbe, tada kod parnih korijena uzimamo da je radikand ≥ 0.

Z a d a c i :

64) Riješiti jednadžbu $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}+1=0$, $x\in R$.

Rješenje:

Lijeva strana jednadžbe je pozitivna, a desna jednaka nuli, pa jednadžba nema rješenja.

65) Riješiti jednadžbu $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=7$, $x\in R$.

Rješenje:

Funkcija $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}$ je strogo rastuća funkcija (pa stim i injektivna), pa kao takva samo jednom može na domeni $D_f=[\frac{2}{3},\infty)$ poprimiti vrijednost 7. Direktnom provjerom izlazi da je $f(2)=7$, tj. da je $x=2$ rješenje zadane jednadžbe.

66) Riješiti jednadžbu $\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3$, $x\in R$.

Rješenje:

Množenjem jednadžbe sa $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{6-x}$ i korištenjem formule $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ dobivamo: $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{6-x}=3$, odakle kubiranjem izalzi: $\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}\cdot(\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{6-x})=6$, $\sqrt[3]{(x+3(6-x)}\cdot 3=6$, $x^2-3x-10=0$, $x_1=-2$, $x_2=5$.

67) Riješiti jednadžbu $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$, $x\in R$.

Rješenje:

Supstitucijom $t=\sqrt{x-1}\geq 0$, tj. $x=t^2+1$ dobivamo $\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}=1$, $|t-2|+|t-3|=1$, $t\in[2,3]$, a odatle: $\sqrt{x-1}\in[2,3]$, $2\leq\sqrt{x-1}\leq 3/^2$, $4\leq x-1\leq 9$, $5\leq x\leq 10$, $x\in[5,10]$.

68) Riješiti jednadžbu $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-3x-4}=3\sqrt{2}$, $x\in R$.

Rješenje:

Iz uvjeta $x^2-3x+2\geq 0$ i $x^2-3x-4\geq 0$ izlazi da je $x\in R\setminus(-1,4)$ (a).

Supstitucijom $x^2-3x=t$ iz zadane jednadžbe dobivamo:
$\sqrt{t+2}+\sqrt{t-4}=3\sqrt{2}\ /^2$, $t^2-2t-8=10-t$, $t=6$, a odatle:
$x^2-3x-6=0$, $x_{1,2}=\frac{3\mp\sqrt{33}}{2}\in R\setminus(-1,4)$.

69) Riješiti jednadžbu $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$, $x\in R$.
Rješenje:
Supstitucijom $\sqrt[3]{2-x}=u$, $\sqrt{x-1}=v\geq 0$ izlazi:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{2-x}=u/^3\\ \sqrt{x-1}=v/^2\\ u+v=1\end{array}\right|+\Bigg\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}u^3+v^2=1\\ u+v=1\\ x=2-u^3=v^2+1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}u^3+(1-u)^2=1\\ v=1-u\\ x=2-u^3=v^2+1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}u(u^2+u-2)=0\\ x=2-u^3\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}u_1=0,u_2=-2,u_3=1\\ x=2-u^3\end{array}\right\}\Rightarrow x_1=2,x_2=10,x_3=1.$$

70) Riješiti jednadžbu $\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=m$, $x\in R$, gdje je m realan broj.
Rješenje:
Kako $\sqrt{3+x}$ i $\sqrt{5+x}$ moraju biti nenegativne vrijednosti, tada iz zadane jednadžbe izlazi da je $m\geq 0$ (a).
Analogno iz $m-\sqrt{5+x}=\sqrt{3+x}\geq 0$ izlazi da je $m\geq\sqrt{5+x}$, a odatle (kvadriranjem) da je $x\leq m^2-5$ (b).
Iz $\sqrt{3+x}=m-\sqrt{5+x}$ kvadriranjem izlazi: $2m\sqrt{5+x}=m^2+2$, a odatle ponovnim kvadriranjem dobivamo: $x=\frac{m^4-16m^2+4}{4m^2}$ (c).

Iz (b) i (c) izlazi: $\frac{m^4-16m^2+4}{4m^2}\leq m^2-5$, $m^2\geq 2$, $|m|\geq\sqrt{2}$, a odatle zbog (a) dobivamo da je $m\geq\sqrt{2}$ (d).
Dakle, rješenje zadane jednadžbe je $x=\frac{m^4-16m^2+4}{m^2}$, $m\in[\sqrt{2},\infty)$.

71) Riješiti jednadžbu $\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}-28=0$
$x,y\in R$.
Rješenje:
Uvjeti: $x-2>0$ i $y-1>0\Rightarrow x>2$ i $y>1$ (a)
Supstitucijom: $\sqrt[4]{x-2}=u>0$, $\sqrt[4]{y-1}$ $v>0$ (b) izlazi:

$\frac{36}{u^2}+\frac{4}{v^2}+4u^2+v^2-28=0$, $(\frac{6}{u}-2u)^2+(\frac{2}{v}-v)^2=0$, $\frac{6}{u}-2u=0$ i $\frac{2}{v}-v=0$, $u=\sqrt{3}>0$ i $v=\sqrt{2}>0$, a odatle prema (b): $x-2=9$ i $y-1=4$, tj. $x=11>2$ i $y=5>1$. Rješenje zadatka je: $(11,5)$.

72) Riješiti sustav jednadžbi: $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3$,
$\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5$, $\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4$, $x,y,z\in R$.
Rješenje:
Supstitucijom: $\sqrt{x+y}=a$, $\sqrt{y+z}=b$, $\sqrt{z+x}=c$ (a), dolazimo do sustava jednadžbi: $a+b=3$, $b+c=5$, $c+a=4$ (b). Zbrajanjem tih jednadžbi dobivamo: $a+b+c=6$ (c). Iz (b) i (c) izlazi: $a=1$, $b=2$, $c=3$, a odatle i iz (a) dolazimo do sustava jednadžbi: $x+y=1$, $y+z=4$, $z+x=9$, čije je rješenje: $(3,-2,6)$.

73) Riješiti sustav jednadžbi: $x^2+y\sqrt[3]{x^2y}=17$, $y^2+x\sqrt[3]{xy^2}=68$, $x,y\in R$.
Rješenje:
Izlučimo li iz prve jednadžbe $\sqrt[3]{x^2}$, a iz druge $\sqrt[3]{y^2}$ i podijelimo dobivene jednadžbe, dobivamo:
$\sqrt[3]{x^2/y^2}=1/4$, $y^2=64x^2$, $y=\mp 8x$, što uvrštenjem u drugu jednadžbu daje: $64x^2+4x^2=68$, $x^2=1$, $x=\mp 1$, $y=\pm 8$. Rješenja zadatka su: $(-1,8)$, $(-1,-8)$, $(1,8)$, $(1,-8)$.

74) Riješiti sustav jednadžbi: $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17}{4}$,
$x^2+xy+\sqrt{x(x+y)+4}=52$, $x,y\in R$.
Rješenje:
Zadani sustav jednadžbi možemo pisati u obliku:
$\frac{4x^2-2y^2}{x^2-(x^2-y^2)}=\frac{17}{4}$, $(x^2+xy+4)+\sqrt{x^2+xy+4}=56$. Iz prve jednadžbe je: $16x^2=25y^2$, $(\frac{x}{y})^2=(\frac{4}{5})^2$, $\frac{x}{y}=\pm\frac{4}{5}$, $y=\pm\frac{5}{4}x$ (a). Supstitucijom $\sqrt{x^2+xy+4}=t>0$ iz druge jednadžbe dobivamo: $t^2+t-56=0$, $t=7>0$, a odatle: $\sqrt{x^2+xy+4}=7$, $x^2+xy-45=0$ (b). Iz (a) i (b) dolazimo do rješenja zadatka: $(-15,12)$, $(15,-12)$, $(-5-4)$, $(5,4)$.
Vježbe:
75) $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=1$, $x\in R$. (R: $x\in[3,8]$).

76) $\sqrt{2x^2-5x+11} + \sqrt{2x^2-5x+6} = 5$, $x \in R$. (R: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2=2$).

77) $\sqrt{12 - 12/x^2 - x^2} + \sqrt{x^2 - 12/x^2} = 0$, $x \in R$. (R: $x = \mp 2$).

78) $\sqrt[3]{(1+x)^2} - (\sqrt[3]{1+x} - 1) \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+x}} = 1$, $x \in R$.
(R: $x_1=-2$, $x_2=-1$).

79) $\sqrt[n]{(x+a)^3} + 2\sqrt[n]{x^3} = 3\sqrt[n]{x^2(x+a)}$, $x \in R$. (R: $x = a/((-2)^n - 1)$).

80) $\sqrt{4x-y^2} - \sqrt{y+2} = \sqrt{4x^2+y}$, $x, y \in R$. (R: $(\frac{1}{2}, -1)$).

81) $\sqrt{\frac{y+1}{x-y}} + 2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 3$, $xy=3$, $x, y \in R$. (R: $(-2, -\frac{3}{2})$, $(3,1)$,
$(\frac{1-\sqrt{241}}{8}, \frac{-1-\sqrt{241}}{10})$, $(\frac{1+\sqrt{241}}{8}, \frac{-1+\sqrt{241}}{10})$).

82) $\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = y$, $x^4-y^4 = 144$, $x, y \in R$.
(R: $(\pm 2\sqrt{5}, 4)$, $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$).

VIII - EKSPONENCIJALNE JEDNADŽBE

Jednadžbe u kojima se nepoznanice pojavljuju u eksponentima zovu se eksponencijalne jednadžbe.

Pri rješavanju eksponencijalnih jednadžbi koristimo se formulama: $a^b = a^c$ $(a \neq 0) \Leftrightarrow a=1$ ili $b=c$,

$a^c = b^c$ $(a, b \neq 0) \Leftrightarrow c=0$ ili $a=b$,

$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, $a^1 = a$, $a^{-m} = 1/a^m$ $(a \neq 0)$, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$,

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$, $(a^m)^n = a^{mn}$,

$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$, $a^c : b^c = (a:b)^c$ $(b \neq 0)$.

Zadaci:

83) Riješiti jednadžbu $8^{\frac{x-3}{3x-2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[x-1]{0,5^{3x-1}}} = 2$, $x \in R$.

Rješenje:

Iz zadane jednadžbe dobivamo: $2^{\frac{3x-9}{3x-7}} \cdot 2^{-\frac{3x-1}{6x-6}} = 2$,

$2^{\frac{9x^2-48x+47}{(3x-7)(6x-6)}} = 2^1$, $\frac{9x^2-48x+47}{18x^2-60x+42} = 1$, $9x^2-12x-5=0$,

$x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$.

84) Riješiti jednadžbu $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$, $x \in R$.

Rješenje:

$3^{\frac{x-3}{2}} \cdot (3-1) = 2^{\frac{x-2}{3}} \cdot (1+2)$ $/:6 \Rightarrow 3^{\frac{x-5}{2}} = 2^{\frac{x-5}{3}}$ $/^6 \Rightarrow 27^{x-5} = 4^{x-5} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\frac{27}{4})^{x-5} = (\frac{27}{4})^0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5$.

85) Riješiti jednadžbu $\sqrt[x]{4} + \sqrt[x]{6} = \frac{52}{81} \cdot \sqrt[x]{9}$, $x \in R$.

Rješenje:

Dijeljenjem zadane jednadžbe sa $\sqrt[x]{9}/81$ dobivamo:

$81 \cdot ((\frac{2}{3})^{1/x})^2 + 81 \cdot (\frac{2}{3})^{1/x} - 52 = 0$. Supstitucijom $(\frac{2}{3})^{1/x} = t > 0$ dobivamo: $81t^2 + 81t - 52 = 0$, $t = \frac{4}{9} > 0$, a odatle: $(\frac{2}{3})^{1/x} = (\frac{2}{3})^2$,

$\frac{1}{x} = 2$, $x = \frac{1}{2}$.

86) Riješiti jednadžbu $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$, $x \in R$.

Rješenje:

Supstitucijom $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 1/(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = t > 0$ dobivamo:

$\frac{1}{t} + t = 4$, $t^2 - 4t + 1 = 0$, $t = 2 \mp \sqrt{3}$, a odatle: $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2 \mp \sqrt{3}$,
$(2+\sqrt{3})^{x/2} = (2+\sqrt{3})^{\mp 1}$, $\frac{x}{2} = \mp 1$, $x = \mp 2$.

87) Riješiti jednadžbu $(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} - \sqrt{x^2-8x-9}})^x +$
$+ (\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} + \sqrt{x^2-8x-9}})^x = 2^{x+1}$, $x \in R$.

Rješenje:

Uvjeti: $x^2-8x+7 \geq 0$, $x^2-8x-9 \geq 0$ i $x^2-8x+7 \geq \pm(x^2-8x-9)$ su ispunjeni za $x \in R \setminus (-1, 9)$ (a).

Supstitucijom $(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} - \sqrt{x^2-8x+9}})^x = u$, $2^x = v$ (b) izlazi:
$(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} + \sqrt{x^2-8x+9}})^x =$ (množenjem sa $\frac{u}{u}$) $= \frac{(\sqrt{16})^x}{u} = \frac{v^2}{u}$, tj.
$(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} + \sqrt{x^2-8x+9}})^x = \frac{v^2}{u}$ (c). S druge strane iz zadane jednadžbe izlazi: $(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} + \sqrt{x^2-8x+9}})^x = 2v-u$ (d). Iz (c) i (d) sada slijedi: $\frac{v^2}{u} = 2v-u$, $(u-v)^2 = 0$, $u=v$, $\frac{u}{v} = 1$, pa na osnovu (b) imamo: $(\frac{\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} - \sqrt{x^2-8x-9}}}{2})^x = 1$. Kako je prema (a) $x \neq 0$, tada izlazi: $\frac{\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} - \sqrt{x^2-8x-9}}}{2} = 1$,

$x^2-8x-9=0$, $x_1=-1\in R\setminus(-1,9)$, $x_2=9\in R\setminus(-1,9)$.

88) Riješiti sustav jednadžbi: $2^x+2^y=12$, $x+y=5$, $x,y\in R$.
Rješenje:

Iz druge jednadžbe je $y=5-x$ (a), što supstitucijom u prvu jednadžbu daje: $2^x+2^{5-x}=12$, $(2^x)^2-12\cdot 2^x+32=0$. Daljnjom supstitucijom $2^x=t>0$ (b), iz posljednje jednadžbe dobivamo: $t^2-12t+32=0$, tj. $t_1=4>0$ i $t_2=8>0$ (c). Iz (a), (b) i (c) izlazi: $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=2$.

89) Riješiti sustav jednadžbi: $x^p=y^q$, $x^y=y^x$, $x,y\in R$.
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} x^p=y^q \Rightarrow y=x^{p/q} \\ x^y=y^x \end{array}\right\} \Rightarrow x^{(x^{p/q})}=(x^{p/q})^x \Rightarrow x^{(x^{p/q})}=x^{(p/q)x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{p/q}=\frac{p}{q}x \;/ : x\neq 0 \Rightarrow x^{(p-q)/q}=p/q \,\big|^{q/(p-x)} \Rightarrow x=(p/q)^{q/(p-q)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=x^{p/q}=(p/q)^{p/(p-q)} \Rightarrow y=(p/q)^{p/(p-q)}.$$

Vježbe:

90) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$, $x\in R$. (R: $x_1=3$, $x_2=11$).

91) $2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0$, $x\in R$. (R: $x=1$).

92) $16^{-|x-2|}-4^{1-|x-2|}+1,75=0$, $x\in R$. (R: $x_1=3/2$, $x_2=5/2$).

93) $(2+\sqrt{3})^{x/2}+(2-\sqrt{3})^{x/2}=4^{x/2}$, $x\in R$. (R: $x=2$).

94) $(4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x=62$, $x\in R$. (R: $x=\mp 2$).

95) $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x=$
$=2^{\frac{x+4}{4}}$, $x\in R$. (R: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$).

96) $2^x\cdot 3^y=648$, $3^x\cdot 2^y=432$, $x,y\in R$. (R: $(3,4)$).

97) $x^{x+y}=y^{12}$, $y^{x+y}=x^3$, $x,y\in R$. (R: $(1,1)$, $(4,2)$).

98) $z^x=x$, $z^y=y$, $y^y=x$, $x,y,z\in R$. (R: $(1,1,1)$, $(4,2,\sqrt{2})$).

IX - LOGARITAMSKE JEDNADŽBE

Jednadžbe u kojima se nepoznanice pojavljuju u logaritmandu zovu se logaritamske jednadžbe.

Pri rješavanju logaritamskih jednadžbi koristimo se formulama:

$$\log_a b=c \Leftrightarrow b=a^c \quad (b>0,\ a>0,\ a\neq 1),$$

$$a^{\log_a x}=x,\ \log_a a=1,\ \log_a 1=0,$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y,\ \log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\ \log_a x^k=k\cdot\log_a x,$$

$$\log_a x=\log_b x/\log_b a,\ \log_a b=1/\log_b a,$$

$$\log_{(a^k)} x=\frac{1}{k}\cdot\log_a x,\ \log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x.$$

Zadaci:

99) Riješiti jednadžbu $x+2^x+\log_2 x=7$, $x\in R$.

Rješenje:

Prema definiciji logaritamske funkcije mora biti $x>0$. Funkcija $f(x)=x+2^x+\log_2 x$ je strogo rastuća funkcija (jer je suma 3 strogo rastuće funkcije), pa stim i injektivna funkcija, koja može poprimiti vrijednost 7 samo za jednu vrijednost od x. Lako se provjeri da je to $x=2$.

100) Riješiti jednadžbu $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$, $x\in R^+$.
Rješenje:

Logaritmiranjem jednadžbe dobivamo: $\sqrt{x}\cdot\log x=\frac{x}{2}\cdot\log x$, tj. $\log x(\sqrt{x}-\frac{x}{2})=0$. Iz $\log x=0$ izlazi $x_1=1>0$, a iz $\sqrt{x}-\frac{x}{2}=0$ dobivamo $x^2=4x$, tj. $x_2=4>0$.

101) Riješiti jednadžbu $x^{\log_2 25}=x^2\cdot 5^{\log_2 x}+x^{\log_2 5}$, $x\in R^+$.

Rješenje:

Supstitucijom $\log_2 x=t \Leftrightarrow x=2^t>0$ (a) iz zadane jednadžbe dobivamo: $(2^t)^{\log_2 25}=(2^t)^2\cdot 5^t+(2^t)^{\log_2 5}$, $2^{\log_2 25^t}=4^t\cdot 5^t+2^{\log_2 5^t}$, $25^t=4^t\cdot 5^t+5^t\ /25^t$, $(\frac{4}{5})^t+(\frac{1}{5})^t=1$, $t=1$, a odatle prema (a): $x=2>0$.

102) Riješiti jednadžbu $\log(\log x)+\log(\log x^3-2)=0$, $x\in R$.

Rješenje:

Iz uvjeta: $x>0$, $\log x>0$ i $\log x^3-2>0$ izlazi: $\log x>\frac{2}{3}$, tj. $x>10^{2/3}$ (a).

Iz zadane jednadžbe dobivamo:

$\log(\log x\,(\log x^3-2))=0$, $\log x\,(\log x^3-2)=1$, $3\log^2x-2\log x-1=0$.

Supstitucijom $\log x=t>\frac{2}{3}$ dobivamo: $3t^2-2t=0$, $t=1>\frac{2}{3}$, a odatle: $\log x=1$, $x=10>10^{2/3}$.

103) Riješiti jednadžbu $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$, $x\in R$.

Rješenje:

Iz uvjeta: $x+1>0$, $x+1\neq1$, $x-1>0$, $x-1\neq1$, $x^3-9x+8>0$ izlazi: $x>\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ (a). Korištenjem formule $\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b}$ iz zadane jednadžbe dobivamo: $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\frac{\log_{x+1}(x+1)}{\log_{x+1}(x-1)}=3$,

$\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot1=3\cdot\log_{x+1}(x-1)$, $x^3-9x+8=(x-1)^3$,

$(x-1)(x^2+x-8)=(x-1)(x-1)^2$, $(x-1)(x-3)=0$, $x=3>\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

104) Riješiti jednadžbu $\log_{5x-2}2+2\log_{5x-2}x=\log_{5x-2}(x+1)$, $x\in R$.

Rješenje:

Iz uvjeta: $x>0$, $5x-2>0$, $5x-2\neq1$ i $x+1>0$ izlazi: $x>\frac{5}{2}$ (a).

Iz zadane jednadžbe dobivamo: $\log_{5x-2}2x^2=\log_{5x-2}(x+1)$,

$2x^2=x+1$, $2x^2-x-1=0$, $x=\frac{1}{2}(1\mp3)<\frac{5}{2}$, pa prema (a) zadana jednadžba nema rješenja.

105) Riješiti jednadžbu $2\sqrt[3]{2\log^2_{16}x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0$, $x\in R$.

Rješenje:

Uvjet: $x>0$ (a). Korištenjem formule $\log_{(a^k)}x=\frac{1}{k}\cdot\log_a x$ iz zadane jednadžbe dobivamo: $\sqrt[3]{\log^2_2 x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0$.

Supstitucijom $\sqrt[3]{\log_2 x}=t \Leftrightarrow \log_2 x=t^3 \Leftrightarrow x=2^{(t^3)}$ (b)

odatle dobivamo: $t^2-t-6=0$, $t_1=-2$, $t_2=3$, pa prema (b) konačno imamo: $x_1=2^{-8}>0$, $x_2=2^{27}>0$.

106) Riješiti jednadžbu $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$, $x\in R$.

Rješenje:

Uvjeti: Kako je desna strana jednadžbe negativna, tada zbog $\log_x\sqrt{3x}\geq0$ izlazi da je $\log_3 x<0$, tj. $x<1$, pa, kako je i $x>0$, mora biti $x\in(0,1)$ (a).

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku: $\log^2_3x+\log_3x-2=0$, pa je prema (a) rješenje zadatka: $x=\frac{1}{9}\in(0,1)$.

107) Riješiti jednadžbu $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$, $x\in R$.

Rješenje:

Uvjet: $x>1$ (a). Iz zadane jednadžbe dobivamo:

$\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$, $|\sqrt{x-1}-1|+|\sqrt{x-1}+1|=$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$, $|\sqrt{x-1}-1|+\sqrt{x-1}+1=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

1°) $\sqrt{x-1}-1\geq0$, tj. $x\geq2$ (b).

Iz zadane jednadžbe dobivamo: $2\sqrt{x-1}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$,

$x=1+(\frac{1}{4})^{\sqrt{x-1}}$. Kako je lijeva strana jednadžbe ≥2, a desne <2, jednadžba nema rješenja.

2°) $\sqrt{x-1}-1<0$, tj. zbog (a): $x\in(1,2)$ (c).

Iz zadane jednadžbe dobivamo: $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=2$, $x=\frac{5}{4}\in(1,2)$.

108) Riješiti sustav jednadžbi: $\log_a x\cdot\log_a(xyz)=48$, $\log_a y\cdot\log_a(xyz)=12$, $\log_a z\cdot\log_a(xyz)=84$, $x,y,z\in R$, gdje je a pozitivan realan broj različit od 1.

Rješenje:

Zbrajanjem zadanih jednadžbi izlazi:

$(\log_a x+\log_a y+\log_a z)\cdot\log_a(xyz)=144$, $\log_a^2(xyz)=144$,
$\log_a(xyz)=\mp 12$, a odatle i iz zadanih jednadžbi dobivamo: $\log_a x=\mp 4$, $\log_a y=\mp 1$, $\log_a z=\mp 7$, pa su rješenja zadatka: (a^{-4},a^{-1},a^{-7}), (a^4, a, a^7).

109) Riješiti sustav jednadžbi: $\log_5 x+3^{\log_3 y}=7$, $x^y=5^{12}$, $x,y\in R$.

Rješenje:

Uvjeti: $x>0$ i $y>0$ (a). Iz prve jednadžbe je $y=7-\log_5 x$, što uvrštenjem u drugu jednadžbu daje $x^7=x^{\log_5 x}\cdot 5^{12}$. Logaritmiranjem po bazi 5 i supstitucijom $\log_5 x=t$ dobivamo jednadžbu $t^2-7t+12=0$, čija su rješenja $t_1=3$, $t_2=4$. Rješenja zadatka su: $(125,4)$, $(625,3)$.

110) Riješiti sustav jednadžbi: $\log_y x+\log_x y=5/2$, $x+y=a^2+a$, $x,y\in R$, gdje je a realan broj.

Rješenje:

Uvjeti: $x>0$ i $y>0 \Rightarrow a^2+a=x+y>0 \Rightarrow a(a+1)>0 \Rightarrow a\in R\setminus[-1,0]$ (a);
$x\neq 1$ i $y\neq 1 \Rightarrow a^2+a-2\neq 0 \Rightarrow a\in R\setminus\{-2,1\}$ (b).
Iz (a) i (b) izlazi: $a\in R\setminus[-1,0]\setminus\{-2,1\}$ (c).

Supstitucijom $\log_x y=\frac{1}{\log_y x}=t$ iz zadane jednadžbe dobivamo jednadžbu $2t^2-5t+2=0$, čija su rješenja: $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$.

$$1^\circ)\ \left.\begin{matrix}\log_x y=\frac{1}{2}\\ x+y=a(a+1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}y^2=x\\ x=y+a(a+1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1=(a+1)^2,\ y_1=-(a+1), & \text{za } a\in(-\infty,-1)\setminus\{-2\}\\ x_2=a^2,\ y_2=a, & \text{za } a\in(0,\infty)\setminus\{1\}\end{cases}.$$

$$2^\circ)\ \left.\begin{matrix}\log_x y=2\\ x+y=a(a+1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}x^2=y\\ y=-x+a(a+1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_3=-(a+1),\ y_3=(a+1)^2, & \text{za } a\in(-\infty,-1)\setminus\{-2\}\\ x_4=a,\ y_4=a^2, & \text{za } a\in(0,\infty)\setminus\{1\}\end{cases}.$$

V j e ž b e :

111) $x^{(7+\log x)/4}=10^{1+\log x}$, $x\in R$. (R: $x_1=10^{-4}$, $x_2=10$).

112) $\log\sqrt{2^{x(13-x)}}+11\cdot\log 5=11$, $x\in R$. (R: $x_1=2$, $x_2=11$).

113) $\sqrt{7^{2x^2-5x-6}}=(\sqrt{2})^{3\cdot\log_2 49}$, $x\in R$. (R: $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=4$).

114) $\log_4 x+\log_2 y=0$, $x^2-5y^2+4=0$, $x,y\in R$. (R: $(1,1)$).

115) $\log_2(x+y)-\log_4(x-y)=1$, $x^2-y^2=54$, $x,y\in R$. (R: $(\frac{15}{2}, -\frac{3}{2})$).

116) $3^x\cdot 2^y=576$, $\log_2(y-x)=2$, $x,y\in R$. (R: $(2,6)$).

117) $\log(x^2+y^2)=2$, $\log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y$, $x,y\in R$. (R: $(6,8),(8,6)$).

118) $\log(x^2+y^2)-1=\log 13$, $\log(x+y)-(\log(x-y)=3\log 2$, xy R (R: $(9,7)$).

119) $\log_{12}x\cdot(1/\log_x 2+\log_2 y)=\log_2 x$, $\log_2 x\cdot\log_3(x+y)=3\cdot\log_3 x$, $x,y\in R$. (R: $(2,6)$, $(6,2)$).

X - BINOMNE JEDNADŽBE

Jednadžbe oblika $ax^n+b=0$, $n\in N$ (1) zovu se binomne jednadžbe.

Rješavamo ih rastavljanjem binoma na faktore korištenjem formula:

$$\left.\begin{aligned}
&a^2-b^2=(a-b)\ (a+b),\\
&a^2+b^2=(a-bi)\ (a+bi),\\
&a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),\\
&a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2),\\
&a^m-b^m=(a-b)\ (a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}),\\
&a^{2m}-b^{2m}=(a+b)(a^{2m-1}-a^{2m-2}b\pm\ldots+ab^{2m-2}-b^{2m-1}),\\
&a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b\pm\ldots-ab^{2m-1}+b^{2m}),
\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

ili pak po formuli:

$$\left.\begin{aligned}
&x_{k+1}=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1,\\
&z=-\frac{b}{a},\ r=|z|,\ \varphi=\arg z.
\end{aligned}\right\}(3)$$

Z a d a c i :

120) Riješiti jednadžbu $x^4+1=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Prvi način: $(x^2+1)^2-2x^2=0$, $(x^2+1-x\sqrt{2})(x^2+1+x\sqrt{2})=0$,

$x_{1,2}=\frac{2\mp i\sqrt{2}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-2\mp i\sqrt{2}}{2}$.

Drugi način: $x^4=-1$, $x_{1,2,3,4}=\sqrt[4]{-1}$, $z=-1=-1+0i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

$\varphi=\pi$, $r=|z|=|-1|=1$, $x_{k+1}=\sqrt[n]{r}\cdot(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})=$

$=1\cdot(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})$, $k=0,1,2,3$,

$x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$,

$x_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

121) Riješiti jednadžbu $2x^3+13=0$, $x\in C$.

Rješenje:

$(\sqrt[3]{2}x)^3+(\sqrt[3]{13})^3=0$, $(\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{13})(\sqrt[3]{4}x^2-\sqrt[3]{26}x+\sqrt[3]{169})=0$,

$x_1=-\frac{\sqrt[3]{52}}{2}$, $x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{52}\mp i\sqrt[6]{73008}}{4}$.

122) Riješiti jednadžbu $3x^4-2=0$, $x\in C$.

Rješenje:

$(\sqrt[4]{3}x-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}x+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}x-i\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}x+i\sqrt[4]{2})=0$,

$x_{1,2}=\mp\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, $x_{3,4}=\mp i\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$.

Riješiti zadatak primjenom (3).

123) Riješiti jednadžbu $(4-x)^4=1$, $x\in C$.

Rješenje:

$(4-x)^4-1^4=0$, $(3-x)(5-x)\cdot(x^2-8x+17)=0$,

$x_1=3$, $x_2=5$, $x_{3,4}=4\mp i$.

V j e ž b e :

124) $x^6-64=0$, $x\in C$.
(R: $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\mp i\sqrt{3}$, $x_4=-2$, $x_{5,6}=1\mp i\sqrt{3}$).

XI - TRINOMNE JEDNADŽBE

Jednadžbe oblika $ax^{2n}+bx^n+c=0$, $n\in N$, $n>1$ (1) zovemo trinomne jednadžbe. Supstitucijom $x^n=t$ (2) svode se na kvadratne jednadžbe $at^2+bt+c=0$ (3).

Specijalno za $n=2$ dobivamo bikvadratnu jednadžbu $ax^4+bx^2+c=0$ (4).

Z a d a c i :

125) Riješiti jednadžbu $x^6-35x^3+216=0$, $x\in C$.

Rješenje:

$(x^3)^2-35x^3+216=0$

$x^3=t$

$t^2-35t+216=0$, $t_1=8$, $t_2=27$

1°) $x^3=8$, $x^3-2^3=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$, $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\mp i\sqrt{3}$

2°) $x^3=27$, $x^3-3^3=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$, $x_4=3$, $x_{5,6}=-\frac{3}{2}\mp\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

V j e ž b e :

126) $x^4-6x^2+25=0$, $x\in C$.
(R: $x_{1,2}=\mp(2-i)$, $x_{3,4}=\mp(2+i)$).

127) $x^{12}-63x^6-64=0$, $x\in C$.
(R: $x_{1,2}=\mp i$, $x_{3,4}=\mp\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$, $x_{5,6}=\mp\sqrt{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$,
$x_{7,8}=\mp 2$, $x_{9,10}=-1\mp i\sqrt{3}$, $x_{11,12}=1\mp i\sqrt{3}$).

XII - SIMETRIČNE (RECIPROČNE) JEDNADŽBE

Jednadžba $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_o=0$, $a_i\in R$, $i=0,1\ldots$ $\ldots,n$, kod kojih su simetrični koeficijenti (a_n,a_o), $(a_{n-1},a_1),\ldots$ jednaki ili suprotni, zovu se simetrične (recipročne) jednadžbe.

Ako je $x=x_o$ jedno rješenje simetrične jednadžbe, tada je i $x=\frac{1}{x_o}$ ili $x=-\frac{1}{x_o}$ takodjer rješenje te jednadžbe. Svako rješenje simetrične jednadžbe je različito od nule.

Ako je paran broj i ako su simetrični koeficijenti medjusobno jednaki, simetričnu jednadžbu dijelimo sa $x^{n/2}$, grupiramo simetrične članove i vršimo supstituciju $x+\frac{1}{x}=t$, odakle je:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2,\quad x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t,\ldots$$

Ako je n paran broj i ako su simetrični koeficijenti suprotni, tada je $a_{n/2}=0$. Rastavljanjem na faktore ovu jednadžbu svodimo na jednadžbu nižeg stupnja.

Ako je n neparan broj, tada je $x_1=1$ ili $x_1=-1$ jedno rješenje te jednadžbe (jer je jedino $\pm 1=\frac{1}{\pm 1}$), pa dijeljenjem te jednadžbe sa $x-x_1$ dobivamo jednadžbu nižeg i parnog stupnja, čiji postupak rješavanja je prethodno opisan.

Z a d a c i :

128) Riješiti jednadžbu $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Dijeljenjem jednadžbe sa $x^2\neq 0$ i grupiranjem članova dobivamo: $(x^2+1/x^2)-3(x+1/x)+4=0$. Supstitucijom $x+1/x=t$, odakle je $x^2+1/x^2=t^2-2$, dobivamo jednadžbu $t^2-3t+2=0$, čija su rješenja $t_1=1$, $t_2=2$. Iz $x+\frac{1}{x}=t_{1,2}$ dobivamo rješenja zadatka: $x_{1,2}=\frac{1}{2}(1\mp i\sqrt{3})$, $x_{3,4}=1$.

129) Riješiti jednadžbu $x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Zadana jednadžba je neparnog stupnja. Direktnom provjerom ustanovljavamo da je $x_1=-1$ jedno njeno rješenje, pa dijeljenjem $x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1$ sa $x+1$ dobivamo $x^4-3x^3+4x^2-3x+1$. Prema prethodnom zadatku rješenja jednadžbe $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$ (pa stim i zadane jednadžbe) su:

$x_{2,3}=\frac{1\mp i\sqrt{3}}{2}$, $x_4=x_5=1$.

130) Riješiti jednadžbu $15x^6-128x^5+275x^4-275x^2+128x-15=0$, $x\in C$.

Rješenje:

$15(x^6-1)-128x(x^4-1)+275x^2(x^2-1)=0$,

$15(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)-128(x-1)(x+1)(x^2+1)+275x^2\cdot(x-1)(x+1)=0$,

$(x-1)(x+1)(15x^4-128x^3+290x^2-128x+15)=0$,

$x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=3$, $x_5=\frac{1}{5}$, $x_6=5$.

131) Riješiti jednadžbu $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku: $(x^2+\frac{4}{x^2})+3\cdot(x-\frac{2}{x})-2=0$. Supstitucijom $x-\frac{2}{x}=t$, odakle je $x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4$, dobivamo jednadžbu $t^2+3t+2=0$, čija su rješenja: $t_1=-2$, $t_2=-1$. Rješenja zadatka su:

$x_{1,2}=-1\mp\sqrt{3}$, $x_3=-2$, $x_4=1$.

V j e ž b e :

132) $x^6-2x^5+4x^4-4x^3+4x^2-2x+1=0$, $x\in C$.

(R: $x_{1,2}=\mp i$, $x_{3,4}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_{5,6}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$).

133) $12x^5-56x^4+107x^3-107x^2+56x-12=0$, $x\in C$.

(R: $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_{3,4}=\frac{3\mp i\sqrt{7}}{4}$).

XIII - JEDNADŽBE 3. STUPNJA

Opći oblik jednadžbe 3. stupnja je $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ (1). Normiranjem i supstitucijom $x=y-\frac{B}{3A}$ (2) ona prelazi u normiranu jednadžbu 3. stupnja bez kvadratnog člana: $y^3+py+q=0$ (3).

Rješenja jednadžbe (3) su:

$$y_1=u+v,\quad y_2=-\frac{1}{2}(u+v)-\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i,\quad y_3=-\frac{1}{2}(u+v)+\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i \quad (4),$$

gdje je: $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}$, $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}$ (5).

Izraz: $D=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$ (6) zovemo diskrimenanta jednadžbe (3), a koristimo je za diskusiju rješenja te jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(a) } D>0 \Rightarrow \text{jedan korijen je realan, a 2 konjug.-kompl.,}\\
\text{(b) } D=0 \Rightarrow \text{sva 3 korijena su realna, od kojih su 2 jednaka,}\\
\text{(c) } D<0 \text{ (tzv. casus ireducibilis-"nesvodljiv" slučaj)}\\
\qquad \text{sva tri korijena su realna,}
\end{array}\right\}\ (7)$$

a dobivamo ih primjenom trigonometrijskog oblika kompleksnog broja ovako:

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1}=2\cdot\sqrt[3]{r}\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{3}, \quad k=0,1,2, \\ z=-\dfrac{q}{2}+i\sqrt{-D}, \quad r=|z|=\sqrt{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}, \quad \varphi=\arg z . \end{array}\right\} \quad (8)$$

Medjutim, ukoliko se može, jednostavnije je jednadžbu (1) riješiti rastavljanjem polinoma na faktore, odnosno traženjem racionalnih i kompleksnih korijena.

Zadaci:

134) Riješiti jednadžbu $x^3-6x-6=0$, $x\in C$.
Rješenje:

$D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=9-8=1>0$. Prema (5) je $u=\sqrt[3]{3+\sqrt{1}}=\sqrt[3]{4}$,

$v=\sqrt[3]{3-\sqrt{1}}=\sqrt[3]{2}$, pa su prema (4) rješenja zadatka:

$x_1=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$, $x_{2,3}=-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})\mp\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})i$.

135) Riješiti jednadžbu $x^3-12x-16=0$, $x\in C$.
Rješenje:

$D=64-64=0$, $u=v=\sqrt[3]{8}=2$, $x_1=4$, $x_2=x_3=-2$.

Riješite zadatak rastavljanjem polinoma na faktore, odnosno traženjem cjelobrojnih korijena jednadžbe.

136) Riješiti jednadžbu $x^3-3x+1=0$, $x\in C$.
Rješenje:

$D=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}<0$. Prema (8) je: $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=a+bi$, $r=|z|=1$,

$\varphi=\arg z=\frac{2\pi}{3}$ (zbog $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=-\sqrt{3}$), $x_{k+1}=2\sqrt[3]{1}\cdot\cos\frac{2\pi/3+2k\pi}{3}$,
$k=0,1,2$, pa je:

$x_1=2\cos\frac{2\pi}{9}\approx1{,}53209$, $x_2=2\cos\frac{8\pi}{9}\approx-1{,}87939$,

$x_3=2\cos\frac{14\pi}{9}\approx0{,}34730$.

137) Riješiti jednadžbu $x^3-3x^2+3=0$, $x\in C$.
Rješenje:

Supstitucijom $x=y+1$ (a), prema (2) dobivamo jednadžbu:
$(y+1)^3-3(y+1)^2+3=0$, tj. $y^3-3y+1=0$, čija su rješenja prema prethodnom zadatku: $y_1=1{,}53209$, $y_2=-1{,}87939$, $y_3=0{,}34730$, pa su prema (a) rješenja zadane jednadžbe:
$x_1=2{,}53209$, $x_2=-0{,}87939$, $x_3=1{,}34730$.

Vježbe:

138) $x^3-3x-2=0$, $x\in C$. (R: $x_1=2$, $x_2=x_3=-1$).

139) $x^3+15x+124=0$, $x\in C$. (R: $x_1=2$, $x_{2,3}=2\mp3\sqrt{3}i$).

140) $x^3-3x-1=0$, $x\in C$.
(R: $x_1=1{,}87939$, $x_2=-1{,}53209$, $x_3=-0{,}34730$).

141) $x^3-3x^2+1=0$, $x\in C$.
(R: $x_1=2{,}87939$, $x_2=-0{,}53209$, $x_3=0{,}65270$).

142) Riješiti jednadžbu $x^3+ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in R$, ako njeni korijeni čine: a) aritmetički, b) geometrijski niz.

(R: a) $x_{1,3}=\frac{1}{3a}(-a^2\pm\sqrt{a^4-27ac})$, $x_2=-\frac{a}{3}$).

b) $x_{1,3}=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt[3]{c}\mp\sqrt{a^2-2a\sqrt[3]{c}-3\sqrt[3]{c^2}}\right)$, $x_2=-\sqrt[3]{c}$.

Uputa: koristiti: $a=-(x_1+x_2+x_3)$, $b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$,

$c=-x_1,x_2,x_3$, te $x_2=\frac{1}{2}(x_1+x_3)$ kod aritmetičkog

niza, odnosno $x_2=\sqrt{x_1x_3}$ kod geometrijeskog niza.).

XIV - JEDNADŽBE 4. STUPNJA

Opći oblik jednadžbe 4. stupnja glasi:
$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ (1). Normiranjem i supstitucijom $x=y-\frac{B}{4A}$ (2) ona prelazi u normiranu jednadžbu 4. stupnja bez kubnog člana:

$y^4+py^2+qy+r=0$ (3).

Jednadžbi (3) pridružujemo tzv. rezolventu

$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$ (4).

Ako su z_1,z_2,z_3 rješenja jednadžbe (4), tada su rješenja jednadžbe (3) dana izrazima:

$$\left.\begin{array}{l} y_1=\frac{1}{2}(-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}), \quad y_2=\frac{1}{2}(-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}), \\ y_3=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}), \quad y_4=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}), \text{ za } q>0 \end{array}\right\} (5)$$

odnosno:

$$\left.\begin{array}{l} y_1=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}), \quad y_2=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}), \\ y_3=\frac{1}{2}(-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}), \quad y_4=\frac{1}{2}(-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}), \text{ za } q<0. \end{array}\right\} (6)$$

Nakon toga iz (2) i (5), odnosno (2) i (6) dobivamo rješenja jednadžbe (1).

Diskusija:

(a) Sva 3 korijena rezolvente (4) su realna i pozitivna $\Rightarrow$ svi korijeni jednadžbe (3) su realni,

(b) Sva 3 korijena rezolvente (4) su realna i to jedan pozitivan i 2 negativna i medjusobno različita $\Rightarrow$ svi korijeni jednadžbe (3) su kompleksni,

(c) Sva 3 korijena rezolvente (4) su realna i to jedan pozitivan i 2 negativna i medjusobno jednaka $\Rightarrow$ 2 korijena jednadžbe (3) su realna, a 2 konjugirano kompleksna,

(d) Jedan korijen rezolvente (4) je realan i pozitivan, a 2 konjugirano-kompleksna $\Rightarrow$ 2 korijena jednadžbe (3) su realna, a 2 konjugirano-kompleksna. (7)

Medjutim, ukoliko je moguće, jednostavnije je jednadžbu (1) riješiti rastavljanjem polinoma na faktore, odnosno traženjem racionalnih i kompleksnih korijena.

Z a d a c i :

143) Riješiti jednadžbu $x^4+8x^2+16x+20=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Rezolventa zadane jednadžbe $x^4+8x^2+16x+20=0$ (a) prema (4) je $z^3+16z^2-16z-256=0$ (b), a rješenja rezolvente (b) (do kojih najlakše dolazimo traženjem cjelobrojnih korijena) su: $z_1=-16$, $z_2=-4$, $z_3=4$. Kako je $q=16>0$, rješenja jednadžbe (a) su prema (5):

$x_1=\frac{1}{2}(-4i-2i-2)=-1-3i$, $x_2=\frac{1}{2}(-4i+2i+2)=1-i$,

$x_3=\frac{1}{2}(4i-2i+2)=1+i$, $x_4=\frac{1}{2}(4i+2i-2)=-1+3i$.

Riješite zadatak primjenom V.

144) Riješiti jednadžbu $x^4+4x^3+14x^2+36x+45=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Prema (2) supstitucijom $x=y-1$ (a) dobivamo jednadžbu $y^4+8y^2+16y+20=0$, čija su rješenja prema prethodnom zadatku: $y_{1,2}=-1\mp 3i$, $y_{3,4}=1\mp i$, pa su prema (a) rješenja zadatka:

$x_{1,2}=-2\mp 3i$, $x_{3,4}=\mp i$.

Riješite zadatak primjenom V.

145) Riješiti jednadžbu $x^4+2x^3+x^2-1=0$, $x\in C$.

Rješenje:

Prvi način: Supstitucijom $x=y-\frac{1}{2}$ (a) dobivamo jednadžbu $16y^4-8y^2-15=0$ (b), čija su rješenja: $y_{1,2}=\mp i\sqrt{3}/2$, $y_{3,4}=\mp\sqrt{5}/2$. Prema (a) rješenja zadane jednadžbe su:

$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_{3,4}=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Drugi način: $(x^2+x)^2-1$, $x^2+x=\mp 1$, $x^2+x\pm 1=0$,

$x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\mp\sqrt{3}i)$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\mp\sqrt{5})$.

V j e ž b e :

146) $x^4-15x^2+10x+24=0$, $x\in C$. (R: $x_1=-4$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=3$).

147) $x^4-x^2-2x+2=0$, $x\in C$. (R: $x_1=x_2=1$, $x_{3,4}=-1\mp i$).

148) $x^4-4x^3+5x^2-4x+4=0$, $x\in C$. (R: $x_1=x_2=2$, $x_{3,4}=\mp i$).

149) $x^4+4x^3-8x-4=0$, $x\in C$. (R: $x_{1,2}=-2\mp\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\mp\sqrt{2}$).

150) $x^4+x^3-8x^2-3x+6=0$, $x\in C$. (R: $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\mp\sqrt{3}$).

151) Ako su x_1,x_2,x_3,x_4 rješenja jednadžbe $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a,b,c,d\in R$, dokazati da je tada: $a=-(x_1+x_2+x_3+x_4)$, $b=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$, $c=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)$, $d=x_1x_2x_3x_4$.

XV - SUSTAV JEDNADŽBI VIŠEG STUPNJA

Z a d a c i :

152) Riješiti sustav jednadžbi: $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=1$, $x^3+y^3+z^3=1$, $x,y,z\in R$.

Rješenje:

Prvi način:

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\Rightarrow 1-3xyz=$
$=1\cdot(1-xy-yz-zx)\Rightarrow 3xyz=xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)=$
$=\frac{1}{2}\cdot(0-0)=0\Rightarrow xyz=0$ (b).

1^{o}) $x=0\Rightarrow y+z=1$ i $y^2+z^2=1$ i $y^3+z^3=1$,

$y+z=1/^2\Rightarrow y^2+z^2+2yz=1\Rightarrow 1+2yz=1\Rightarrow yz=0$ (c).

$1^\circ 1)$ $y=0 \Rightarrow z=1$, $1^\circ 2)$ $z=0 \Rightarrow y=1$.
Analogno izlazi:
$2^\circ)$ $y=0 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,0,1),(1,0,0)\}$,
$3^\circ)$ $z=0 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,1,0),(1,0,0)\}$, pa su rješenja zadatka: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$.
Drugi način:
Uvodimo oznake za tzv. simetrične polinome: $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+yz+zx$, $\sigma_3=xyz$. Tada zadani sustav jednadžbi poprima oblik: $\sigma_1=1$, $\sigma_1-2\sigma_2=1$, $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=1$, čije je rješenje

$\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=0$, pa imamo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \Rightarrow x+y=1-z \\ \left.\begin{array}{l} xy+yz+zx=0/\cdot z \\ xyz=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+y)z^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2(1-z)=0 \Rightarrow z_{1,2}=0 \text{ i } z_3=1,$$

$$1^\circ)\ \left.\begin{array}{l} z=0 \\ x+y=1 \\ xy=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,1,0),(1,0,0)\},$$

$$2^\circ)\ \left.\begin{array}{l} z=1 \\ x+y=0 \\ xy=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,0,1)\}.$$

Rješenja zadatka su: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$.

153) Riješiti sustav jednadžbi: $x_1+x_2x_3x_4=2$, $x_2+x_1x_3x_4=2$, $x_3+x_1x_2x_4=2$, $x_4+x_1x_2x_3=2$, $x_1,x_2,x_3,x_4\in R$.

Rješenje:
Množenjem zadane jednadžbe redom sa x_1,x_2,x_3,x_4 dobivamo:
$(x_1-1)^2=1-x_1x_2x_3x_4$, $(x_2-1)^2=1-x_1x_2x_3x_4$, $(x_3-1)^2=1-x_1x_2x_3x_4$, $(x_4-1)^2=1-x_1x_2x_3x_4$, odakle je $(x_1-1)^2=(x_2-1)^2=(x_3-1)^2=(x_4-1)^2$, odnosno $|x_1-1|=|x_2-1|=|x_3-1|=|x_4-1|$.

$1^\circ)$ Sva 4 izraza x_i-1, $i=1,2,3,4$, su istog predznaka $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=x_2=x_3=x_4 \\ x_1+x_2x_3x_4=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=1.$$

$2^\circ)$ Tri od 4 izraza x_i-1, $i=1,2,3,4$, su istog, a četvrti suprotnog predznaka. Neka su na primjer x_1-1, x_2-1, x_3-1 istog, a x_4-1 od njih suprotnog predznaka. Tada je $x_1=x_2=x_3=2-x_4$, pa iz $x_4+x_1x_2x_3=2$ izlazi $2-x_1+x_1^3=2$, tj. $x_1(x_1-1)(x_1+1)=0$,

odakle je ili $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=2$, što ne zadovoljava zadani sustav jednadžbi, ili $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, što smo već imali u 1°, ili $x_1=x_2=x_3=-1$, $x_4=3$, što zadovoljava zadani sustav jednadžbi. Cikličkom zamjenom dolazimo do još 3 rješenja: $(-1,-1,3,-1)$, $(-1,3,-1,-1)$, $(3,-1,-1,-1)$.

$3^\circ)$ Dva od 4 izraza x_i-1, $i=1,2,3,4$, su pozitivna, a 2 negativna. Neka su npr. x_1-1, x_2-1 suprotnog predznaka od x_3-1, x_4-1. Tada je $x_1=x_2=2-x_3=2-x_4$, pa iz $x_1+x_2x_3x_4=2$ izlazi $x_1+x_1(2-x_1)(2-x_1)=2$, tj. $(2-x_1)(x_1-1)^2=0$. Odatle je ili $x_1=x_2=2$, $x_3=x_4=0$, što ne zadovoljava zadani sustav jednadžbi, ili $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, što smo već imali u 1°.
Dakle, rješenja zadatka su:
$(1,1,1,1)$, $(-1,-1,-1,3)$, $(-1,-1,3,-1)$, $(-1,3,-1,-1)$, $(3,-1,-1,-1)$.

154) Riješiti sustav jednadžbi: $x^2=a+(y-z)^2$, $y^2=b+(z-x)^2$, $z^2=c+(x-y)^2$, $x,y,z\in R$, gdje su a,b,c pozitivni realni brojevi.
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-(y-z)^2=a \\ y^2-(z-x)^2=b \\ z^2-(x-y)^2=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-y+z}{y+z-x}=\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{y-z+x}{z+x-y}=\dfrac{b}{c} \\ z^2-(x-y)^2=c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a+b)x-(a+b)y-(a-b)z=0\ /\cdot(b+c) \\ (-b+c)x+(b+c)y-(b+c)z=0\ /\cdot(-a+b) \\ z^2-(x-y)^2=c \end{array}\right. \Big|+ \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a+b)x-(a+b)y-(a-b)z=0 \\ y=\dfrac{b(a+c)}{a(b+c)}x \\ z^2-(x-y)^2=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{c(a+b)}{a(b+c)}x \\ y=\dfrac{b(a+c)}{a(b+c)}x \\ z^2-(x-y)^2=c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{4bc}{a(b+c)^2}x^2=1 \\ y=\dfrac{b(a+c)}{a(b+c)}x \\ z=\dfrac{c(a+b)}{a(b+c)}x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\mp\dfrac{b+c}{2}\sqrt{\dfrac{a}{bc}} \\ y=\mp\dfrac{c+a}{2}\sqrt{\dfrac{b}{ca}} \\ z=\mp\dfrac{a+b}{2}\sqrt{\dfrac{c}{ab}} \end{array}\right.$$

155) Riješiti sustav jednadžbi: $\frac{xyz}{x+y}=2$, $\frac{xyz}{y+z}=1,2$, $\frac{xyz}{z+x}=1,5$, $x,y,z\in R$.

Rješenje:

Uzimajući recipročne vrijednosti jednadžbi zadanog sustava, dolazimo do sustava jednadžbi: $1/yz + 1/zx = 1/2$, $1/xy + 1/zx = 5/6$, $1/xy + 1/yz = 2/3$, odakle dobivamo: $xy=2$, $yz=6$, $zx=3$ (a). Množenjem jednadžbi (a) dobivamo: $(xyz)^2=36$, tj. $xyz=\mp 6$ (b). Iz (a) i (b) dobivamo rješenja zadatka: $(-1,-2,-3)$, $(1,2,3)$.

156) Riješiti sustav jednadžbi: $x=\dfrac{2z^2}{1+z^2}$, $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $z=\dfrac{2y^2}{1+y^2}$, $x,y,z\in R$.

Rješenje:

Iz samog zadatka proizlazi da su $x,y,z\geqslant 0$. Nadalje iz $(z-1)^2\geqslant 0$ izlazi da je $z^2-2z+1\geqslant 0$, tj. $\dfrac{2z}{1+z^2}\leq 1$, pa je

$x=z\cdot\dfrac{2z}{1+z^2}\leq z$. Analogno se pokazuje da vrijedi: $z\leq y$ i $y\leq x$, pa je $x=y=z$. Zbog toga je $x=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $x(x-1)^2=0$, $x_1=0$ ili $x_2=x_3=1$. Rješenja zadatka su: $(0,0,0)$ (jednostruko rješenje), $(1,1,1)$ (dvostruko rješenje).

157) Riješiti sustav jednadžbi: $x^3+4y=y^3+16x$, $\dfrac{1+y^2}{1+x^2}=5$, $x,y\in R$.

Rješenje:

$x^3-16x=y^3-4y$, $5x^2=y^2-4$,

1°) $x\neq 0 \Rightarrow y\neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^3-16x=y^3-4y \\ 5x^2=y^2-4 \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2-16}{5x}=y \\ 5x^2=y^2-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x^2=\left(\frac{x^2-16}{5x}\right)^2-4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 31x^4+33x^2-64=0 \Rightarrow x_{1,2}=\mp 1 \Rightarrow y_{1,2}=\mp 2$.

2°) $x=0 \Rightarrow y^2-4=0 \Rightarrow y_{3,4}=\mp 2$.

Rješenja zadatka su: $(-1,3),(1,-3),(0,-2),(0,2)$.

158) Riješiti sustav jednadžbi: $y+2=(3-x)^3$, $(2z-y)(y+2)=9+4y$, $x^2+z^2=4x$, $x,y,z\in R$ (1), uz uvjet: $z\geqslant 0$ (2).

Rješenje:

Iz (1) izlazi: $(3-x)^3=y+2$, $(y+3-z)^2=z^2-2z$, $(x-2)^2=4-z^2$ (3),

odakle je: $z^2-2\geqslant 0$ i $4-z^2\geqslant 0$, odnosno: $z\in R\setminus(0,2)$ i $z\in[-2,2]$, tj. $z\in[-2,0]\cup\{2\}$ (4). Iz (2) i (4) je $z\in\{0,2\}$, pa su prema (1) rješenja zadatka: $(4,-3,0)$, $(2,-1,2)$.

V j e ž b e :

159) $x_1x_2\ldots x_n/x_i=a_ix_i$, $x_i\in R$, $a_i\in R^+$, $i=1,2,\ldots,n$.
(R: $x_i=\sqrt{\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_n}/a_i}$, $i=1,1,\ldots,n$).

160) $x+y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=3$, $xyz=1$, $x,y,z\in R$. (R: $x=y=z=1$).

161) $x+y+z=9$, $1/x+1/y+1/z=1$, $xy+yz+zx=27$, $x,y,z\in R$.
(R: $x=y=z=3$).

162) $3(x+1/x)=4(y+1/y)=5(z+1/z)$, $xy+yz+zx=1$, $x,y,z\in R$.
(R: $(-1/3,-1/2,-1)$, $(1/3,1/2,1)$).

163) $yz=ax$, $zx=by$, $xy=cz$, $x,y,z\in R$, $a,b,c\in R^+$.
(R: $(0,0,0)$, $(\sqrt{bc},\sqrt{ca},\sqrt{ab})$, $(\sqrt{bc},-\sqrt{ca},-\sqrt{ab})$, $(-\sqrt{bc},\sqrt{ca},-\sqrt{ab})$, $(-\sqrt{bc},\sqrt{ca},\sqrt{ab})$).

164) $x+y=axy$, $y+z=byz$, $z+x+cxz$, $x,y,z\in R$, $a,b,c\in R$, $a\neq b+c$, $b\neq c+a$, $c\neq a+b$. (R: $(0,0,0)$, $\left(\frac{2}{a-b+c},\frac{2}{a+b-c},\frac{2}{-a+b+c}\right)$).

165) $y^2+z^2+2ax=3a^2$, $x+y=2a$, $x,y\in R$, $a\in R$. (R: $(a,a,0)$).

166) $x+y=z$, $x^2+y^2=z$, $x^3+y^3=z$, $x,y,z\in R$.
(R: $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,2)$).

167) $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$, $xyz=2$, $x,y,z\in R$.
(R: $(-1,2,-1)$, $(2,-1,-1)$).

168) $2(y-2)(y-z)=z-2$, $4x^2+z^2=4z$, $8x^3+z=3xy$, $z\leq 2$, $x,y,z\in R$.
(R: $(-1,2,2)$, $(0,1,0)$).

XVI - TRIGONOMETRIJSKE JEDNADŽBE

Jednadžbe u kojima se nepoznanice pojavljuju kao nezavisne varijable trigonometrijskih funkcija zovu se trigonometrijske jednadžbe.

Pri rješavanju trigonometrijskih jednadžbi koristimo formule:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin x=\sin(\pi-x)=\sin(3\pi-x)=-\sin(\pi+x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right),\\
&\cos x=\cos(2\pi-x)=-\cos(\pi-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right),\\
&\operatorname{tg} x=-\operatorname{tg}(\pi-x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right),\\
&\operatorname{ctg} x=-\operatorname{ctg}(\pi-x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right);
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(x+2k\pi)=\sin x,\ \cos(x+2k\pi)=\cos x,\ \operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg} x,\\
&\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg} x,\quad k\in Z;
\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ \text{ i }\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad (3)$$

Z a d a c i :

169) Riješiti jednadžbu $\sin(x+75^\circ)=-\sin 15^\circ$.

Rješenje:

$\sin(x+75^\circ)=\sin(180^\circ+15^\circ)$, $\sin(x+75^\circ)=\sin 195^\circ$,

$1^\circ)$ $x+75^\circ=195^\circ+k_1\cdot 360^\circ,\ k_1\in Z \Rightarrow x_1=120^\circ+k_1\cdot 360^\circ,\ k_1\in Z$,

$2^\circ)$ $x+75^\circ=3\cdot 180^\circ-195^\circ+k_2\cdot 360^\circ,\ k_2\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=270^\circ+k_2\cdot 360^\circ,\ k_2\in Z$.

170) Riješiti jednadžbu $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Rješenje:

$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$,

$1^\circ)$ $x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-x+2k_1\pi,\ k_1\in Z \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4}+k_1\pi,\ k_1\in Z$,

$2^\circ)$ $x+\frac{\pi}{3}=2\pi-\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+2k_2\pi,\ k_2\in Z \Rightarrow 0x=\frac{5\pi}{6}+2k_2\pi,\ k_2\in Z$,

kontradikcija (lijeva strana je nula, a desna strana nije nula ni za jedan cijeli broj k_2).

171) Riješiti jednadžbu $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg} x$.

Rješenje:

$\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \Rightarrow 2x-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+x+k\pi,\ k\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{5\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi,\ k\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k_1\pi,\ k_1=k+1\in Z$.

172) Riješiti jednadžbu $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$.

Rješenje:

Dijeljenjem jednadžbe sa $\sin x\neq 0$ (jer u protivnom iz $\sin x=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos x=0$, što je nemoguće) izlazi: $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$, a odatle:

$x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in Z$.

173) Riješiti jednadžbu $\cos x-\sqrt{3}\cdot\sin x=1$.

Rješenje:

Jednadžba $a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=c$ ima rješenja ako je $a^2+b^2\geq c^2$.

U našem slučaju je $1^2+(-\sqrt{3})^2=4>1=1^2$, pa zadana jednadžba ima rješenje.

Supstitucijom $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ iz zadane jednadžbe dobivamo: $\frac{1-t^2}{1+t^2}-\sqrt{3}\cdot\frac{2t}{1+t^2}=1$, $t^2+\sqrt{3}t=0$,

$t(t+\sqrt{3})=0$, $t_1=0$, $t_2=-\sqrt{3}$.

$1^\circ)$ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \Rightarrow \frac{x}{2}=k_1\pi,\ k_1\in Z \Rightarrow x_1=2k_1\pi,\quad k_1\in Z$,

$2^\circ)$ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}+k_2\pi, k_2\in Z \Rightarrow x_2=\frac{4\pi}{3}+2k_2\pi,\quad k_2\in Z$.

Na kraju direktnom provjerom ustanovljavamo da za $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, tj. za $x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$, zadana jednadžba nema rješenja.

174) Riješiti jednadžbu $\sin^2 x-\cos^2 x-5\sin x+3=0$.

Rješenje:

$\sin^2 x-(1-\sin^2 x)-5\sin x+3=0$, $2\sin^2 x-5\sin x+3=0$. Supstitucijom $\sin x=t\in[-1,1]$ dobivamo jednadžbu $2t^2-5t+3=0$, čije rješenje, koje se nalazi u intervalu $[-1,1]$, iznosi $1/2$. Iz $\sin x=1/2$ izlazi: $x_1=\frac{\pi}{6}+2k_1\pi$, $k_1\in Z$, $x_2=\frac{5\pi}{6}+2k_2\pi$, $k_2\in Z$.

175) Riješiti jednadžbu $5\operatorname{tg} x+7\operatorname{ctg} x=12$.

Rješenje:

Množenjem jednadžbe sa $\operatorname{tg} x\neq 0$ dobivamo: $5\operatorname{tg}^2 x-12\operatorname{tg} x+7=0$,

čija su rješenja $\operatorname{tg} x_1=\frac{5}{7}$, $\operatorname{tg} x_2=1$, pa su rješenja zadatka:

$x_1=\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{7}+k_1\pi$, $k_1\in Z$, $x_2=\frac{\pi}{4}+k_2\pi$, $k_2\in Z$.

176) Riješiti jednadžbu $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}$.

Rješenje:

$$\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sin\frac{x}{2} \Rightarrow \sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2}=0 \text{ ili } 1-\cos\frac{x}{2}=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1=2k_1\pi,\ k_1\in Z$ ili $x_2=4k_2\pi,\ k_2\in Z$.
Rješenja zadatka su: $x=2k\pi,\ k\in Z$.

177) Riješiti jednadžbu $\sin^3x+\cos^3x=1$.
Rješenje:
Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku: $\sin^3x+\cos^3x=\sin^2x+\cos^2x$, tj. $\sin^2x(\sin x-1)+\cos^2x(\cos x-1)=0$. Pošto je $\sin^2x\geq 0$ i $\sin x\leq 1$, tada je $\sin^2x(\sin x-1)\leq 0$. Analogno tome je i $\cos^2x(\cos x-1)\leq 0$, pa iz posljednje jednadžbe slijedi da je $\sin^2x(\sin x-1)=0$ i $\cos^2x(\cos x-1)=0$, tj. ($\sin x=0$ ili $\sin x=1$) i ($\cos x=0$ ili $\cos x=1$), odnosno ($\sin x=0$ i $\cos x=1$) ili ($\cos x=0$ i $\sin x=1$), odakle je:
$x_1=2k_1\pi,\ k_1\in Z,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k_2\pi,\ k_2\in Z$.
Riješite zadatak primjenom (3).

178) Riješite jednadžbu $\sin^{10}x+\cos^{10}x=1$.
Rješenje:
Iz $\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^5=1$ binomnim razvojem dobivamo:
$\cos^4 2x+2\cos^2 2x-3=0$, odakle je: $x=k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in Z$.

179) Riješiti jednadžbu $\sin x+\cos x-3\sin x\cos x-1=0$.
Rješenje:
Supstitucijom: $\sin x+\cos x=u$, $\sin x\cos x=v$ (a), iz zadane jednadžbe dobivamo: $u-3v=1$ (b). Nadalje imamo:

$$\left.\begin{array}{l}\sin x+\cos x=u\ /^2\\ \sin x\cos x=v\ /\cdot(-2)\end{array}\right|+\Rightarrow v=\frac{1}{2}(u^2-1)\quad (c).$$

Iz (b) i (c) je

$$(u,v)\in\left\{\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{9}\right),\ (1,0)\right\}.$$

1°) $\left.\begin{array}{l}\sin x+\cos x=-\frac{1}{3}\\ \sin x\cos x=-\frac{4}{9}\end{array}\right\}\Rightarrow \sin x\left(-\frac{1}{3}-\sin x\right)=-\frac{4}{9}\Rightarrow 9\sin^2x+3\sin x-4=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_{1,2}=\arcsin\frac{-3\pm\sqrt{153}}{18}+2k_1\pi,\ k_1\in Z,\\ x_{3,4}=-\arcsin\frac{-3\pm\sqrt{153}}{18}+2k_2\pi,\ k_2\in Z.\end{array}\right.$$

2°) $\left.\begin{array}{l}\sin x+\cos x=1\\ \sin x\cos x=0\end{array}\right\}\Rightarrow(\sin x=0$ i $\cos x=1)$ ili $(\sin x=1$ i $\cos x=0)\Rightarrow$
$\Rightarrow x_5=k_3\pi,\ k_3\in Z,\ x_6=\frac{\pi}{2}+2k_4\pi,\ k_4\in Z$.

180) Riješiti jednadžbu $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.
Rješenje:
Dijeljenjem jednadžbe sa 2^x izlazi:
$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}\right)^x+\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}\right)^x=1$, $\left(\sqrt{\frac{1+\cos30^\circ}{2}}\right)^x+\left(\sqrt{\frac{1-\cos30^\circ}{2}}\right)^x=1$,
$(\cos15^\circ)^x+(\sin15^\circ)^x=1$, $x=2$.

181) Riješiti jednadžbu $2\cos2^x-\sin2^x=1$.
Rješenje:
Supstitucijom: $\operatorname{tg}\frac{2^x}{2}=t$, $\sin2^x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos2^x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ izlazi:
$3t^2+2t-1=0$, $t_1=-1$, $t_2=1/3$.

1°) $\operatorname{tg}2^{x-1}=-1\Rightarrow 2^{x-1}=\frac{3\pi}{4}+k_1\pi,\ k_1\in N_0\Rightarrow x-1=\log_2\left(\frac{3\pi}{4}+k_1\pi\right),\ k_1\in N_0\Rightarrow x_1=1+\log_2\left(\frac{3\pi}{4}+k_1\pi\right),\ k_1\in N_0$.

2°) $\operatorname{tg}2^{x-1}=\frac{1}{3}\Rightarrow 2^{x-1}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+k_2\pi,\ k_2>\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}}{\pi},\ k_2\in Z\Rightarrow$
$\Rightarrow x-1=\log_2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+k_2\pi\right),\ k_2>\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}}{\pi},\ k_2\in Z\Rightarrow$
$\Rightarrow x_2=1+\log_2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+k_2\pi\right),\ k_2>\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}}{\pi},\ k_2\in Z$.

182) Riješiti jednadžbu $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x-2=0$.
Rješenje:
Uvjeti: $(\cos x>0,\ \sin x>0,\ \cos x\neq1,\ \sin x\neq1)\Rightarrow x\in\left(2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in Z$ (a). Supstitucijom $t=\log_{\cos x}\sin x=1/\log_{\sin x}\cos x$ iz zadane jednadžbe dobivamo: $t^2-2t+1=0$, $t_1=t_2=1$ (c), pa imamo: $\log_{\cos x}\sin x=1$, $\sin x=\cos x$, $\operatorname{tg}x=1$ (d). Iz (a), (c) i (d) slijedi:
$x_{1,2}=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$.

183) Riješiti jednadžbu $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg}x)-\operatorname{ctg}(\operatorname{tg}x)=0$.
Rješenje:
$\operatorname{tg}(\operatorname{ctg}x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}x\right)\Rightarrow\operatorname{ctg}x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}x+k\pi\Rightarrow\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x=\frac{2k+1}{2}\pi\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2k+1}{2}\pi\Rightarrow\frac{1}{\sin2x}=\frac{(2k+1)\pi}{4}\Rightarrow\sin2x=\frac{4}{(2k+1)\pi}$ (a).

Iz $|\sin 2x| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{4}{(2k+1)\pi}\right| \le 1 \Rightarrow k \in Z\setminus\{-1,0\}$ (b), pa su rješenja jednadžbe (a):

$x_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin}\frac{4}{(2k+1)\pi} + 2k_1\pi$, $k\in Z\setminus\{-1,0\}$, $k_1 \in Z$,

$x_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin}\frac{4}{(2k+1)\pi} + 2k_2\pi$, $k\in Z\setminus\{-1,0\}$, $k_2\in Z$.

184) Riješiti jednadžbu $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1-\cos(\pi \sin 2x)$.
Rješenje:
Korištenjem formule $\sin^2 t = \frac{1-\cos t}{2}$ dobivamo:
$\cos(\pi\cos^2 x) = \cos(\pi\sin 2x)$, $\pi\cos^2 x = \mp\pi\sin 2x + 2k\pi$, $k\in Z$,
$\cos^2 x \pm 2\sin x\cos x = 0$ (zbog k=0).
Rješenje zadatka su:

$x_1 = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $k_1\in Z$, $x_{2,3} = \mp \operatorname{arc\,ctg} 2 + k_2\pi$, $k_2\in Z$.

185) Riješiti jednadžbu $\log_3|\pi x| + \log_{|\pi x|} 3 =$

$$= \frac{2}{\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y)+2} \; .$$

Rješenje:
$\log_3|\pi x| + 1/\log_3|\pi x| = 2/(\sin(x+y)-1)^2$.
lijeva strana jednadžbe je ≥ 2, a desna ≤ 2, pa je svaka strana jednadžbe jednaka 2, tj. mora biti: $\log_3|\pi x| = 1$ i $\sin(x+y) = 1$, odnosno: $|\pi x| = 3$ i $x+y = \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$. Rješenja zadatka su:

$x_1 = -\frac{3}{\pi}$, $y_1 = \frac{3}{\pi}+\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$, $k_1\in Z$,

$x_2 = \frac{3}{\pi}$, $y_2 = -\frac{3}{\pi}+\frac{\pi}{2}+2k_2\pi$, $k_2\in Z$.

186) Riješiti jednadžbu $x^2 + 6x\sin(xy) + 9 = 0$.
Rješenje:
$(x+3\sin(xy))^2 + 9(1-\sin^2(xy)) = 0 \Rightarrow (x+3\sin(xy))^2 + (3\cos(xy))^2 = 0 \Rightarrow x+3\sin(xy)=0$ (a) i $3\cos(xy)=0$ (b). Iz (b) je $\sin(xy) = \pm 1$, pa iz (a) izlazi da je $x=\mp 3$, na osnovu čega iz zadane jednadžbe izlazi: $(\mp3)^2 + 6\cdot(\mp3)\cdot\sin(\mp3y)+9=0$, $\sin 3y = -1$,
$y = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$, $k\in Z$. Rješenja zadatka su:

$\left(-3, \frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$, $k\in Z$.

187) Riješiti jednadžbu $x^n - 1 = 0$, $n\in N$, $x\in C$.
Rješenje:
Primjenom Moavreove formule

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, $k=0,1,\dots,n-1$,

$z = a+bi$, $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$, izlazi:

$x = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=0,1,\dots,n-1$, što možemo pisati i u obliku: $x=\varepsilon^k$, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, $k=0,1,\dots n-1$.

188) Diskutirati u ovisnosti od $m\in R$ rješenja jednadžbe
$(m-2)\cos^2 x - 2m\cos x + 2m+3 = 0$.

Rješenje:
Kako je $\cos x\in[-1,1]$, tada prema zadatku 14 izlazi: Jednadžba ima jedno rješenje za $m\in(-1, -\frac{1}{5}]$, a dva rješenja za $m\in[-2,-1]$, dok za $m\in R\setminus[-2, -\frac{1}{5}]$ jednadžba nema rješenja.

189) Diskutirati u ovisnosti od $m\in R$ rješenja jednadžbe

$$(\sin x+\cos x) + \frac{1+(\sin x+\cos x)}{\sin x\cos x} = m.$$

Rješenje:
Supstitucijom $\sin x+\cos x = t$ (a), odnosno $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$ (b) (što se dobiva kvadriranjem (a)), zadana jednadžba poprima oblik: $(t+1)(t^2-(m+1)t+m+2)=0$. Zbog $\sin x\cos x\ne 0$ je $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x - 1 = (\sin x+\cos x)^2 - 1 = t^2-1 = (t-1)(t+1) \ne 0$, a odatle $t+1\ne0$, pa prethodna jednadžba poprima oblik:
$t^2-(m+1)t+m+2=0$ (c).
Kako je $t = \sin x+\cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ i kako je $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le1$, tada vrijedi:
$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ (d).
Prema formulama II-(11) i II-(12) izlazi da jednadžba (c) (pa stim i zadana jednadžba) ima jedno rješenje u intervalu $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ za $m\in R\setminus[2-3\sqrt{2}, 2+3\sqrt{2})$, a oba rješenja u tom intervalu za $m\in[2-3\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2}]$.

190) Riješiti jednadžbu: $2\operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,sin} 2x$.

Rješenje:
$\sin(2\arcsin x)=\sin(\arcsin 2x) \Rightarrow 2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) = 2x /:2 \Rightarrow x\cdot\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = x \Rightarrow x\cdot\sqrt{1-x^2}=x \Rightarrow x(\sqrt{1-x^2}-1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=0.$

191) Riješiti jednadžbu $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x} - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{1+x} = \frac{\pi}{12}$.

Rješenje:
Korištenjem formula $\operatorname{tg}(u-v)=\frac{\operatorname{tg}u-\operatorname{tg}v}{1+\operatorname{tg}u\cdot\operatorname{tg}v}$, $\operatorname{ctg}u = \frac{1}{\operatorname{tg}u}$,

$\operatorname{tg}u = \frac{1-\cos 2u}{1+\cos 2u}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dobivamo:

$$\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{\frac{1}{1+x}}}{1+\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{1+x}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\ \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}},\ x^2=4-2\sqrt{3},\ |x|=|1-\sqrt{3}|,$$

$x = \mp(1-\sqrt{3})$.

192) Riješiti jednadžbu $\operatorname{sign}\log_{1/10}(\log_3 x)=\operatorname{tg}x$.

Rješenje:
Prema definiciji logaritamske funkcije mora biti $\log_3 x>0$, tj. $x>1$. Kako je:

$$\log_{1/10}(\log_3 x) \lesseqgtr 0 \text{ za } \begin{cases}\log_3 x>1\\ \log_3 x=1\\ \log_3 x\in(0,1)\end{cases}, \text{ tj. za } \begin{cases}x>3\\ x=3\\ 1<x<3\end{cases},$$

tada je: $\operatorname{sign}\log_{1/10}(\log_3 x) = \begin{cases}-1, & \text{za } x>3\\ 0, & \text{za } x=3\\ 1, & \text{za } 1<x<3\end{cases}$

1°) $x\in(1,3) \Rightarrow \operatorname{tg}x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z \Rightarrow$ jednadžba nema rješenja jer $\frac{\pi}{4}+k\pi\notin(1,3)$ ni za jedan $k\in Z$,

2°) $x=3 \Rightarrow 0=\operatorname{tg}3 \Rightarrow$ jednadžba nema rješenja jer je $\operatorname{tg}3\neq 0$,

3°) $x\in(3,\infty) \Rightarrow \operatorname{tg}x=-1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}+k\pi,\ k\in N_0$.

193) Riješiti sustav jednadžbi: $\sin x\cos y = \frac{1}{4}$, $\cos x\sin y = \frac{3}{4}$.

Rješenje:
Zbrajanjem jednadžbi dobivamo: $\sin(x+y)=1$, $x+y=\frac{\pi}{2}+2k_2\pi,\ k_2\in Z$, $y=\frac{\pi}{2}-x+2k_2\pi,\ k_2\in Z$ (a). Uvrštenjem (a) u prvu jednadžbu dobivamo: $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, $\sin x = \pm\frac{\pi}{6}+k_1\pi$, $k_1\in Z$, odakle je prema (a): $y=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{6}+(2k_2-k_1)\pi,\ k_1, k_2\in Z$.

Rješenja zadatka su, dakle:
$(\frac{\pi}{6}+k_1\pi,\ \frac{\pi}{3}+(2k_2-k_1)\pi)$, $(-\frac{\pi}{6}+k_1\pi,\ \frac{2\pi}{3}+(2k_2-k_1)\pi)$,
$k_1, k_2\in Z$.

194) Riješiti sustav jednadžbi: $\sqrt{\sin x}\cos y=0$,
$2\sin^2 x-\cos 2y=0$.

Rješenje:
Uvjet: $\sin x\geq 0$ (a). Kvadriranjem prve jednadžbe i sredjivanjem druge dobivamo: $\sin x\ \cos^2 y=0$ (b) i
$2(\sin^2 x-\cos^2 y)=1$ (c).

1°) $\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi,\ k\in Z \overset{(c)}{\Rightarrow} \cos^2 y = -\frac{1}{2}<0$, kontradikcija,

2°) $\cos^2 y=0 \Rightarrow \cos y=0 \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \overset{(c)}{\Rightarrow} \sin x=\mp\sqrt{2}/2 \overset{(a)}{\Rightarrow}$
$\overset{(a)}{\Rightarrow} \sin x=\sqrt{2}/2 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4}+2k_1\pi,\ k_1\in Z$ i $x_2=\frac{3\pi}{4}+2k_2\pi$, $k_2\in Z$.

Rješenja zadatka su:
$(\frac{\pi}{4}+2k_1\pi,\ \frac{\pi}{2}+k_3\pi)$, $(\frac{3\pi}{4}+2k_2\pi,\ \frac{\pi}{2}+k_4\pi)$, $k_1, k_2, k_3, k_4\in Z$.

195) Riješiti sustav jednadžbi:
$y\sin x=\log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right|$ (a),
$(6y^2+2y)(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}) = 25y^2+6y+1$ (b), ako je:
$|y|\leq 1$ (c).

Rješenje:
Supstitucijom $4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}=t$ (d) iz (b) dobivamo:
$(25-6t)y^2+(6-2t)y+1=0$ (e).

1°) $25-6t=0 \Rightarrow t=\frac{25}{6} \overset{(e)}{\Rightarrow} (6-2\cdot\frac{25}{6})y+1=0 \Rightarrow y=\frac{3}{7}$ (f), no tada iz (a) izlazi: $-\frac{3}{7}\leq y\sin x=\log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right| \overset{(f)}{=} \log_2\left|\frac{3\sin x}{16}\right| \leq$
$\leq \log_2\frac{3}{16}<\log_2\frac{1}{4}=-2$, tj. $-\frac{3}{7}\leq -2$, čime dolazimo do kontradikcije;

2°) $25-6t\neq 0 \overset{(e)}{\Rightarrow} y_{1,2}=\frac{-(3-t)\mp\sqrt{t^2-16}}{25-6t} \overset{(d)}{=}$
$$\overset{(d)}{=} \frac{-3+4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\mp\sqrt{(4^{\sin^2 x}-4^{\cos^2 x})^2}}{25-6(4^{\sin^2}+4^{\cos^2 x})},\ \text{tj.}$$

$$y_1 = \frac{2\cdot 4^{\cos^2 x} - 3}{25-6(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x})} \quad (g), \quad y_2 = \frac{2\cdot 4^{\sin^2 x} - 3}{25-6(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x})} \quad (h).$$

$2^o 1)$ Iz (a) i (g) izlazi: $y \sin x = \log_2 \left|\frac{y \sin x}{1+3y}\right| = \log_2|\sin x| -$
$- \log_2\left|\frac{1+3y}{y}\right| = \log_2|\sin x| - \log_2\left|3+\frac{1}{y}\right| = \log_2 \sin x -$
$- \log_2|2\cdot 4^{\sin^2 x}| = \log_2 \sin x - 1 - 2\sin^2 x$, pa zbog (c) slijedi:
$-1 \leq y \sin x = \log_2|\sin x| - 1 - 2\sin^2 x = -1$, tj.
$y \sin x = \log_2|\sin x| - 1 - 2\sin^2 x = -1$, odakle je:
$y \sin x = -1$, $\log_2|\sin x| = 0$ i $\sin^2 x = 0$ (i).
Sustav jednadžbi (i) nema rješenja.

$2^o 2)$ Analogno iz (a) i (h) izlazi:
$y \sin x = \log_2|\sin x| - 1 - 2\cos^2 x = -1$, odakle je:
$y \sin x = -1$, $\log_2|\sin x| = 0$ i $\cos^2 x = 0$ (j).
Sustav (j) ima rješenja $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$, $y = \mp 1$, ali
sustav (a) i (h) zadovoljavaju samo: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$,
$y = -1$.

Rješenja zadatka su, dakle $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$, $k \in Z$.

V j e ž b e :

196) $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{3})$. (R: $x = \frac{5\pi}{18} + k\cdot\frac{\pi}{3}$, $k \in Z$).

197) $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = -\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ (R: $x_1 = \frac{11\pi}{12} + 2k_1\pi$, $k_1 \in Z$,
$x_2 = \frac{5\pi}{36} + k_2\cdot\frac{2\pi}{3}$, $k_2 \in Z$).

198) $\sin(x+30^o) + \sin(60^o - x) - 1 = 0$ (R: $x_1 = 60^o + k_1\cdot 360^o$, $k_1 \in Z$,
$x_2 = 330^o + k_2\cdot 360^o$, $k_2 \in Z$).

199) $2\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 0$. (R: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $k_1 \in Z$,
$x_2 = \frac{\pi}{4} + k_2\cdot\frac{\pi}{2}$, $k_2 \in Z$).

200) $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$ (R: $x_1 = 2k_1\pi$, $k_1 \in Z$,
$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_2 \in Z$).

201) $8\cos^4 x + 15\sin^3 x \cos x + 16\sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^2 x - 2\sin^2 x - 5 = 0$.
(R: $x_{1,2} = k_1\pi$, $k_1 \in Z$, $x_{3,4} = \mathrm{arc\ tg}\frac{1}{14}(15 \mp \sqrt{253}) + k_2\pi$, $k_2 \in Z$).

202) $\mathrm{tg}5x - 2\mathrm{tg}3x = \mathrm{tg}5x\ \mathrm{tg}^2 3x$. (R: $x = k\pi$, $k \in Z$).

203) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ (R: $x \in \{k\cdot\frac{\pi}{6} \mid k \in Z\} \setminus \{k\cdot\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$).

204) $32\cos^6 x - \cos 6x = 1$. (R: $x_{1,2} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $k_1 \in Z$,
$x_{3,4} = \mp(\pi - \mathrm{arc\ cos}\frac{1}{4}) + 2k_2\pi$, $k_2 \in Z$).

205) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = \sin x + \cos x$. (R: $\emptyset$).

206) $1/\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{-\sin^2 x/(\sin x + 1)}$
(R: $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -\frac{\pi}{6}$).

207) $\log_{2\sin x}(1+\cos x) = 2$. (R: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$).

208) $\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1$.
(R: $x_1 = e^{1/2+2k_1}$, $k_1 \in Z$, $x_2 = e^{2k_2}$, $k_2 \in Z$).

209) $\log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x = \frac{1}{4}$.
(R: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$).

210) $2\log_{\sin x} \mathrm{tg}x + \log_{\mathrm{tg}x} \sin x = 3$.
(R: $x = \mathrm{arc\ sin}\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$).

211) $\log_{\sin 2x}(\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x) = 1 - \log^2_{\sin 2x} 2$.
(R: $x_1 = \frac{\pi}{8} + k_1\pi$, $k_1 \in Z$, $x_2 = \frac{3\pi}{8} + k_2\pi$, $k_2 \in Z$).

212) $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x) = \sqrt{3}$. (R: $x = \pm\frac{1}{6} + k$, $k \in Z$).

213) $x^2 + 2x\cdot\sin(xy) + 1 = 0$ (R: $x = \mp 1$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$).

214) $\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}$.
(R: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$, $k_1 \in Z$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$, $k_2 \in Z$).

215) $\cos 2x = m \sin x$, $m \in R$. (R: jedno rješenje za $m \in R \setminus [-1,1]$,
a oba rješenja za $m \in [-1,1]$).

216) $\sin 3x = m \sin^2 x$, $m \in R$. (R: jedno rješenje za $m \in R \setminus [-1,1]$, a oba rješenja za $m \in [-1,1]$).

217) $6 \arcsin(x^2-6x+8,5) = \pi$. (R: $x_1=2$, $x_2=4$).

218) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (R: $x \in [-1,1]$).

219) $\cos x - \sin(x+y) = 0$, $\cos y - \sin(x+y) = 0$.
(R: $(\frac{\pi}{2} + k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi)$, $(\frac{\pi}{6} + 2k_3\pi, \frac{\pi}{6} + 2k_4\pi)$,
$(\frac{5\pi}{6} + 2k_5\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k_6\pi)$, $(\frac{\pi}{2} + k_7\pi, -\frac{\pi}{2} + (k_7+2k_8)\pi)$,
$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8 \in Z$).

220) $\sin x + \sin y = \sin^3 x + \sin^3 y$, $\sin^2 x + \sin^2 y = \sin^4 x + \sin^4 y$.
(R: $x \in \{k_1\pi, \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi \mid k_1 \in Z\}$, $y \in \{k_2\pi, \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi \mid k_2 \in Z\}$).

221) $(3-y^2)\cos^2 x = \log_3 \left| \frac{8+y}{y(1-\sin^3 x)} \right|$,
$(y^2+8y)\cdot(3^{2+2\sin^4 x} + 3^{2\cos^4 x + \sin^2 2x - 4}) = 2y^2+16y+64$,
$1 \leq y \leq 10$.
(R: $x = k\pi$, $k \in Z$, $y=1$).

XVII - JEDNADŽBE SA KOMPLEKSNIM KOEFICIJENTIMA

Pri rješavanju ovih jednadžbi koristimo se formulama:

$a+bi = c+di \Leftrightarrow a=c, \quad b=d$

$$z = a+bi \Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = a - bi \\ r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \; k=0,1,\ldots,n-1. \end{cases}$$

Z a d a c i :

222) U ovisnosti od a,b,c diskutirati rješenja (po z) jednadžbe
$az + b\bar{z} + c = 0$, $a,b,c \in C$, $z \in C$.

Rješenje:

$z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$, $x,y \in R$
$az + b\bar{z} + c = 0 \Rightarrow a(x+iy) + b(x-iy) + c = 0 \Rightarrow (a+b)x + c + i(a-b)y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+b)x + c = 0 \quad \wedge \quad (a-b)y = 0.$

1°) $a \neq \pm b \Rightarrow x = -\frac{c}{a+b}$, $y=0$

2°) $a = b \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{2a}$, $y \in R$

3°) $a = -b$, $c = 0 \Rightarrow x, y \in R$

4°) $a = -b$, $c \neq 0 \Rightarrow \emptyset$.

223) Riješiti sustav jednadžbi
$6x(1-2i) = 3z - 8iy$, $x(5-8i) = 2z - 4iz + 2$, $x,y,z \in R$.
Rješenje:
$(6x-3z) + i(8y-12x) = 0 \wedge (5x-2z) + i(4z-8x) = 2 \Rightarrow 6x-3z = 0 \wedge$
$8y - 12x = 0 \wedge 5x - 2z = 2 \wedge 4z - 8x = 0 \Rightarrow x = 2, \quad y = 3, \quad z = 4$

224) Riješiti jednadžbu $|z-1| - \bar{z} + 2i = 0$, $z \in C$.
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} |z-1| - \bar{z} + 2i = 0 \\ z = x+iy, \bar{z} = x - iy, \; x,y \in R \end{array}\right\} \Rightarrow |(x-1)+iy| - x + (y+2)i = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} - x + (y+2)i = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{(x-1)^2+y^2} - x = 0 \\ y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{(x-1)^2+4} = x \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = x^2 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = \frac{5}{2} - 2i.$

225) Riješiti jednadžbu $2z^2 + (4-i)z - i = 0$, $z \in C$.
Rješenje:

Neka je $z = x+i$, $x,y \in R$ (a).
Tada iz zadane jednadžbe dobivamo:

$2(x+iy)^2 + (4-i)(x+iy) - i = 0$

$2(x^2 - y^2 + 2xyi) + (4x+y) + i(-x+4y) - i = 0$

$(2x^2 - 2y^2 + 4x + y) + i\,(4xy - x + 4y - 1) = 0$

$$2x^2 - 2y^2 + 4x + y = 0$$
$$4xy - x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow 4y(x+1) = x+1$$

1°) Za $x \neq -1$ iz druge jednadžbe je $y = \frac{1}{4}$, pa iz prve jednadžbe dobivamo: $16x^2 + 32x + 1 = 0$, tj. $x_{1,2} = -1 \mp \frac{\sqrt{15}}{4}$.

2°) Za $x = -1$ iz druge jednadžbe je $y \in R$, ali iz prve jednadžbe izlazi da $y \notin R$, što je kontradikcija sa (a).
Rješenja zadatka su dakle,
$z_{1,2} = -1 \mp \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{4}\,i$. (Izvršite pokus).

226) Riješiti jednadžbu $\bar{z} = z^3$, $z \in C$.
Rješenje:

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $x, y \in R$

$\bar{z} = z^3 \Rightarrow x - iy = (x+iy)^3 \Rightarrow x - iy = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2 - 3x^2 - 1) + iy(y^2 - 3x - 1) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0$ (a) i

$y(y^2 - 3x^2 - 1) = 0$.

$1^\circ)$ $x = 0 \overset{(b)}{\Rightarrow} y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y(y-1)(y+1) = 0 \Rightarrow y \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in \{(0,-1), (0,0), (0,1)\}$.

$2^\circ)$ $x \neq 0 \overset{(a)}{\Rightarrow} x^2 - 3y^2 - 1 = 0$ (c)

$2^\circ 1)$ $y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 1\} \Rightarrow z \in \{(-1,0), (1,0)\}$

$2^\circ 2)$ $y \neq 0 \overset{(b)}{\Rightarrow} y^2 - 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -9x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \\ x^2 - 3y^2 - 1 = 0 \quad (c) \end{array}\right\} \Rightarrow -8x^4 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \notin R_0^+,$$

što je kontradikcija. Dakle, rješenja zadatka su:

$z_1 = (0,-1) = -i$, $z_2 = (0,0) = 0$, $z_3 = (0,1) = i$,
$z_4 = (-1,0) = -1$, $z_5 = (1,0) = 1$.

227) Riješiti jednadžbu $(\bar{z} - i)^3 = 1 - i$, $z \in C$.
Rješenje:

$z = x + iy$, $z = x - iy$, $x, y \in R$

$(\bar{z} - i)^3 = 1 - i \Rightarrow \bar{z} - i = \sqrt[3]{1-i} \Rightarrow \bar{z} = \sqrt[3]{1-i} + i \Rightarrow \bar{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot (\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} +$

$+ i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}) + i = \sqrt[6]{2} (\cos \frac{8k-1}{3}\pi + i \sin \frac{8k-1}{3}\pi) + i$, $k = 0,1,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \sqrt[6]{2} (\cos \frac{8k-1}{3}\pi - i \sin \frac{8k-1}{3}\pi) - i$, $k = 0,1,2 \Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt[6]{2}}{2} +$

$+ i (\frac{\sqrt[6]{54}}{2} - 1)$, $z_2 = \frac{\sqrt[6]{2}}{2} - i (\frac{\sqrt[6]{54}}{2} + 1)$, $z_3 = -\frac{\sqrt[6]{2}}{2}$

Vježbe:

228) $|z+1| + z + i = 0$, $z \in C$.
(R: $z = -1 - i$).

229) $\bar{z} = z^2$, $z \in C$. (R: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_{3,4} = -\frac{1}{2}(1 \mp i\sqrt{3})$).

230) $z^4 - 7 - 24i = 0$, $z \in C$.

(R: $z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$, $z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$,
$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$).

XVIII - PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE JEDNADŽBI

Postoji više metoda za pronalaženje približnih vrijednosti realnih korijena jednadžbi. Ovdje ćemo se ograničiti na grafičku metodu u kombinaciji sa još jednom numeričkom metodom (metoda raspolavljanja, metoda iteracije,...). Sam način rješavanja (bez dubljeg ulaženja u teoriju) objasnit ćemo na primjerima.

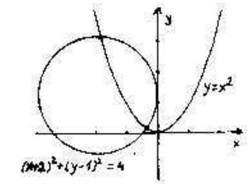
Zadaci:

231) Približno riješiti jednadžbu $x^4 - x^2 + 4x + 1 = 0$, $x \in R$.
Rješenje:

Prvo ćemo (za svaki korijen posebno) odrediti intervale realnih korijena (tzv. separacija korijena). Za to postoji više metoda. Mi ćemo koristiti grafičku metodu:

$x^4 - x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x + 4) + (x^4 - 2x^2 + 1) = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (x+2)^2 + (x^2 - 1)^2 = 4 \\ y = x^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 2^2 & \text{kružnica} \\ y = x^2 & \text{parabola} \end{array}\right.$$



Sa crteža je vidljivo da je $x_1 \in (-2,-1)$, $x_2 \in (-1, 0)$. Ako je $f(x) = x^4 - x^2 + 4x + 1$, uočite da je tada: $\text{sign } f(-2) \neq \text{sign} f(-1) \neq \text{sign} f(0)$, pa smo do intervala realnih korijena mogli doći i ispitivanjem promjena predznaka funkcije f. Do istog rezultata mogli smo grafički doći i uzimajući:

$x^4 - x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = x^2 - 4x - 1 \Rightarrow x^4 = (x-2)^2 - 5 \Rightarrow y = x^4$ i
$y = (x-2)^2 - 5$.

Dalje ćemo koristiti metodu raspolavljanja (uraklijivanja):

$1^\circ)$ $x \in (a,b) = (-2,-1)$, $f(-2) = 5 > 0$, $f(-1) = -3 < 0$;

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-2-1}{2} = -1{,}5$, $f(x_0) = f(-1{,}5) = -2{,}1875 < 0$;

$x_1 = \frac{a + x_0}{2} = \frac{-2-1{,}5}{2} = -1{,}75$, $f(x_1) = f(-1{,}75) = 0{,}3164063 > 0$;

$x_2 = \frac{x_1 + x_0}{2} = -1{,}625$, $f(x_2) = -1{,}1677246 < 0$;

$$x_3 = \frac{x_2+x_1}{2} = -1{,}6875,\quad f(x_3) = -0{,}488510<0;$$

$$x_4 = \frac{x_3+x_1}{2} = -1{,}71875,\quad f(x_4) = -0{,}1023856<0;$$

$$x_5 = \frac{x_4+x_1}{2} = -1{,}734375,\quad f(x_5) = 0{,}1028482>0;$$

$$x_6 = \frac{x_5+x_4}{2} = -1{,}7265625,\quad f(x_6) = -0{,}0007994<0;$$

$$x_7 = \frac{x_6+x_5}{2} = -1{,}7304688,\ \ldots\ldots$$

Daljnjim postupkom dolazimo do približne vrijednosti korijena željene točnosti. (Uočite da je x_n aritmetička sredina između x_{n-1} i najbližeg njegovog prethodnika x_m $(m \leq n-2)$ za kojeg vrijedi $\operatorname{sign} f(x_m) \neq \operatorname{sign} f(x_{n-1})$. Nadalje uočite da je $(a,b) \supseteq$ $\supseteq (a,x_o) \supseteq (x_1,x_o) \supseteq (x_1,x_2) \supseteq (x_1,x_3) \supseteq (x_1,x_4) \supseteq (x_5,x_4) \supseteq \ldots)$.
Zaokruženo na 2 decimale, vrijednost prvog korijena je:
$$x_1 = -1{,}73.$$

2°) Uzimajući da je $x \in (-1,0)$, na sličan način dolazimo do drugog približnog korijena jednadžbe: $x_2 = -0{,}24$.

232) Naći približne vrijednosti realnih korijena jednadžbe
$$x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0,\quad x \in R.$$
Rješenje:

Analognim postupkom kao u prethodnom zadatku nalazimo da je $x \in (0,1)$. Dalje ćemo primjeniti metodu iteracije. Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku:

$$x = \frac{1}{(x+1)^2}\ .\ \text{Neka je } x_o = 0{,}5.\ \text{Tada imamo:}$$

$$x_1 = \frac{1}{(x_o+1)^2} = \frac{1}{(0{,}5+1)^2} = 0{,}4,\quad x_2 = \frac{1}{(x_1+1)^2} = 0{,}4792899$$

$$x_3 = \frac{1}{(x_2+1)^2} = 0{,}456976,\quad x_4 = \frac{1}{(x_3+1)^2} = 0{,}4710806,$$

$$x_5 = \frac{1}{(x_4+1)^2} = 0{,}4620905,\quad x_6 = 0{,}4677906,\quad x_7 = 0{,}4641644,$$

$x_8 = 0{,}4664664$, $x_9 = 0{,}465003$, $x_{10} = 0{,}4659324, \ldots$, pa je

približna vrijednost realnog korijena (zaokružena na 2 decimale):

$x = 0{,}47$. (Uočite da je $x_n = \dfrac{1}{(x_{n-1}+1)^2} = g(x_{n-1})$. Nadalje uočite da niz $x_o, x_1, x_2, \ldots$ konvergira prema korijenu x zadane jednadžbe). Umjesto metode iteracije mogli smo koristiti i metodu sekante:

Kako je: $x \in [0,1] = [a,b]$, $f(x) = x^3+2x^2+x-1$, $f(a) = f(0) = -1<0$, $f(b) = f(1) = 3>0$, tada imamo:

$$x_o = \frac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{0\cdot f(1) - 1\cdot f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$f(x_o) = -0{,}609375 < 0$,

$$x_1 = \frac{x_o\cdot f(b) - b\cdot f(x_o)}{f(b) - f(x_o)} = \frac{0{,}25\cdot 3 - 1\cdot(-0{,}609375)}{3 - (-0{,}609375)} = 0{,}3766234,$$

$f(x_1) = -0{,}2862641 < 0$,

$$x_2 = \frac{x_1\cdot f(b) - b\cdot f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = 0{,}4309253,\ \text{i.t.d.}$$

(Primjetite da sklop intervala $[a,b] \supseteq [x_o,b] \supseteq [x_o,b] \supseteq [x_1,b] \supseteq \ldots$ odabiramo na sličan način kao kod metode raspolavljanja, tj. vrijednosti funkcije f u krajevima intervala su suprotnog predznaka).

Vježbe:

233) $x^4 - x - 1 = 0$, $x \in R$
(R: $x = 1{,}226$)

234) x^3+3x^2+2x+1, $x \in R$.
(Uputa: $x = \sqrt[3]{x} - 1$. R: $x = 2{,}32$).

235) $2\cdot\log x - (x-2)^2 = 0$.
(R: $x = 1{,}43$).

XIX DIOFANTOVE JEDNADŽBE

Jednadžbe u kojima tražimo samo cjelobrojna rješenja zovu se Diofantove jednadžbe.

Jednadžba oblika
$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = a_{n+1},\ a_i \in Z\setminus\{0\},\ i=1,2,\ldots,n,\ a_{n+1} \in Z \quad (1)$$
zove se linearna Diofantova jednadžba sa n nepoznanica.

Do (beskonačno mnogo) rješenja jednadžbe (1) najčešće dolazimo Eulerovom metodom tako da nepoznanicu, čiji je koeficijent po apsolutnoj vrijednosti najmanji, izrazimo eksplicitno izdvajajući cijeli i razlomljeni dio, zatim umjeto razlomljenog dijela uvodimo novu nepoznanicu koja takodjer mora imati samo cjelobrojna rješenja,...

Jednadžba (1) nema rješenja ako je:
$M(a_1,a_2,...,a_n)=d>1$ i $M(a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1})=1$. (2)

Za linearnu Diofantovu jednadžbu sa 2 nepoznanice
$ax+by=c,\ a,b\in Z\setminus\{0\},\ c\in Z$ (3)
za koju vrijedi $M(a,b)=M(a,b,c)=1$ (4) ,
osim Eulerovom metodom, možemo opće rješenje dobiti i po formuli:
$(x,y)=(x_1-bt,y_1+at),\ t\in Z$ (5), gdje je $(x_1,y_1)=(cx_o,cy_o)$ (6),
a (x_o,y_o) jedno rješenje jednadžbe $ax+by=1$ (7).

Diofantove jednadžbe koje nisu linearne zovu se nelinearne Deiofantove jednadžbe.

Z a d a c i :

236) Riješiti jednadžbu $13x+8y=15,\ x,y\in Z$.
Rješenje:

$$y=\frac{15-13x}{8}=2-2x+\frac{-1+3x}{8}\Rightarrow y=2-2x+u\ \text{(a) i } u=\frac{-1+3x}{8}\in Z\ \text{(b)},$$

$$\text{(b)}\Rightarrow x=\frac{1+8u}{3}=3u+\frac{1-u}{3}\Rightarrow x=3u+v\ \text{(c) i } v=\frac{1-u}{3}\in Z\ \text{(d)},$$

(d) $\Rightarrow u=1-3v,\ v\in Z$ (e),
(c) $\Rightarrow x=3u+v=3\cdot(1-3v)+v=3-8v,\ v\in Z$ (f),
(a) $\Rightarrow y=2-2x+u=2-2\cdot(3-8v)+(1-3v)=-3+13v,\ v\in Z$ (g).

Rješenja zadatka su, dakle:
$x=3-8v,\ y=-3+13v,\ v\in Z$ (n), tj. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\\13\end{bmatrix}\cdot v,\ v\in Z$.

Drugi način:
Pomoću Euklidova algoritma nadjimo prvo (prema (7)) jedno cjelobrojno rješenje (x_o,y_o) jednadžbe $13x+8y=1$:

Iz $13=8.1+5$, tj. $5=13-8.1$,
$8=5.1+3$, tj. $3=8-5.1$,
$5=3.1+2$, tj. $2=5-3.1$,
$3=2.1+1$, tj. $1=3-2.1$

izlazi: $1=3-2.1=(8-5.1)-(5-3.1).1=8-5.2+3=8-(13-8.1).2+$
$+(8-5.1)=13.(-2)+8.4-5=13.(-2)+8.4-(13-8.1)=$
$=13.(-3)+8.5$, tj.
$13.(-3)+8.5=1$, odnosno $(x_o,y_o)=(-3,5)$.

Prema (6) jedno rješenje zadane jednadžbe je $(x_1,y_1)=(cx_o,cy_o)=$
$=(-45,75)$, pa je prema (5) opće rješenje te jednadžbe $(x,y)=$
$=(x_1-bn,y_1+bn)=(-45-8n,75+13n),\ n\in Z$. Za $n=-6+v,\ v\in Z$,

dobivamo: $(x,y)=(3-8v,-3+13v),\ v\in Z$.

237) Riješiti jednadžbu $6x_1+9x_2-12x_3+3x_4=10,\ x_i\in Z, i=1,2,3,4$.
Rješenje:

Kako je $M(6,9,12,3,10)=1$, a $M(6,9,12,3)=3>1$, tada prema (2) jednadžba nema rješenja.

238) Riješiti jednadžbu $3x+4y+10z=20,\ x,y,z\in N_o$.
Rješenje:

Cjelobrojna rješenja zadane jednadžbe $3x+4y+10z=20$ (a) su $x=8-4t-2z,\ y=-1+3t-z,\ z,t\in Z$ (b). Zbog $x,y,z\in N_o$ (c), iz (a) izlazi da je $z\in\{0,1,2\}$ (d). Za $z=0$ (e) izlazi: $x=8-4t,\ y=-1+3t$ (f), pa na osnovu (c) mora biti $t\in\{1,2\}$ (g). Analogno za $z=1$ (h) i za $z=2$ (i) dobivamo da je $t=1$ (j). Iz (e), (f), (g), (h), (i), i (j) dobivamo:

z	0	0	1	2
t	1	2	1	1
x	4	0	2	0
y	2	5	1	0

, pa su rješenja zadatka:
(4,2,0), (0,5,0), (2,1,1), (0,0,2).

239) Riješiti sustav jednadžbi: $2x+3y-5z=4,\ 3x-y+2z=1,$
$x,y,z\in Z$.
Rješenje:

Cjelobrojan rješenja jednadžbe $2x+3y-5z=4$ su: $x=3u+z+2,\ u,z\in Z$ (a), $y=-2u+z,\ u,z\in Z$ (b), što uvrštavanjem u drugu jednadžbu daje: $11u+4z=-5$ (c). Rješenja jednadžbe (c) su: $u=4t+1,\ t\in Z$ (d), $z=-11t-4,\ t\in Z$ (e), pa imamo:
(b) $\Rightarrow y=-2(4t+1)+(-11t-4)=-19t-6,\ t\in Z$ (f),
(a) $\Rightarrow x=3(4t+1)+(-11t-4)+2=t+1,\ t\in Z$ (g).

Rješenja zadatka su: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-19\\-11\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}1\\-6\\-4\end{bmatrix},\ t\in Z$ (h).

240) Riješiti jednadžbu $3^x+4^x=5^x,\ x,y\in Z$.
Rješenje:

Odmah se vidi da je jedno rješenje jednadžbe $x=2$. Pokazat ćemo da jednadžba nema drugih rješenja.
Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku: $(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x=1$.

Za $x<2$ bit će: $(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x>(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=1$, a za $x>2$ dobivamo:
$(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x<(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=1$, pa za $x\neq2$ jednadžba nema rješenja.

241) Riješiti jednadžbu $x^2-1982=y^2$, $x,y\in Z$.
Rješenje:
$x^2-y^2=1982$, $(x-y)(x+y)=\pm 2\ (\pm 991)$. Jednadžba nema rješenja u skupu Z.

242) Riješiti jednadžbu $x^4+2x^7y-x^{14}-y^2=7$, $x,y\in N$.
Rješenje:
$(x^7+x^2-y)(-x^7+x^2+y)=7$.

$A=x^7+x^2-y$	1	-1	7	-7
$B=-x^7+x^2+y$	7	-7	1	-1
$x=\sqrt{(a+B)/2}$	2	-	2	-
$y=-A+x^7+x^2$	131	-	125	-

Rješenja zadatka su: $(2,131)$, $(2,125)$.

243) Riješiti jednadžbu $x^2+y^2+2x-4y-8=0$, $x,y\in N$.
Rješenje:
$(x+1)^2+(y-2)^2=13$.
$(x+1)^2=4$ i $(y-2)^2=9 \Rightarrow (x,y)=(1,5)$,
$(x+1)^2=9$ i $(y-2)^2=4 \Rightarrow (x,y)=(2,4)$.

244) Riješiti jednadžbu $x^2-xy+2x-3y-6=0$, $x,y\in Z$.
Rješenje:
Kako $x=-3$ nije rješenje zadane jednadžbe, tada tu jednadžbu možemo pisati u obliku $y=(x^2+2x-6)/(x+3)$, tj.
$y=x-1-\frac{3}{x+3}$. Zbog $y\in Z$ bit će $x+3\in\{-3,-1,1,3\}$, tj. $x\in\{-6,-4,-2,0\}$, pa je $y\in\{-6,-2,-6,-2\}$. Rješenja zadatka su: $(-6,-6)$, $(-4,-2)$, $(-2,-6)$, $(0,-2)$.

245) Riješiti jednadžbu $x^2+5y=12345678$, $x,y\in N$.
Rješenje:
Kako x^2 završava sa jednim od brojeva: 0,1,4,5,6,9, a $5y$ sa 0 ili 5, tada x^2+5y završava sa jednim od brojeva: 0,1,4,5,6,9, a nikada sa 8, pa zadana jednadžba nema rješenja.

246) Riješiti jednadžbu $x!+y!=10z+9$, $x,y,z\in N$, gdje je $n!=1.2.\ldots.n$.
Rješenje:
Desna strana jednadžbe je neparna, pa to mora biti i lijeva strana, što je moguće ako je točno jedan od brojeva x,y jednak 1.

Neka je na primjer $x=1$. Tada je $y!=10z+8$, no $y!$ ne završava sa 8 ni za jedan prirodan broj y, dok desna strana te jednadžbe završava, pa zadana jednadžba nema rješenja.

247) Riješiti jednadžbu $1!+2!+\ldots+x!=y^2$, $x,y\in N$.
Rješenje:
Za $x\leq 4$ rješenja jednadžbe su: $(1,1)$, $(3,3)$. Za $x>4$ imamo: $1!+2!+3!+4!+\ldots+x!=y^2$, pa kako $1!+2!+3!+4!=33$ završava sa 3, a ostatak lijeve strane jednadžbe sa 0, tada lijeva strana završava sa 3, dok desna strana jednadžbe nikada ne završava sa 3, pa u tom slučaju jednadžba nema rješenja. Dakle, jedina rješenja zadane jednadžbe su: $(1,1)$ i $(3,3)$.

248) Riješiti jednadžbu $2xy=x^2+2y$, $x,y\in N_o$.
Rješenje:
$2(xy-y)=x^2$ i $2(xy-y)$ parni broj. $\Rightarrow x^2$ paran broj $\Rightarrow x$ paran broj $\Rightarrow x=2m,\ m\in N_o$

$$\left.\begin{array}{l} x=2m,\ m\in N_o \\ 2xy-x^2=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2m(y-m)=y \\ m\,|\,2m(y-m) \end{array}\right\} \Rightarrow m\,|\,y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=km,\ m\in N_o \\ 2xy-x^2-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m((2m-1)\cdot k-2m)=0$.
$1^o)$ $m=0 \Rightarrow x=y=0$,
$2^o)$ $(2m-1)k-2m=0 = k=\frac{2m}{2m-1}\in N_o \Rightarrow 2m-1=1$ (jer je $M(2m,2m-1)=1) \Rightarrow m=1 \Rightarrow k=2 \Rightarrow x=y=2$.
Rješenja zadatka su: $(0,0)$, $(2,2)$.

249) Riješiti jednadžbu $x^2-3y=17$, $x,y\in N$.
Rješenje:
Kako 17 nije djeljivo sa 3, a $3y$ jeste, tada ni x^2, pa stim ni x, nije djeljivo sa 3. Zato je $x=3k\pm 1$, $k\in N$, pa iz zadane jednadžbe dobivamo: $(3k\pm 1)^2-3y=17$, $3(3k^2\pm 2k-9)=16$. Kako je lijeva strana dobivene jednadžbe djeljiva sa 3, a desna nije, jednadžba nema rješenja.

250) Riješiti jednadžbu $1+x+x^2+x^3=2^y$, $x,y\in Z$.
Rješenje:
$(1+x)(1+x^2)=2^y$,

$$1+x=2^k \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2^k-1\in Z,\quad k\in N_o \quad (a) \Rightarrow x^2=2^{2k}-2^{k+1}+1 \\ 1+x^2=2^{y-k} \Rightarrow x^2=2^{y-k}-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{2k}-2^{k+1}+1=$$

$=2^{y-k}-1 \Rightarrow 2^{y-k}-2^k+2^{k+1}=2$ (b).

1°) $k=0 \overset{(a)\ i\ (b)}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=0 \\ 2^y=1 \Rightarrow y=0, \end{cases}$

2°) $k>0$

$(b) \Rightarrow 2^{y-k-1}+2^k-2^{2k-1}=1 \Rightarrow 2^{y-k-1}(1+2^{2k-y+1}-2^{3k-y})=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2^{y-k-1}=1 \\ 1+2^{2k-y+1}-2^{3k-y}=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y-k-1=0 \\ 2^{2k-y+1}=2^{3k-y} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} y=k+1 \\ 2k-y+1=3k-y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y=k+1 \\ k=1 \\ x=2^k-1 \quad (a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}.$$

Rješenja zadatka su: $(0,0)$, $(1,2)$.

251) Riješiti jednadžbu $2(x^y+y^x)=3xy$, $x,y\in N$.

Rješenje:

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $x^y+y^x=\frac{3}{2}xy$ (a).

1°) Za $x>2$ i $y>2$ je $x^y+y^x>x^2+y^2\geq 2xy$ (zbog $(x-y)^2\geq 0$) $>$ $>\frac{3}{2}xy$, tj. $x^y+y^x>\frac{3}{2}xy$, pa jednadžba (a) nema rješenja.

2°) Za $x=1 \overset{(a)}{\Longrightarrow} 1^y+y^1=\frac{3}{2}y \Rightarrow y=2$.

3°) Analogno za $y=1 \Rightarrow x=2$.

Rješenja zadatka su: $(1,2)$, $(2,1)$.

252) Riješiti jednadžbu $3^x=4y+5$, $x,y\in N$.

Rješenje:

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $y=\frac{3^x-5}{4}$, tj. $y=\frac{3^x-1}{4}-1$. Za $x=2n+1$ ($n\in N_o$) neparan broj, je $y=\frac{3^{2n+1}}{4}-1$, pa $y\notin N$ jer $3^{2n+1}-1$ nije djeljivo sa $4=3+1$. Za $x=2n$ ($n\in N$) paran broj, je $y=\frac{3^{2n}-1}{4}-1$, pa je $y\in N$ jer je $3^{2n}-1$ djeljivo sa $4=3+1$. Dakle, rješenja zadatka su:

$x=2n$, $y=\frac{1}{4}(3^{2n}-1)-1$, $n\in N$.

153) Riješiti jednadžbu $2xy+3y^2=24$, $x,y\in Z$.

Rješenje:

Za $3 \mid x$ i $3\nmid y$ iz $x=3\cdot\frac{8-y^2}{2y}$ (a) izlazi da je y paran broj, tj. da je $y=2n$, $n\in Z$, $3\nmid n$ (zbog $3\nmid y$). Na osnovu toga, zbog $x\in Z$, je $n\in\{\pm 1, \pm 2\}$, pa je $(x,y)\in\{(3,2),(-3,-2),(-3,4),(3,-4)\}$.

Za $3\nmid x$ i $3\mid y$, tj. $y=3m$, $m\in Z$, iz (a) izlazi da je $m=2k$ ($k\in Z$) paran

broj, odakle je $k\in\{\pm 1,\pm 2\}$ i $(x,y)\in\{(-7,6),(7,-6),(-17,12),(17,-12)\}$.

Rješenja zadatka su dakle:

$(3,2),(-3,-2),(-3,4),(3,-4),(-7,6),(7,-6),(-17,12),(17,-12)$.

254) Riješiti jednadžbu $(x+y)^2-(x+y)-2x=150$, $x,y\in N$.

Rješenje:

$y^2-(1-2x)y+(x^2-3x-150)=0$, $y_{1,2}=\frac{1}{2}(1-2x\mp\sqrt{8x+601})$.

Kako je $1-2x$ neparan broj, a $y\in N$, tada treba bi'i $8x+601=$ $=2n+1$ ($n\in N$) (a) neparan broj. Iz (a) je $x=\frac{n(n+1)}{2}-75$ (b), pa je $y_1=75-\frac{n(n+3)}{2}$ (c) i $y_2=76-\frac{n(n-1)}{2}$ (d). Iz (b), (c) i (d), zbog $x,y\in N$, izlazi da je $n=13$, odakle je: $x=3$, $y=10$.

255) Riješi'i jednadžbu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, $x,y,z\in N$.

Rješenje:

Neka je $x\leq y\leq z$ (a). Tada iz $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{x}$ izlazi da je $x\leq 3$.

1°) $x=1 \Rightarrow$ jednadžba nema rješenja,

2°) $x=2 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

a) $y=2=x \Rightarrow$ jednadžba nema rješenja,

b) $y=3>x \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{6} \Rightarrow z=6>y$,

c) $y=4>x \Rightarrow z=4=y$,

d) $y\geq 5 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{2}{y}\leq\frac{2}{5}<\frac{1}{2} \Rightarrow$ jednadžba nema rješenja,

3°) $x=3 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

a) $y=3 \Rightarrow z=3=y$,

b) $y\geq 4 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{2}{y}\leq\frac{1}{2}<\frac{2}{3} \Rightarrow$ jednadžba nema rješenja.

Rješenja koja zadovoljavaju (a) su, dakle: $(2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$.

Cikličkom zamjenom dolazimo i do ostalih rješenja jednadžbe.

Rješenja zadatka su: $(2,3,6),(2,63),(3,2,6),(3,6,2),(6,2,3),(6,3,2),(2,4,4),(4,2,4),(4,4,2),(3,3,3)$.

256) Riješiti jednadžbu $x^x+y^y=2x+y$, $x,y\in N$.

Rješenje:

$x(x^{x-1}-2)+y(y^{y-1}-1)=0$ (a).

Za $x>2$ i $y>1$ je $x^{x-1}>2$ i $y^{y-1}>1$, pa je lijeva strana jednadžbe (a) veća od nule, dok je desna strana nula, pa jednadžba nema rješenja.

Za $x \in \{1,2\}$ i $y=1$ direktnom provjerom dolazimo do jedinog rješenja zadane jednadžbe: $(2,1)$.

257) Riješiti jednadžbu $x^y+1=z$, $x,y,z \in P$ (P=skup prostih brojeva).

Rješenje:

$$x,y \in P \Rightarrow x \geq 2 \text{ i } y \geq 2 \Rightarrow x^y \geq 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} z \geq 5 \\ z \in P \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^y+1 \text{ neparan broj} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^y \text{ paran broj} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \text{ paran broj} \\ x \in P \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=2.$$

Za $y=2$ dobivamo jedno rješenje zadatka: $(2,2,5)$. Pokazat ćemo da nema drugih rješenja. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $y>2$. Tada, zbog $y \in P$, mora biti $y=2k+1$ $(k \in N)$ neparan broj, pa iz zadane jednadžbe dobivamo: $z=2^{2k+1}+1=(2+1)\,(2^{2k}-2^{2k-1}\pm\ldots+1) \notin P$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $z \in P$.

258) Riješiti sustav jednadžbi: $x^2+5y^2+4z^2+4xy+4yz=125$, $x^2+3y^2-4z^2+4xy-4yz=75$, $x,y,z \in N$.

Rješenje:

Zbrajanjem zadanih jednadžbi dobivamo: $(x+2y)^2=100$, tj. $x+2y=10$ (a), a oduzimanjem zadanih jednadžbi dobivamo: $(y+2z)^2=25$, tj. $y+2z=5$ (b). Iz (a) i (b) dobivamo rješenja zadatka: $(4,3,1)$, $(8,1,2)$.

259) Riješiti sustav jednadžbi: $x+y+z=3$, $x^3+y^3+z^3=3$, $x,y,z \in N$.

Rješenje:

Iz prve jednadžbe je $z=3-(x+y)$, što uvrštenjem u drugu jednadžbu daje: $x^3+y^3+(3-(x+y))^3=3$, $(x+y)(9x+9y-3xy-27)=-24$, $(x+y)(xy-3(x+y)+9)=8$ (a).

$x+y$	8	-8	4	-4	2	-2	1		-1	
$xy-3(x+y)+9$	1	-1	2	-2	4	-4	8		-8	
xy	16	-34	5	-23	1	-19	2		-20	
x	4	-	-	-	1	-	-	4		-5
y	4	-	-	-	1	-	-	-5		4
z	5	-	-	-	1	-	-	4		4

Rješenje zadatka su: $(1,1,1)$, $(4,4,-5)$, $(4,-5,4)$, $(-5,4,4)$.
Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku:
$(x+y)(x-3)(y-3)=8$ (b), pa zadatak možemo riješiti i rješavanjem jednadžbe (b).

V j e ž b e :

260) $11x+4y=-5$, $x,y \in Z$. (R: $x=4t+1$, $y=-11t-4$, $t \in Z$).

261) $2x_1+3x_2-5x_3=4$, $x_1,x_2,x_3 \in Z$. (R: $x_1=3u+v+2$, $x_2=-2u+v$, $x_3=v$, $u,v \in Z$).

262) Koliko novčića od 2, 5 i 10 dinara možemo dobiti za 20 dinara? (Uputa: $2x+5y+10z=20$, $x,y,z \in N_0$).
R: $(0,0,2)$, $(0,2,1)$, $(0,4,0)$, $(5,0,1)$, $(5,2,0)$, $(10,0,0)$).

263) $8x+5y+z=100$, $x+y+z=20$, $x,y,z \in N$. (R: $(4,13,3)$, $(8,6,6)$).

264) $xy=x+y$, $x,y \in Z$. (R: $(0,0)$, $(2,2)$).

265) $2x^2+5xy-12y^2=28$, $x,y \in N$. (R: $(8,5)$).

266) $x^2+y^2-6x=9$, $x,y \in N_0$. (R: $(3,0)$).

267) $x^2+y^2+2x-4y-8=0$, $x,y \in Z$. (R: $(-3,-1)$, $(-3,5)$, $(1,-1)$, $(1,5)$, $(-4,0)$, $(-4,-4)$, $(2,0)$, $(2,4)$).

268) $xy-5x-5y=0$, $x,y \in Z$. (R: $(-20,4)$, $(0,0)$, $(4,-20)$, $(6,30)$, $(10,10)$, $(30,6)$).

269) $x!+y!=(x+y)!$, $x,y \in N$. (R: $(1,1)$).

270) $1!+2!+\ldots+x!=y^z$, $x,y,z \in N$, $z>1$. (R: $(3,3,2)$, $(1,1,z>1)$).

271) $2x^2-5y^2=7$, $x,y \in N$. (R: $\emptyset$).

272) $3x^2+8=y^2$, $x,y \in N$. (R: $\emptyset$).

273) $x^2+y^2=z^2$, $x,y,z \in N$.
(R: Pitagorina trojka: $x=(a^2-b^2)t$, $y=2abt$, $z=(a^2+b^2)t$, odnosno: $x=2abt$, $y=(a^2-b^2)t$, $z=(a^2+b^2)t$,
$a,b \in N$, $a>b$, $t=\frac{m}{n} \in Q$, $n \mid M(a^2-b^2, 2ab, a^2+b^2)$.
Za $a=n+1$, $b=n$, $t=1 \Rightarrow$ $x=2n+1$, $y=2n^2+2n$, $z=2n^2+2n+1$ (Pitagora)
Za $a=n$, $b=1$, $t=1 \Rightarrow$ $x=n^2-1$, $y=2n$, $z=n^2+1$ (Platon)).

274) $x^2+4xy-3x-4y-600=0$, $x,y \in N$.
(R: $(n^2-601,\ 301-\frac{1}{2}n(n-1))$, $(n^2-601,\ 301-\frac{1}{2}n(n+1))$, $n \in N$).

275) $4x+y+4\sqrt{xy}-28\sqrt{x}-14\sqrt{y}+48=0$, $x,y \in N_0$.
(R: $(0,36)$, $(1,16)$, $(4,4)$, $(9,0)$, $(0,64)$, $(1,36)$, $(4,16)$, $(9,4)$, $(16,0)$).

276) $x^2+3x+24=y^2$, $x,y \in N$. (R: (5,8),(20,22)).

277) $\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}} = z$, $x,y,z \in N$. (R: $(n^2,1,n)$, $n \in N$).

278) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$, $x,y,z \in N$, $x>y>z$. (R: (15,6,5),(20,10,4), (36,9,4)).

279) $x+y+z=xyz$, $x,y,z \in N$. (R: (1,2,3),(1,3,2),(2,1,3), (2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)).

280) $2^{x^2+x-2}-2^{x^2-4}=992$, $x \in N$. (R: x=3).

281) $3^x-y^3=1$, $x,y \in N$. (R: (2,2)).

282) $3^x-2^y=1$, $x,y \in N$. (R: (1,1),(2,3)).

283) $x^x+y^y+z^z=t^t$, $x,y,z,t \in N$. (R: $\emptyset$).

284) $x+y+z=14$, $x+yz=19$, $x,y,z \in N$. (R: (5,2,7),(5,7,2), (7,3,4),(7,4,3)).

285) $x^y=z$, $y^z=x$, $z^x=y$, $x,y,z \in N$. (R: (1,1,1)).

XX - JEDNADŽBE KONGRUENCIJE PO MODULU

Kongruenciju

$ax \equiv b \pmod m$, $a,b \in Z$, $m \in N$, $x \in Z$ (nepoznanica) (1)

zovemo linearna kongruencija, a, po definiciji kongruencije zapravo predstavlja linearnu Diofantovu jednadžbu sa 2 nepoznanice: $ax=my+b$, tj.

$ax-my=b$, $a,b \in Z$, $m \in N$, $x,y \in Z$ (nepoznanice) (2).

Kongruencija (1) nema rješenja ako je $M(a,m)=d>1$ i $M(a,m,b)=1$, (3)

ima jedno rješenje $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod m$ ako je $M(a,m)=M(a,m,b)=1$, (4)

pri čemu je $\varphi(m)$ tzv. Eulerova funkcija (broj prirodnih brojeva manjih od m i relativno prostih sa m), (5)

odnosno ima d rješenja $x \equiv x_1+\frac{m}{d} \pmod m$, $t=0,1,\ldots,d-1$, ako je $M(a,m)=M(a,m,b)=d>1$, (6)

pri čemu je x_1 rješenje kongruencija $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$, tj. $x_1 \equiv \frac{b}{d}\left(\frac{a}{d}\right)^{\varphi(m/d)-1}$. (7)

Sustav od 2 linearne kongruencije:

$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$ (8)

možemo zamijeniti sustavom:

$x=a_1+m_1y$, $m_1y \equiv (a_2-a_1) \pmod{m_2}$ (9).

Sustav (9), pa stim i sustav (8), nema rješenja ako je $M(m_1,m_2)=d>1$ i $M(m_1,m_2,a_2-a_1)=1$, tj. ako vrijedi: $a_2 \not\equiv a_1 \pmod{M(m_1,m_2)}$, (10)

odnosno ima jedno rješenje $x=a_1+m_1y_1+V(m_1,m_2)t$, $t \in Z$, ako je $M(m_1,m_2)=M(m_1,m_2,a_2-a_1)=d$, tj. ako vrijedi: $a_2 \equiv a_1$ (mod $M(m_1,m_2)$ = mod d), (11)

pri čemu je y_1 jedno rješenje kongruencije $\frac{m_1}{d} \equiv \frac{a_2-a_1}{d} \pmod{\frac{m_2}{d}}$, tj. $y_1 \equiv \frac{a_2-a_1}{d}\cdot\left(\frac{m_1}{d}\right)^{\varphi(m_2/d)-1} \pmod{\frac{m_2}{d}}$ (12)

Sustav od n linearnih kongruencija

$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$, ..., $x \equiv a_n \pmod{m_n}$ (13)

rješavamo tako da riješimo prvo dvije kongruencije i kao rješenje dobivenu kongruenciju pripojimo preostalim n-2 kongruencijama. Na taj način smo za 1 smanjili broj kongruencija. Nastavljajući taj postupak dolazimo do konačnog rješenja.

Sustav (13) je rješiv ako za svake 2 kongruencije vrijedi: $a_i \equiv a_j \pmod{M(a_i,a_j)}$, $i,j=1,2,\ldots,n$. (14)

U slučaju da su $m_1,m_2,\ldots,m_n$ u parovima relativno prosti brojevi, rješenje sustava (13) je

$x=a_1M_1x_1+a_2M_2x_2+\ldots+a_nM_nx_n$, (15)

gdje je $M=m_1m_2\ldots m_n$, $M_i=\frac{M}{m_i}$, $M_ix_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i=1,2,3,\ldots,n$. (16)

Ako je $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_o$ polinom n-tog stupnja sa cjelobrojnim koeficijentima i $a_n \not\equiv 0 \pmod m$, tada kongruenciju $P_n(x) \equiv 0 \pmod m$ (17)

zovemo kongruencija n-tog stupnja po modulu m.

Ako je m=p prost broj, tada kongruencija (17) ima n različitih rješenja, a u protivnom slučaju manje. (18)

Neka je $m=p^q$, p prost broj:

Ako je $x \equiv x_1 \pmod p$ rješenje kongruencije $P_n(x) \equiv 0 \pmod p$ i ako je $P_n'(x_1) \not\equiv 0 \pmod p$ (P_n' = derivacija od P_n), tada postoji jedinstveno rješenje $x \equiv x_q \pmod{p^q}$ kongruencije $P_n(x) \equiv 0 \pmod{p^q}$ u klasi

$(x_1)_{(p)}$. Do tog rješenja dolazimo tako da prvo nadjemo rješenje $x \equiv x_1 \pmod p$, zatim provjeravamo koji su od brojeva $x=x_1+pt$, $t \in Z$, rješenja $x \equiv x_2 \pmod{p^2}$ kongruencije $P_n(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$, ..., te na kraju koji je od brojeva $x=x_{q-1}+p^{q-1}t$, $t \in Z$, rješenje $x \equiv x_q \pmod{p^q}$ kongruencije $p_n(x) \equiv 0 \pmod{p^q}$. (19)

Ako je $x \equiv x_1 \pmod p$ rješenje kongruencije $P_n(x) \equiv 0 \pmod p$, $P'_n(x_1) \equiv 0 \pmod p$ i ako je $x \equiv x_k \pmod{p^k}$ rješenje konkruencije $P_n(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$, a $P_n(x_k) \not\equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$, $k+1 \leqq q$, tada kongruencija $P_n(x) \equiv 0 \pmod{p^q}$ nema rješenja izmedju brojeva klase $(x_1)_{(p)}$. (20)

Ako je $x \equiv x_1 \pmod p$ rješenje kongruencije $P_n(x) \equiv 0 \pmod p$, $P'_n(x_1) \equiv 0 \pmod p$ i ako je $x \equiv x_{q-1} \pmod{p^{q-1}}$ rješenje kongruencije $P_n(x) \equiv 0 \pmod{p^{q-1}}$, te $P_n(x_{q-1}) \equiv 0 \pmod{p^q}$, tada kongruencija $P_n(x) \equiv 0 \pmod{p^q}$ ima za rješenja sve brojeve klase $(x_1)_{(p)}$. (21)

Neka je $m=p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_k^{q_k}$ složen broj rastavljen na faktore. Tada je kongruencija $P_n(x) \equiv 0 \pmod m$ ekvivalentna sustavu kongruencija $P_n(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{q_i}}$, $i=1,2,\dots,k$ a ima $m_1 m_2 \dots m_k$ nekongruentnih rješenja kada $P_n \equiv 0 \pmod{p_i^{q_i}}$ imaju m_i, $i=1,2,\dots,k$, nekongruentnih rješenja. (22)

Sustav kongruencija $P_n(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$, $i=1,2,\dots,k$, ekvivalentan je kongruenciji $P_n(x) \equiv 0 \pmod{V(m_1,m_2,\dots,m_k)}$. (23)

Z a d a c i :

286) Riješiti kongruenciju $2x \equiv 3 \pmod 4$.
Rješenje:

Kako je $M(2,4)=2>1$ i $M(2,4,3)=1$, prema (3) zadana kongruencija nema rješenja.

287) Riješiti kongruenciju $5x \equiv 1 \pmod 7$.
Rješenje:

Zbog $M(5,7)=M(5,7,1)=1$ (a) i $\varphi(7)=6$ (b), rješenje zadane

kongruencije $5x \equiv 1 \pmod 7$ (c) prema (4) bit će:
$x \equiv 1 \cdot 5^{6-1} \pmod 7$, tj. $x \equiv 3125 \pmod 7$, odnosno $x \equiv 3 \pmod 7$ (d).

288) Riješiti kongruenciju $12x \equiv 8 \pmod{20}$.
Rješenje:

Kako je $M(12,20)=M(12,20,8)=4>1$ (a), iz zadane kongruencije $12x \equiv 8 \pmod{20}$ (b) dobivamo $3x \equiv 2 \pmod 5$ (c). Pošto je $M(3,5)=M(3,5,2)=1$ i $\varphi(5)=4$, rješenje kongruencije (c) prema (4) bit će: $x \equiv 2 \cdot 3^{4-1} \pmod 5$, tj. $x \equiv 54 \pmod 5$, odnosno $x \equiv 4 \pmod 5$ (d). Zbog uvjeta (a) kongruencija (b) će prema (6) imati 4 rješenja: $x \equiv 4+5t \pmod{20}$, $t=0,1,2,3$ (e), odnosno: $x \equiv 4,9,14,19 \pmod{20}$ (f).

289) Riješiti sustav kongruencija: $x \equiv 5 \pmod 9$, $x \equiv 4 \pmod 6$.
Rješenje:
$M(9,6)=3$, a $5 \not\equiv 4 \pmod 3$, pa po (10) zadani sustav kongruencija nema rješenja.

290) Riješiti sustav kongruencija: $x \equiv 3 \pmod 8$, $x \equiv 7 \pmod{10}$.
Rješenje:

$M(8,10)=2$, a $3 \equiv 7 \pmod 2$, pa po (11) zadani sustav kongruencija ima točno jedno rješenje.
Iz prve kongruencije je $x=8y+3$ (a), što uvrštavanjem u drugu kongruenciju daje $8y+3 \equiv 7 \pmod{10}$, tj. $8y \equiv 4 \pmod{10}$, odakle je prema (6):

$$y \equiv 5m+3 \pmod{10},\ m=0,1,$$
$$y=10n+5m+3,\ n \in Z,\ m=0,1,$$
$$y=5t+3,\ t=2n+m \in Z,\quad n \in Z,\ m=0,1,$$
$$y=5t+3,\quad t \in Z \quad \text{(b)}.$$

Iz (a) i (b) izlazi:

$$x=8\cdot(5t+3),\ t \in Z,$$
$$x=40t+27,\quad t \in Z,$$
$$x \equiv 27 \pmod{40} \quad \text{(c)}.$$

291) Riješiti sustav kongruencija: $x \equiv 1 \pmod 2$,
$x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 5$.
Rješenje:
Prvi način:

Iz prve kongruencije je $x=2a+1, a \in Z$ (a), što uvrštenjem u drugu kongruenciju daje: $2a+1 \equiv 2 \pmod 3$, $2a \equiv 1 \pmod 3$, $a \equiv 1 \cdot 2^{\varphi(3)-1} \pmod 3$, $a \equiv 2 \pmod 3$, tj. $a=3b+2$, $b \in Z$ (b).
Iz (a) i (b) izlazi: $x=2\cdot(3b+2)+1$, $b \in Z$, odnosno $x=6b+5$, $b \in Z$, tj. $x \equiv 5 \pmod 6$ (c).
Iz (c) i treće kongruencije zadanog sustava kongruencija izlazi: $6b+5 \equiv 3 \pmod 5$, $6b \equiv -2 \pmod 5$, $6b \equiv 3 \pmod 5$, $b \equiv 3 \cdot 6^{\varphi(5)-1} \pmod 5$, $b \equiv 3 \cdot 6^3 \pmod 5$, $b \equiv 648 \pmod 5$,

$b \equiv 3 \pmod 5$, tj. $b=5c+3, c \in Z$ (d).
Iz (c) i (d) izlazi: $x=6\cdot(5c+3)+5$, $c \in Z$,
$x=30c+23$, $c \in Z$, tj.
$x \equiv 23 \pmod{30}$ (e).

Drugi način:
Prema (16) je $M=2\cdot3\cdot5=30$, $M_1=15$, $M_2=10$, $M_3=6$,
$15x_1 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow x_1 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow x_1=2a+1$, $a \in Z$,
$10x_2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x_2 \equiv 10 \pmod 3 \Rightarrow x_2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x_2=3b+1$, $b \in Z$,
$6x_3 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x_3 \equiv 216 \pmod 5 \Rightarrow x_3 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x_3=5c+1$, $c \in Z$,
pa je prema (15):
$x= 1\cdot15\cdot(2a+1)+2\cdot10\cdot(3b+1)+3\cdot6\cdot(5c+1)$, $a,b,c \in Z$,
$x= 30a+60b+90c+53$, $a,b,c \in Z$,
$x=30t+53$, $t=a+2b+3c \in Z$, $a,b,c \in Z$,
$x \equiv 53 \pmod{30}$, tj.
$x \equiv 23 \pmod{30}$.

292) Riješiti kongruenciju $P_3(x)=2x^3-3x^2+6x+15 \equiv 0 \pmod 5$.
Rješenje:

Potpun sistem ostataka po modulu 5 sa najmanjim apsolutnim vrijednostima je: $-2,-1,0,1,2$. Kako je $P_3(-2)=-25 \equiv 0 \pmod 5$, $P_3(-1)=$
$=4 \not\equiv 0 \pmod 5$, $P_3(0)=15 \equiv 0 \pmod 5$, $P_3(1)=20 \equiv 0 \pmod 5$, $P_3(2)=$
$=31 \not\equiv 0 \pmod 5$, rješenja zadatka su: $x \equiv -2,0,1 \pmod 5$, tj.
$x \equiv 0,1,3 \pmod 5$.

293) Riješiti kongrenciju $P_4(x)=x^4+x^3+2x^2-x+2 \equiv 0 \pmod{125}$.
Rješenje:

Nadjimo prvo rješenja $x \equiv x_1 \pmod 5$ kongruencije $P_4(x) \equiv 0$
$\pmod 5$. To su $x \equiv 1,-1,-2 \pmod 5$.
Zbog $P_4'(1)=5 \equiv 0 \pmod 5$ i $P_4(1)=5 \not\equiv 0 \pmod{25}$, prema (20)
kongruencija $P_4(x) \equiv 0 \pmod{125}$ nema rješenja u klasi $(1)_{(5)}$.
Zbog $P_4'(-1)=-6 \not\equiv 0 \pmod 5$ i $P_4'(-2)=-29 \not\equiv 0 \pmod 5$, prema
(19) kongruencija $P_4(x) \equiv 0 \pmod{125}$ ima točno po jedno
rješenje u klasama $(-1)_{(5)}$ i $(-2)_{(5)}$.
Iz $x=-1+5t$, $t \in Z$, $P_4(x)=P_4(-1+5t)=P_4(-1)+P_4'(-1)\cdot5t=5-6\cdot5t=$
$=5-30t \equiv 0 \pmod{25}$ izlazi da je: $1-6t \equiv 0 \pmod 5$, $t \equiv -4$
$\pmod 5$, tj. $t \equiv 1 \pmod 5$, pa je rješenje kongreuncije
$P_4(x) \equiv 0 \pmod{25}$: $x \equiv -1+5t \pmod{25} \equiv -1+5\cdot1 \pmod{25} \equiv$
$\equiv 4 \pmod{25}$.
Nadalje iz $x \equiv 4+25t$, $t \in Z$, $P_4(x)=P_4(4+25t)=P_4(4)+P_4'(4)\cdot25t=$
$=350+319\cdot25t \equiv 0 \pmod{125}$ izlazi da je: $14+319t \equiv 0 \pmod 5$,
$t \equiv -1 \pmod 5$, tj. $t \equiv 4 \pmod 5$, pa je $x \equiv 4+25t \pmod{125} \equiv$

$\equiv 4+25\cdot4 \pmod{125} \equiv 104 \pmod{125}$ rješenje kongruencije
$P_4(x) \equiv 0 \pmod{125}$.
Analogno iz $x=-2+5t$, $t \in Z$. $P_4(x) \equiv 0 \pmod{25}$ izlazi da je:
$4-29t \equiv 0 \pmod 5$, tj. $t \equiv 1 \pmod 5$, pa je $x \equiv 3 \pmod{25}$ rješenje kongruencije $P_4(x) \equiv 0 \pmod{25}$.
Nadalje iz $x=3+25t$, $t \in Z$, $P_4(x) \equiv 0 \pmod{125}$ izlazi da je:
$5+146t \equiv 0 \pmod 5$, tj. $t \equiv 0 \pmod 5$, pa je $x \equiv 3 \pmod{125}$
rješenje kongruencije $P_4(x) \equiv 0 \pmod{125}$.
Rješenja zadatka su:
$x \equiv 104 \pmod{125} \equiv -21 \pmod{125}$, $x \equiv 3 \pmod{125}$.

294) Riješiti kongruenciju $P_4(x)=x^4-x \equiv 0 \pmod{20}$.
Rješenje:

Kako je $20=2^2\cdot5$, tada je prema (22) zadana kongruencija
$$x^4-x \equiv 0 \pmod{20} \quad (a)$$
ekvivalentna sustavu kongruencija:
$$x^4-x \equiv 0 \pmod{2^2},\ x^4-x \equiv 0 \pmod 5 \quad (b).$$
Rješenja prve kongruencije sustava (b) su $x \equiv 0,1 \pmod 4$, a druge $x \equiv 0,1 \pmod 5$, pa sustav (b), a stim i kongruencija (a), ima 4 rješenja: $x \equiv 0,16,5,1 \pmod{20}$ (c), do kojih dolazimo rješavajući 4 sustava kongruencija:
$x \equiv 0 \pmod 4$ i $x \equiv 0 \pmod 5$ (d), $x \equiv 0 \pmod 4$ i $x \equiv 1 \pmod 5$ (e),
$x \equiv 1 \pmod 4$ i $x \equiv 0 \pmod 5$ (f) $x \equiv 1 \pmod 4$ i $x \equiv 1 \pmod 5$ (g).
Rješenja zadatka su, dakle: $x \equiv 0,1,5,16 \pmod{20}$.

295) Riješiti sustav kongruencija: $2x \equiv 3 \pmod 5$,
$x^2-2x+3 \equiv 0 \pmod 7$.
Rješenje:

Rješenje prve kongruencije je $x \equiv 4 \pmod 5$, a druga kongruencija nema rješenja, pa zadani sustav kongruencija nema rješenja.

V j e ž b e :

296) $8x \equiv 4 \pmod{10}$. (R: $x \equiv 3,8 \pmod{10}$).
297) $12x \equiv 8 \pmod{16}$. (R: $x \equiv 2,6,10,14 \pmod{16}$).
298) $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 10 \pmod{16}$. (R: $x \equiv 26 \pmod{48}$).
299) $x \equiv 3 \pmod 4$, $x \equiv 6 \pmod{15}$, $x \equiv 7 \pmod{36}$ (R: $\emptyset$).
300) $x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 4$, $x \equiv 4 \pmod 5$, $x \equiv 1 \pmod 7$.
(R: $x \equiv 239 \pmod{429}$).
301) $P_3(x)=8x^3-3x^2+x-2 \equiv 0 \pmod 6$. (R: $\emptyset$).
302) $P_4(x)=x^4+2x^3-x^2+2x-12 \equiv 0 \pmod 4$. (R: $x \equiv 0,1,2,3 \pmod 4$).
303) $P_5(x)=x^5-5x^4-2x^2+x+10 \equiv 0 \pmod{27}$. (R: $x \equiv 22 \pmod{27}$).
304) $P_3(x)=3x^3+6x^2+x-5 \equiv 0 \pmod{15}$. (R: $x \equiv 2,5,11 \pmod{15}$).
305) $x^2+x+5 \equiv 0 \pmod 7$, $x^3+3x+1 \equiv 0 \pmod{11}$. (R: $\emptyset$).
306) $x^3+x+2 \equiv 0 \pmod 7$, $x^3+3 \equiv 0 \pmod 9$. (R: $x \equiv 15,26 \pmod{77}$).

XXI - JEDNADŽBE SA NAJVEĆIM CIJELIM DIJELOM

Funkciju $[\;]:R\to Z$, $x\mapsto[x]$, gdje je $[x]$ najveći cijeli dio od x koji ne premašuje x, zovemo funkcija najvećeg cijelog dijela od x koji ne premašuje x,
a funkciju $\{\;\}:R\to[0,1)$, $x\mapsto\{x\}=x-[x]$ zovemo funkcija decimalnog dijela od x.

Iz same definicije tih funkcija proizlaze njihova svojstva:

$$(1)\quad x=[x]+\{x\},\quad [x]=x-\{x\},$$
$$(2)\quad 0\leq\{x\}<1,$$
$$(3)\quad x-1<[x]\leq x,$$
$$(4)\quad [x]\leq x<[x]+1,$$
$$(5)\quad [k+x]=k+[x],\quad k\in Z,$$
$$(6)\quad \left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right],\quad n\in N.$$

Z a d a c i :

307) Riješiti jednadžbu $\left[\frac{2x+2}{3}\right]=x,\quad x\in R.$

Rješenje:

$$\underbrace{\left[\frac{2x+2}{3}\right]}_{k\in Z}=x\Rightarrow x=k\in Z\qquad (a)$$

Prvi način:

$$(3)\Rightarrow \left.\begin{matrix}\frac{2x+2}{3}-1<x\leq\frac{2x+2}{3}\Rightarrow -1<x\leq 2\\ x\in Z\quad (a)\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in\{0,1,2\}.$$

Isto bi dobili i primjenom (4).

Drugi način:

$$(1)\Rightarrow\left\{\frac{2x+2}{3}\right\}=\frac{2x+2}{3}-\left[\frac{2x+2}{3}\right]=\frac{2x+2}{3}-x=\frac{2-x}{3},$$

$$(2)\Rightarrow\left.\begin{matrix}\left\{\frac{2x+2}{3}\right\}=\frac{2-x}{3}\in[0,1)\\ x\in Z\ (a)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{2-x}{3}\in\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}\Rightarrow x\in\{0,1,2\}.$$

Izvršite pokus.

308) Riješiti jednadžbu $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2},\ x\in R.$

Rješenje:

$$\underbrace{\left[\frac{x+1}{3}\right]}_{k\in Z}=\frac{x-1}{2}\Rightarrow x=2k+1\in Z,\quad k\in Z\ (a),$$

$$\left[\frac{(2k+1)+1}{3}\right]=k\Rightarrow\left[\frac{2k+2}{3}\right]=k.$$

Prema prethodnom zadatku je $k\in\{0,1,2\}$, pa iz (a) izlazi da je $x\in\{1,3,5\}$.

309) Riješiti jednadžbu $\left[\frac{x^2+3}{x+2}\right]=x-1,\quad x\in R.$

Rješenje:

$$\underbrace{\left[\frac{x^2+3}{x+2}\right]}_{k\in Z}=x-1\Rightarrow x=k+1\in Z,\quad k\in Z\ (a),$$

$$\left[x-2+\frac{7}{x+2}\right]=x-1\overset{(5)}{\Rightarrow}x-2+\left[\frac{7}{x+2}\right]=x-1\Rightarrow\left[\frac{7}{x+2}\right]=1\overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\left.\begin{matrix}1\leq\frac{7}{x+2}<2\\ 7>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x+2>0\\ 1\leq\frac{7}{x+2}<2/\cdot(x+2)>0\end{matrix}\right.\Rightarrow \left.\begin{matrix}x+2\leq 7<2x+4\Rightarrow\frac{3}{2}<x\leq 5\\ x\in Z\ (a)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in\{2,3,4,5\}$. Izvršite pokus. Riješite zadatak supstitucijom (a).

310) Riješiti jednadžbu $\left[\frac{2x+3}{5}\right]+\left[\frac{4x+7}{10}\right]=x,\quad x\in R.$

Rješenje:

$$\underbrace{\left[\frac{2x+3}{5}\right]+\left[\frac{4x+7}{10}\right]}_{k\in Z}=x\Rightarrow x=k\in Z\quad (a),$$

$$(3)\Rightarrow\left.\begin{matrix}\frac{2x+3}{5}-1+\frac{4x+7}{10}-1<x\leq\frac{2x+3}{5}+\frac{4x+7}{10}\Rightarrow-\frac{7}{2}<x\leq\frac{13}{2}\\ x\in Z\ (a)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$, ali jedino $x\in\{-2,0,2,4,6\}$ zadovoljavaju zadanu jednadžbu. Izvršite pokus.

311) Riješiti jednadžbu $\left[\frac{2x+0,2}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3},\quad x\in R.$

Rješenje:

$$\underbrace{\left[\frac{10x+1}{15}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]}_{k\in Z}=\frac{5x-4}{3}\quad (a)\Rightarrow k=\frac{5x-4}{3}\in Z=\ x=\frac{5k+4}{5},\ k\in Z\ (b).$$

Iz (a) i (b) slijedi: $\left[\frac{2k+3}{5}\right]+\left[\frac{4k+7}{10}\right]=k\quad (c).$

Prema prethodnom zadatku je $k\in\{-2,0,4,6\}$, pa je $x\in\left\{-\frac{2}{5},\frac{4}{5},2,\frac{16}{5},\frac{22}{5}\right\}$. Izvršite pokus.

312) Riješiti jednadžbu $2^{[x]}=1+2x,\ x\in R.$

Rješenje:

$$2^{[x]}=1+2x\ |:2\Rightarrow 2^{[x]-1}=\frac{1}{2}+x\Rightarrow 2^{[x]-1}=\frac{1}{2}+[x]+\{x\}.$$

Za $x\in Z\setminus Z[-2,3]$ jednadžba nema rješenja, jer je tada lijeva strana jednadžbe veća od desne strane.

$1^\circ)$ $[x]=-1\Rightarrow 2^{-2}=\frac{1}{2}-1+\{x\}\Rightarrow\{x\}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=[x]+\{x\}=-\frac{1}{4},$

$2^\circ)$ $[x]=0\Rightarrow\{x\}=0\Rightarrow x=0,$

3°) $[x] = 1 \Rightarrow \{x\} = -\frac{1}{2} < 0$, kontradikcija,

4°) $[x] = 2 \Rightarrow \{x\} = -\frac{1}{2} < 0$, kontradikcija,

5°) $[x] = 3 \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Rješenja zadatka su, dakle: $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{7}{2}$. Izvršite pokus.

313) Riješiti jednadžbu $[x^2] = 3\cdot[x]+1$, $x\in R$.
Rješenje:

Neka je $[x]=n$, $n\in N$. Tada je $n\leq x<n+1/^2$,
$n^2\leq x^2<n^2+2n+1$, $n^2\leq[x^2]\leq n^2+2n$, tj. $[x^2]=n^2+k, 0\leq k\leq 2n, k\in N_o$ (a).
Uvrstimo li (a) u zadanu jednadžbu, dobivamo: $n^2+k=3n+1$, tj.
$k=-n^2+3n+1$ (b), odakle na osnovu (a) izlazi:
$0\leq -n^2+3n+1\leq 2n$, tj. $n_1=2\in N$ i $n_2=3\in N$ (c).
Iz (b) i (c) dobivamo: $k_1=3$ i $k_2=1$, pa na osnovu (a) imamo:
$[x_1^2]=2^2+3=7$, tj. $7\leq x_1^2<8$,
$[x_2^2]=3^2+1=10$, tj. $10\leq x_2^2<11$, odakle je:
$\sqrt{7}\leq x_1<\sqrt{8}$, $\sqrt{10}\leq x_2<\sqrt{11}$, tj.
$x_1\in[\sqrt{7}, \sqrt{8})$, $x_2\in[\sqrt{10}, \sqrt{11})$.

314) Riješiti sustav jednadžbi: $2^{[x]}\cdot 2^{\sqrt{\{y\}}} = 8$,
$3^{[y]}\cdot 3^{\{x\}^2} = \frac{1}{3}$, $x,y\in R$.

Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} 2^{[x]+\sqrt{\{y\}}} = 2^{3/2} \\ 3^{[y]+\{x\}^2} = 3^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [x]+\sqrt{\{y\}} = 1+\frac{1}{2} \\ [y]+\{x\}^2 = -1+0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [x]=1, \sqrt{\{y\}}=\frac{1}{2} \\ [y]=-1, \{x\}^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [x]=1, \quad \{y\}=\frac{1}{4} \\ [y]=-1, \quad \{x\}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0, \quad y=\frac{3}{4}.$$

315) Riješiti sustav jednadžbi: $\log_5\left[\frac{2x-3}{4}\right]=1$,
$\text{tg}x=\text{sign}[-2,41]$, $x\in R$.

Rješenje:
Iz prve jednadžbe dobivamo: $\left[\frac{2x-3}{4}\right]=5$, odakle je $x\in\left[\frac{23}{2},\frac{27}{2}\right)$ (a).
Iz druge jednadžbe dobivamo: $\text{tg}x=-1$, odakle je $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$ (b). Iz (a) i (b) izlazi: $x=\frac{15\pi}{4}$.

V j e ž b e :

316) $\left[\frac{\left[\frac{3x-6}{2}\right]}{3}\right] = [3^{-5}]$, $x\in R$ (R: $x\in R[2,4)$).

317) $[x]+\sqrt{x-[x]}=a$, $x\in R$, $a\in R$. (R: $x=[a]+\{a\}^2$).

318) $x+[y]+\{z\}=2,7$; $\{x\}+y+[z]=4,3$; $[x]+\{y\}+z=3,8$;
$x,y,z\in R$. (R: $x=1,6$; $y=1,7$; $z=2,1$).

319) Putnik je bio na putu cio broj dana i svaki dan je prelazio onoliko km koliko je svega dana bio na putu. Kada bi on svaki dan prešao po 10 km i zaustavljao se na 1 dan poslije svakih 40 km, vrijeme njegovog putovanja uvećalo bi se za 2 dana. Koliko dana je putnik proveo na putu?
(Uputa: $\frac{x^2}{10}+\left[\frac{x^2}{40}\right]=x+2$. R: $x=10$ dana).

XXII - REKURZIVNE (DIFERENCNE) JEDNADŽBE

Jednadžbe oblika: $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ra_{n-r}+f(n)$, $r,n\in N$, $r\leq n$, $c_1,c_2,\ldots,c_r\in R$, $c_r\neq 0$, zovemo linearne rekurzivne jednadžbe r-tog reda. Pri tome se one zovu homogene ako je $f(n)=0$, a u protivnom slučaju nehomogene linearne rekurzivne jednadžbe r-tog reda.

Homogenu linearnu rekruzivnu jednadžbu r-tog reda

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ra_{n-r} \qquad (1)$$

rješavamo tako da toj jednadžbi pridružimo tzv. karakterističnu jednadžbu r-tog stupnja

$$x^r=c_1x^{r-1}+c_2x^{r-2}+\ldots+c_r, \text{ tj.}$$

$$x^r-c_1x^{r-1}-c_2x^{r-2}-\ldots-c_r=0 \qquad (2).$$

Ako su svi korijeni x_i $(i=1,2,\ldots,r)$ jednadžbe (2) medjusobno različiti, tada je opće rješenje jednadžbe (1) dano izrazom:

$$a_n=k_1x_1^n+k_2x_2^n+\ldots+k_rx_r^n, \quad k_1k_2,\ldots,k_r\in R \qquad (3);$$

ako su svi korijeni jednadžbe (2) medjusobno jednaki, tada je opće rješenje jednadžbe (1) dano izrazom:

$$a_n=k_1x_1^n+k_2nx_1^n+\ldots+k_rn^{r-1}x_1^r, \quad k_1,k_2,\ldots,k_r\in R \qquad (4);$$

a ako je s $(s<r)$ rješenja jednadžbe (2) medjusobno različitih, a od preostalih r-s rješenja njih p medjusobno jednakih $(x_{s+1}=x_{s+2}=\ldots x_{s+p})$ i njih $q=r-s-p$ medjusobno jednakih

$(x_{s+p+1}=x_{s+p+2}=\ldots=x_r)$, tada je opće rješenje jednadžbe (1) dano izrazom:

$$a_n=(k_1x_1^n+k_2x_2^n+\ldots+k_sx_s^n)+(k_{s+1}x_{s+1}^n+k_{s+2}nx_{s+1}^n+\ldots+$$
$$+k_{s+p}n^{p-1}x_{s+1}^n)+(k_{s+p+1}x_{s+p+1}^n+k_{s+p+2}nx_{s+p+1}^n+$$
$$+\ldots+k_rn^{q-1}x_{s+p+1}^n) \qquad (5).$$

Pri tome se koeficijenti $k_1,k_2,\ldots,k_r$ odredjuju iz tzv. početnih uvjeta.

Rješenje linearne nehomogene rekurzivne jednadžbe r-tog reda:

$$a_n=c_1a_{n-1}+\ldots+c_ra_{n-r},\ f(n)=f_1(n)+\ldots+f_t(n),\ t\in N \qquad (6)$$

dobivamo po formuli:

$$a_n=a_n'+\sum_{i=1}^{t}a_n^{(i)},$$

gdje je a_n' opće rješenje (u koje ne uvrštavamo početne uvjete, niti za sada izračunavamo koeficijente $k_1,k_2,\ldots\ldots,k_r$) pridružene homogene jednadžbe:

$$a_n'=c_1a_{n-1}'+\ldots+c_ra_{n-r}' \qquad (8),$$

a $a_n^{(i)}$ su tzv. partikularna rješenja jednadžbi:

$$a_n^{(i)}=c_1a_{n-1}^{(i)}+\ldots+c_ra_{n-r}^{(i)}+f_i(n),\ i=1,\ldots,t \qquad (9).$$

Partikularna rješenja $a_n^{(i)}$ jednadžbi (9) izračunavamo posebno za svaki nehomogen član $f_i(n)$, $i=1,\ldots,t$, metodom neodredjenih koeficijenata, stavljajući obično:

$$\left.\begin{array}{l} a_n^{(i)}=A,\ \text{ako je } f_i(n)=d=\text{ konstanta},\\ a_n^{(i)}=A_pn^p+A_{p-1}n^{p-1}+\ldots+A_1p+A_o,\ \text{ako je } f_i(n)=d\cdot n^p\\ a_n^{(i)}=A\cdot d^n,\ \text{ako je } f_i(n)=d^n. \end{array}\right\}(10)$$

Ako je partikularno rješenje ujedno i rješenje pripadne homogene jednadžbe, tada partikularno rješenje pokušavamo tražiti u obliku polinoma stupnja ne manjeg od n, za $f(n)=d^n$ pokušavamo sa $a_n^{(i)}=And^n$ i slično.

Na kraju, uvrštavajući početne uvjete u (7), odredjujemo koeficijente koji se pojavljuju u a_n.

Rekurzivne jednadžbe koje nisu linearne, zovu se nelinearne rekurzivne jednadžbe.

Z a d a c i :

320) Riješiti jednadžbu $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$, $n\geq 2$, $n\in N$ (a), uz početne uvjete: $a_o=2$, $a_1=1$ (b).

Rješenje:

Prema (2) jednadžbi (a) pridružujemo karakterističnu jednadžbu: $x^2-3x+2=0$ (c), čija su rješenja: $x_1=1, x_2=2$, pa je prema (3) opće rješenje jednadžbe (a):

$a_n=k_1\cdot 1^n+k_2\cdot 2^n$, tj. $a_n=k_1+k_2\cdot 2^n$ (d).

Koeficijente k_1 i k_2 odredjujemo iz (d) i početnih uvjeta (b):

$a_o=2$ i $a_1=1 \Rightarrow k_1+k_2=2$ i $k_1+2k_2=1 \Rightarrow k_1=3$ i $k_2=-1$ (e), pa je rješenje zadatka: $a_n=3-2^n$, $n\in N_o$ (f).

321) Riješiti jednadžbu $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}$, $n\geq 2, n\in N$ (a), uz početne uvjete: $a_o=1$, $a_1=-2$ (b).

Rješenje:

Prema (2) jednadžbi (a) pridružujemo karakterističnu jednadžbu $x^2-4x+4=0$ (c), čija su rješenja $x_1=x_2=2$. Prema (4) opće rješenje jednadžbe (a) je $a_n=k_1\cdot 2^n+k_2n\cdot 2^n$ (d). Iz (d) i (b) odredjujemo konstante k_1 i k_2:

$a_o=2$ i $a_1=-2 \Rightarrow k_1=1$ i $2k_1+2k_2=-2 \Rightarrow k_1=1$ i $k_2=-2$ (e), pa je rješenje zadatka: $a_n=2^n-2n\cdot 2^n$, tj. $a_n=2^n(1-2n)$, $n\in N_o$) (f).

322) Riješiti jednadžbu $a_n=2a_{n-1}-2a_{n-3}+a_{n-4}$, $n\in N$, $n\geq 4$ (a), uz početne uvjete: $a_o=1$, $a_1=-3$, $a_2=-1$, $a_3=-9$ (b).

Rješenje:

Prema (2) jednadžbi (a) pridružujemo karakterističnu jednadžbu $x^4-2x^3+2x-1=0$ (c), čija su rješenja: $x_1=-1$, $x_2=x_3=x_4=1$, pa je prema (5) opće rješenje jednadžbe (a) dano sa:

$a_n=k_1\cdot(-1)^n+k_2+k_3n+k_4n^2$ (d). Iz (d) i (b) izlazi:

$a_o=1$ i $a_1=-3$ i $a_2=-1$ i $a_3=-9 \Rightarrow k_1+k_2=1$ i $-k_1+k_2+k_3+k_4=-3$ i $k_1+k_2+2k_3+4k_4=-1$ i $-k_1+k_2+3k_3+9k_4=-9 \Rightarrow k_1=2$ i $k_2=-1$ i $k_3=1$ i $k_4=-1$ (e), pa je rješenje zadatka:

$a_n=2\cdot(-1)^n-1+n-n^2$, tj. $a_n=-n^2+n-1+2\cdot(-1)^n$, $n\in N_o$ (f).

323) Riješiti jednadžbu $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}-4n^2$, $n\in N$, $n\geq 2$ (a), uz početne uvjete: $a_o=11/2$, $a_1=41/2$ (b) .

Rješenje:

Prema (8) pridružena homogena rekurzivna jednadžba zadanoj jednadžbi (a) je: $a'_n=2a'_{n-1}+3a'_{n-2}$ (c), pa je prema (2) karakteristična jednadžba jednadžbe (c) dana izrazom : $x^2-2x-3=0$ (d). Rješenja jednadžbe (d) su $x_1=-1$, $x_2=3$, pa je prema (3) opće rješenje jednadžbe (c):

$$a'_n=k_1\cdot(-1)^n+k_2\cdot 3^n \quad (e).$$

Partikularno rješenje jednadžbe

$$a_n^{(1)}=2a_{n-1}^{(1)}+3a_{n-2}^{(1)}-4n^2 \quad (f)$$

prema (10) računamo ovako:

$$a_n^{(1)}=A_2n^2+A_1n+A_o=2\,(A_2(n-1)^2+A_1(n-1)+A_o)+3(A_2(n-2)^2+$$
$$+A_1(n-2)+A_o)-4n^2,$$

$$A_2n^2+A_1n+A_o=(5A_2-4)n^2+(-16A_2+5A_1)n+(14A_2-8A_1+5A_o),$$

odakle metodom neodredjenih koeficijenata izlazi:

$A_2=5A_2-4$, $A_1=-16A_2+5A_1$, $A_o=14A_2-8A_1+5A_o$, tj. $A_2=1$, $A_1=4$, $A_o=\frac{9}{2}$, pa iz $a_n^{(1)}=A_2n^2+A_1n+A_o$ izlazi:

$$a_n^{(1)}=n^2+4n+\frac{9}{2} \quad (g).$$

Iz (e) i (g) prema (7) izlazi: $a_n=a'_n+a_n^{(1)}$, tj.

$$a_n=k_1\cdot(-1)^n+k_2\cdot 3^n+4n+\frac{9}{2} \quad (h).$$

Iz (h) i (b) izlazi: $a_o=\frac{11}{2}$ i $a_1=\frac{41}{2}$ $\Rightarrow$ $k_1+k_2+\frac{9}{2}=\frac{11}{2}$ i $-k_1+3k_2+1+4+\frac{9}{2}=\frac{41}{2}$ $\Rightarrow$ $k_1+k_2=1$ i $-k_1+3k_2=11$ $\Rightarrow$ $k_1=-2$ i $k_2=3$ (i), pa iz (h) dobivamo rješenje zadatka:

$$a_n=-2\cdot(-1)^n+3^{n+1}+n^2+4n+\frac{9}{2}, \; n\in N_o \quad (j).$$

324) Riješiti jednadžbu $a_n=-4a_{n-1}+3a_{n-2}+18a_{n-3}-32n+7\,(-2)^n$, $n\in N$, $n\geq 3$ (a), uz početne uvjete: $a_o=22$, $a_1=-15$, $a_2=$ $=84$ (b).

Rješenje:

Prema (8) pridružena homogena jednadžba zadanoj jednadžbi je:

$a'_n=-4a'_{n-1}+3a'_{n-2}+18a'_{n-3}$ (c), pa je prema (2) karakteristična jednadžba jednadžbe (c): $x^3+4x^2-3x-18=0$ (d). Rješenja ove jednadžbe su: $x_1=2$, $x_2=x_3=-3$, pa je prema (5) opće rješenje jednadžbe (c):

$$a'_n=k_1\cdot 2^n+k_2\cdot(-3)^n+k_3n\cdot(-3)^n \quad (e).$$

Partikularno rješenje jednadžbe

$$a_n^{(1)}=-4a_{n-1}^{(1)}+3a_{n-2}^{(1)}+18a_{n-3}^{(1)}-32n \quad (f)$$

prema (10) računamo ovako:

$$a_n^{(1)}=A_1n+A_o=-4(A_1(n-1)+A_o)+3(A_1(n-2)+A_o)+18(A_1(n-3)+A_o)-32n,$$

$A_1n+A_o=(17A_1-32)n+(-56A_1+17A_o)$, odakle metodom neodredjenih koeficijenata dobivamo: $A_1=2$, $A_o=7$, pa iz $a_n^{(1)}=A_1n+A_o$ izlazi:

$$a_n^{(1)}=2n+7 \quad (g).$$

Partikularno rješenje jednadžbe

$$a_n^{(2)}=-4a_{n-1}^{(2)}+3a_{n-2}^{(2)}+18a_{n-3}^{(2)}+7(-2)^n \quad (h)$$

prema (10) računamo ovako:

$$a_n^{(2)}=A\cdot(-2)^n=-4(A\cdot(-2)^{n-1})+3(A\cdot(-2)^{n-2})+18(A\cdot(-2)^{n-3})+7\cdot(-2)^n,$$

tj. $A\cdot(-2)^n=-4A\cdot(-2)^{n-1}+3A\cdot(-2)^{n-2}+18A\cdot(-2)^{n-3}+7\cdot(-2)^n$, $-8A=$ $=-16A-6A+18A-56$, $A=14$, pa iz $a_n^{(2)}=A\,(-2)^n$ izlazi:

$$a_n^{(2)}=14\cdot(-2)^n \quad (i).$$

Iz (e),(g),(i) prema (7) izlazi:

$$a_n=a'_n+a_n^{(1)}+a_n^{(2)}=k_1\cdot 2^n+k_2\cdot(-3)^n+k_3n\cdot(-3)^n+2n+7+14\cdot(-2)^n \quad (j),$$

pa iz (b) i (j) izlazi: $a_o=22$ i $a_1=-15$ i $a_2=84$ $\Rightarrow$ $k_1+k_2=1$ i $2k_1-3k_2-3k_3=4$ i $4k_1+9k_2+18k_3=17$ $\Rightarrow$ $k_1=2$ i $k_2=-1$ i $k_3=1$ (k).

Rješenje zadatka prema (j) i (k) je:

$$a_n=2\cdot 2^n-(-3)^n+n\cdot(-3)^n+2n+7+14\cdot(-2)^n, \text{ tj.}$$

$$a_n=2^{n+1}-7\cdot(-2)^{n+1}+(n-1)\cdot(-3)^n+2n+7, \quad n\in N_o \quad (l)$$

Provjerite da primjenom (l), odnosno (a) sa početnim uvjetima (b), dolazimo (rekurzivno) do istih rezultata. (Na primjer: $a_o=22$, $a_1=-25$, $a_3=-137$, $a_4=514,\ldots$).

325) Riješite sustav jednadžbi: $a_n=2a_{n-1}-3b_{n-1}$, $b_n=3a_{n-1}-4b_{n-1}$, $n\in N$ (a), uz početne uvjete: $a_o=-1$, $b_o=1$ (b).

Rješenje:

Iz prve jednadžbe je: $b_{n-1} = \frac{1}{3}(2a_{n-1}-a_n)$ (c), tj.

$$b_n = \frac{1}{3}(2a_n - a_{n+1}) \quad (d),$$

što uvrštenjem u drugu jednadžbu daje:

$\frac{1}{3}(2a_n - a_{n+1}) = 3a_{n-1} - \frac{4}{3}(2a_{n-1}-a_n)$, tj. $a_{n+1} = -2a_n - a_{n-1}$ (e),

odnosno: $\quad a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}$ (f)

Opće rješenje jednadžbe (f) je:

$a_n = k_1\cdot(-1)^n + k_2 n\cdot(-1)^n$, tj. $a_n = (k_1+k_2 n)\cdot(-1)^n$ (g),

pa je opće rješenje jednadžbe (e):

$a_{n+1} = (k_1+(n+1)k_2)\cdot(-1)^{n+1}$, tj. $a_{n+1} = (-k_1-k_2-nk_2)\cdot(-1)^n$ (h).

Iz (d), (g) i (h) izlazi da je opće rješenje jednadžbe (d):

$b_n = \frac{1}{3}(2k_1+2k_2n+k_1+k_2+k_2n)\cdot(-1)^n$, tj. $b_n = (k_1+\frac{1}{3}k_2+k_2n)\cdot(-1)^n$ (i).

Iz (b), (g) i (i) izlazi: $a_0 = -1$ i $b_0 = 1 \Rightarrow k_1 = -1$ i $k_1 + \frac{1}{3}k_2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = -1$ i $k_2 = 6$ (j), pa iz (g), (i) i (j) dobivamo rješenje zadatka: $a_n = (6n-1)\cdot(-1)^n$, $b_n = (6n+1)\cdot(-1)^n$, $n \in N_0$ (k).

326) Riješiti jednadžbu $a_n = \frac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4}$, $n \in N$ (a), uz početni uvjet: $a_0 = -1$ (b).

Rješenje:

Zadana jednadžba (a) sa uvjetom (b) ekvivalentna je sustavu jednadžbi:

$a_n = x_n/y_n$, $x_n = 2x_{n-1} - 3y_{n-1}$, $y_n = 3x_{n-1} - 4y_{n-1}$, $n \in N$ (c)

sa početnim uvjetima: $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ (d).

(Provjerite da je (c) $\Leftrightarrow$ (a) i (d) $\Leftrightarrow$ (b)).

Prema prethodnom zadatku rješenje sustava jednadžbi (c) uz početne uvjete (d) je:

$$x_n = (6n-1)\cdot(-1)^n, \quad y_n = (6n+1)\cdot(-1)^n, \quad n \in N \quad (e),$$

pa je rješenje zadatka: $a_n = x_n/y_n = \frac{(6n-1)\cdot(-1)^n}{(6n+1)\cdot(-1)^n}$, tj.

$$a_n = \frac{6n-1}{6n+1}, \quad n \in N \quad (f).$$

327) Riješiti jednadžbu $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$ (a) uz uvjet

$a_{2001} = -2$ (b).

Rješenje:

Prema (a) je: $a_1 = \frac{1+a_0}{a-a_0}$, $a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = \frac{1+\frac{1+a_0}{1-a_0}}{1-\frac{1+a_0}{1-a_0}} = -\frac{1}{a_0}$,

$a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = \frac{a_0-1}{a_0+1}$, $a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3} = a_0$,

$a_5 = a_1$, $a_6 = a_2$, $a_7 = a_3$, $a_8 = a_0, \ldots, a_{2000} = a_0$,

$a_{2001} = a_1 = \frac{1+a_0}{1-a_0} \overset{(b)}{=} -2$, tj, $a_0 = 3$ (c).

Jednadžba (a) sa početnim uvjetom (c) ekvivalentna je sustavu jednadžbi:

$$a_n = \frac{x_n}{y_n}, \quad x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_n = -x_{n-1} + y_{n-1} \quad (d) \text{ sa}$$

početnim uvjetima: $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ (e).

Rješenje sustava (d) koji zadovoljava početne uvjete (e) je:

$$x_n = \frac{3+i}{2}(1-i)^n + \frac{3-i}{2}(1+i)^n, \quad y_n = \frac{1-3i}{2}(1-i)^n + \frac{1+3i}{2}(1+i)^n \quad \textbf{(f)},$$

pa je rješenje jednadžbe (a), koja zadovoljava početni uvjet (c):

$$a_n = \frac{(3+i)(1-i)^n+(3-i)(1+i)^n}{(1-3i)(1-i)^n+(1+3i)(1+i)^n}\cdot\left(\frac{1+i}{1+i}\right)^n = \frac{(3+i)\cdot 2^n+(3-i)\cdot 2^n i^n}{(1-3i)\cdot 2^n+(1+3i)\cdot 2^n\, i^n} =$$

$$= \left(\frac{(3+i)+(3-i)\cdot i^n}{(1-3i)+(1+3i)\cdot i^n}\cdot\frac{3+i}{1-3i}\right)\cdot\frac{1-3i}{3+i} = \frac{8+6i+10i^n}{-8-6i+10i^n}\cdot(-i) =$$

$$= \frac{-6+8i+10i^{n+1}}{8+6i-10i^n} \quad (g).$$

Za $n = 4k \Rightarrow a_n = a_0 = 3$, $n = 4k+1 \Rightarrow a_n = a_1 = -2$, $n = 4k+2 \Rightarrow$

$a_n = a_2 = -\frac{1}{3}$, dok za $n = 4k+3 \Rightarrow a_n = a_3 = \frac{1}{2}$, $k \in N_0$.

328) Riješiti jednadžbu

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\, 1+\cfrac{1}{x}}}}=x,\quad x\in R \quad (a),$$ gdje se razlomačka

crta pojavljuje n puta, $n\in N$, $n\geq 2$.

Rješenje:

Verižni razlomak na lijevoj strani jednadžbe (a) označimo sa $a_n(x)$ (b), pa će jednadžba (a) poprimiti oblik: $a_n(x)=x$, $x\in R$, $n\in N$, $n\geq 2$ (c).

Pokazat ćemo matematičkom indukcijom da je (b) ekvivalentno sa:

$$a_n(x)=\frac{p_nx+q_n}{r_nx+s_n},\quad n\in N,\ n\geq 2,\quad p_n,q_n,r_n,s_n\in N \quad (d).$$

(d_1) Za $n=2$ je $a_2(x)=1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{2x+1}{1x+1}$.

(d_2) Pretpostavimo da tvrdnja (d) vrijedi za $n=k$, tj. da je

$$a_k(x)=\frac{p_kx+q_k}{r_kx+s_k}.$$

(d_3) Dokazati da tvrdnja (d) vrijedi i za $n=k+1$, tj. da je

$$a_{k+1}(x)=\frac{p_{k+1}x+q_{k+1}}{r_{k+1}x+s_{k+1}}.$$

Dokaz:

$$a_{k+1}=1+\frac{1}{a_k}=1+\frac{r_kx+s_k}{p_kx+q_k}=\frac{(p_k+r_k)x+(q_k+s_k)}{p_kx+q_k}=\frac{p_{k+1}x+q_{k+1}}{r_{k+1}x+s_{k+1}},$$

gdje je: $p_{k+1}=p_k+r_k$, $q_{k+1}=q_k+s_k$, $r_{k+1}=p_k$, $s_{k+1}=q_k$.

Jednadžba (c) prema (d) je kvadratna jednadžba i ima najviše 2 rješenja. Pokazat ćemo matematičkom indukcijom da su to:

$$x_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\quad (e).$$

(e_1) Za $n=2$ dobivamo jednadžbu $\dfrac{2x+1}{x+1}=x$, tj. $x^2-x-1=0$, čija su rješenja (e).

(e_2) Pretpostavimo da su (e) rješenja jednadžbe $a_k(x)=x$, tj. da je $a_k(x_{1,2})=x_{1,2}$.

(e_3) Dokazati da su (e) rješenja i jednadžbe $a_{k+1}(x)=x$, tj. da je $a_{k+1}(x_{1,2})=x_{1,2}$.

Dokaz:

$$a_{k+1}(x_{1,2})=1+\frac{1}{a_k(x_{1,2})}=\frac{1}{x_{1,2}}=1+\frac{1}{\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}=x_{1,2}.$$

Dakle, rješenja zadane jednadžbe (a) su:

$$x_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\ \text{ i ne ovise od } n.$$

329) Riješiti jednadžbu $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$, $n\in N$, $n\geq 3$ (a), uz početne uvjete: $a_1=1$, $a_2=2$ (b).

Rješenje:

Pokazat ćemo matematičkom indukcijom da je $x_n=n!$, $n\in N$, $n\geq 3$ (c)

(c_1) Za $n=3$ je $a_3=2\cdot(a_2+a_1)=2\ (2+1)=2\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3=3!$.

(c_2) Pretpostavimo da je $a_k=k!$.

(c_3) Dokazati da je $a_{k+1}=(k+1)!$.

Dokaz:

$$a_{k+1}=k\cdot(a_k+a_{k-1})=k\cdot(k!+(k-1)!)=k\cdot((k-1)!\cdot(k+1))=(k+1)!.$$

Vježbe:

330) Na koliko dijelova dijele ravninu n pravaca te ravnine u općem položaju? (Pravci su u općem položaju ako se svaka 2 od njih sijeku u točno jednoj točki, a nikoje 3 ne prolaze istom točkom).

(Uputa: $a_n=a_{n-1}+n$, $n\in N$, $a_o=1$. R: $a_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$, $n\in N_o$).

331) $a_n=6a_{n-1}-8a_{n-2}$, $n\in N$, $n\geq 2$. (R: $a_n=k_1\cdot 2^n+k_2\cdot 4^n$, $n\in N_o$, $k_1,k_2\in R$).

332) $a_n=-6a_{n-1}-9a_{n-2}$, $n\in N$, $n\geq 2$; $a_o=1$, $a_1=3$.

(R: $a_n=(1-2n)\cdot(-3)^n$, $n\in N_o$).

333) Zečevi se razmnožavaju po slijedećoj shemi: Svaki par zec--zečica (starih barem 2 mjeseca) dobiju za vrijeme svakog

slijedećeg mjeseca par mladih: zeca i zečicu. Ako smo na početku godine startali sa jednim novorodjenim parom, koliko će ukupno biti parova zečeva nakon n mjeseci? (Pretpostavlja se da zečevi ne ugibaju).

(Uputa: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $n\in N$, $n\geq 2$; $a_0=0$, $a_1=1$.

R: $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, $n\in N_0$; Fibonaccijev niz brojeva: 0,1,1,2,3,5,8,...).

334) $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}-6a_{n-3}$, $n\in N$, $n\geq 3$; $a_0=-1, a_1=2$, $a_2=4$.
(R: $a_n=3^n-2^n-(-1)^n$, $n\in N_0$).

335) $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}-4a_{n-3}+8a_{n-4}$, $n\in N$, $n\geq 4$; $a_0=1$, $a_1=8$, $a_2=12, a_3=38$. (R: $a_n=3\cdot 2^n-n\cdot 2^{n-2}+n^2\cdot 2^{n-2}-2\cdot(-1)^n$, $n\in N_0$).

336) $a_n=-2a_{n-2}-a_{n-4}$, $n\in N$, $n\geq 4$. (R: $a_n=-\frac{3}{2}\cdot i^{n+1}+(-\frac{1}{2}+i)n\cdot i^n-\frac{3}{2}\cdot(-i)^{n+1}+(-\frac{1}{2}-i)n\cdot(-i)^n$, $n\in N_0$).

337) $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}-2n+5\cdot 3^n$, $n\in N$, $n\geq 2$; $a_0=0$, $a_1=1$.
(R: $a_n=5\cdot 3^{n+2}-25n\cdot 2^n-37\cdot 2^n-2n-8$, $n\in N_0$).

338) $a_n=4a_{n-1}-2b_{n-1}$, $b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$, $n\in N$; $a_0=1$, $b_0=1$.
(R: $a_n=2^n$, $b_n=2^n$, $n\in N_0$).

339) $2a_n+b_n=a_{n-1}+3b_{n-1}$, $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$, $n\in N$; $a_0=1, b_0=2$.
(R: $a_n=3\cdot(-2)^n-2$, $b_n=3\cdot(-2)^n-1$, $n\in N_0$).

342) $a_n=\frac{a_{n-1}-2}{a_{n-1}+4}$, $n\in N$; $a_0=0$. (R: $a_n=\frac{2^{n+1}-2\cdot 3^n}{-2^n+2\cdot 3^n}$, $n\in N_0$).

342) $a_n\cdot a_{n-1}+3a_n-a_{n-1}+1=0$, $n\in N$; $a_0=1$.
(R: $a_n=\frac{1-n}{1+n}$, $n\in N_0$).

XXIII - FUNKCIONALNE JEDNADŽBE

Jednadžbe kojima se izražavaju svojstva neke funkcije ili klase funkcija zovu se funkcionalne jednadžbe.

Z a d a c i :

342) Naći sve funkcije $f:R\to R$ za koje vrijedi:
(a) $f(x)+x\cdot f(\frac{x}{2x-1})=2$, $x\neq\frac{1}{2}$.

Rješenje:

Za $x=1$ iz (a) dobivamo: $f(1)=1$ (b).
Supstitucijom $\frac{x}{2x-1}=t$, tj. $x=\frac{t}{2t-1}$ zadana jednadžba poprima oblik: $f(\frac{t}{2t-1})+\frac{t}{2t-1}\cdot f(t)=2$, što možemo pisati u obliku:
$\frac{x}{2x-1}\cdot f(x)+f(\frac{1}{2x-1})=2$ (c). Iz (a) i (c) sada dobivamo:
$f(x)=\frac{4x-2}{x-1}$, $x\neq 1$ (d), pa je na osnovu (b) i (d) rješenje zadatka:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4x-2}{x-1}, & \text{za } x\in R\setminus\{1\}\\ 1, & \text{za } x=1.\end{cases}$$

343) Naći sve funkcije $f:Q\to Q$ koje zadovoljavaju relacije:
(a) $f(1)=1$,
(b) $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Rješenje:

Matematičkom indukcijom se lako dokazuje da je $f(x_1+x_2+\ldots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$, odakle za $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$ izlazi: $f(nx)=n\cdot f(x)$, $n\in N$ (c).
Zamjenom $\frac{1}{n}x$ umjesto x iz (c) dobivamo: $f(x)=n\cdot f(\frac{1}{n}x)$, tj.
$f(\frac{1}{n}x)=\frac{1}{n}\cdot f(x)$, $n\in N$ (d).
Nadalje je: $f(\frac{m}{n}x)=f(m\cdot\frac{1}{n}x)\overset{(c)}{=}m\cdot f(\frac{1}{n}x)\overset{(d)}{=}m\cdot\frac{1}{n}\cdot f(x)=\frac{m}{n}\cdot f(x)$, tj.
$f(\frac{m}{n}x)=\frac{m}{n}\cdot f(x)$, $m,n\in N$ (e),
$f(0)=f(0+0)\overset{(b)}{=}f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$ (f),
$0\overset{(f)}{=}f(0)=f(-x+x)\overset{(b)}{=}f(-x)+f(x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(-\frac{m}{n}x)=-\frac{m}{n}f(x)$, $m,n\in N$ (g).

Iz (e), (f) i (g) izlazi: $f(qy)=q\cdot f(x)$, $q\in Q$ (h).
Za $x=1$ iz (h) dobivamo: $f(q)=q\cdot f(1)\overset{(g)}{=}q\cdot 1=q$, $q\in Q$, pa je tražena funkcija: $f:Q\longrightarrow Q$, $f(x)=x$.

344) Naći sve funkcije $f:R\longrightarrow R$ koje zadovoljavaju svojstva:
(a) $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$,
(b) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$,
(c) f nije nul-funkcija.
Rješenje:
$f(0)=f(0+0)\overset{(b)}{=}f(0)+f(0)+0\Rightarrow f(0)=0$ (d),
$f(1)\neq 0$(jer u protivnom bi bilo: $f(x)=f(x\cdot 1)\overset{(a)}{=}f(x)\cdot f(1)=$
$=f(x)\cdot 0=0$, $\forall x\in R$, što je u kontradikciji sa (c)),
$f(1)=f(1\cdot 1)\overset{(g)}{=}f(1)\cdot f(1)\Rightarrow f(1)\cdot(f(1)-1)=0\Rightarrow f(1)-1=0$ (jer je $f(1)\neq 0$) $\Rightarrow f(1)=1$ (e),
$0\overset{(d)}{=}f(0)=f(-1+1)\overset{(b)}{=}f(-1)+f(1)-2\overset{(e)}{=}f(-1)+1-2=f(-1)-1\Rightarrow f(-1)=1$ (f),
$f(-x)=f(-1\cdot x)\overset{(a)}{=}f(-1)\cdot f(x)\overset{(f)}{=}1\cdot f(x)=f(x)\Rightarrow f(-x)=f(x)$, $x\in R$ (g),
$0\overset{(d)}{=}f(0)=f(-x+x)\overset{(b)}{=}f(-x)+f(x)-2x^2\overset{(g)}{=}f(x)+f(x)-2x^2=2f(x)-2x^2\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=x^2$, $x\in R$ (h).
Dakle, tražena funkcija je: $f: R\longrightarrow R$, $f(x)=x^2$.

345) Naći sve funkcije $f:Z\longrightarrow Z$ koje zadovoljavaju uvjete:
(a) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$,
(b) $f(1)=1$.
Rješenje:
$f(0)=f(0+0)\overset{(a)}{=}f(0)+f(0)+0=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$ (c),
$f(x)=f((x-1)+1)\overset{(a)}{=}f(x-1)+f(1)+(x-1)\cdot 1\overset{(b)}{=}f(x-1)+1+(x-1)=$
$=f(x-1)+x\Rightarrow f(x)=f(x-1)+x$ (d).
Iz (d) sada izlazi:

$x>0$:	$x<0$:
$f(x)-f(x-1)0x$	$f(x)-f(x+1)=-(x+1)$
$f(x-1)-f(x-2)=x-1$	$f(x+1)-f(x+2)=-(x+2)$
$f(x-2)-f(x-3)=x-2$	$f(x+2-f(x+3)=-(x+3)$
.... +	.... +
....	....
$f(1)-f(0)=1$	$f(-1)\quad -f(0)=0$
$f(x)-f(0)=\frac{1}{2}x(x+1)$	$f(x)-f(0)=\frac{1}{2}(-x)(-(x+1))$
$f(x)=\frac{x(x+1)}{2}$, $x\in Z^+\equiv N$(e)	$f(x)=\frac{x(x+1)}{2}$, $x\in Z^-$ (f)

Prema (c), (e) i (f) rješenje zadatka je:

$$F:Z\longrightarrow Z,\quad f(x)=\frac{x(x+1)}{2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x.$$

346) Naći sve funkcije $f:R\longrightarrow R$ koje zadovoljavaju uvjete
(a) $f(x+f(y))=(x+y)+1$,
(b) $x>y\Rightarrow f(x)>f(y)$.
Rješenje:
Iz (b) izlazi da je f injekcija, a iz (a) da je $f(y+f(x))=$
$=f(x+f(y))=f(x+y)+1$, odakle je (zbog injektivnosti f):
$y+f(x)=x+f(y)$ (c).
Za $y=0$ iz (c) dobivamo: $f(x)=x+f(0)$ (d).
Iz (a) na osnovu (d) izlazi: $(x+f(y))+f(0)=((x+y)+f(0))+1$, odakle zbog (c) dobivamo: $(y+f(x))+f(0)=((x+y)+f(0))+1$,
$y+f(x)+f(0)=x+y+f(0)+1$, tj. $f(x)=x+1$.
Tražena funkcija je: $f:R\longrightarrow R$, $f(x)=x+1$.

347) Naći sve funkcije $f:Z\longrightarrow R$ koje zadovoljavaju uvjete:
(a) $f(0)\neq 0$,
(b) $f(1)=\sqrt{3}$,
(c) $f(x)\,f(y)=f(x+y)+f(x-y)$.
Rješenje:
$(f(0))^2=f(0)\cdot f(0)\overset{(c)}{=}f(0+0)+f(0-0)=f(0)+f(0)=2f(0)\Rightarrow (f(0))^2=$
$=2f(0)\overset{(a)}{\Rightarrow}f(0)=2$ (d),
$3=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\overset{(b)}{=}f(1)\cdot f(1)\overset{(c)}{=}f(1+1)+f(1-1)=f(2)+f(0)\overset{(d)}{=}f(2)+2\Rightarrow$
$\Rightarrow f(2)=1$ (e).
Analogno izlazi: $f(3)=0$ (f), $f(4)=-1$ (g), ...
Nadalje imamo: $2\cdot f(y)=f(0)\cdot f(y)\overset{(c)}{=}f(0+y)+f(0-y)=f(y)+f(-y)\Rightarrow$
$\Rightarrow f(-y)=f(y)$ (h) (f je parna funkcija),
$f(0)\overset{(d)}{=}2=2\cos 0$ (i), $f(1)\overset{(b)}{=}\sqrt{3}=2\cos\frac{\pi}{6}$, $f(2)\overset{(e)}{=}1=2\cos\frac{2\pi}{6}$,
$f(3)\overset{(f)}{=}0=2\cos\frac{3\pi}{6}$, $f(4)\overset{(g)}{=}-1=2\cos\frac{4\pi}{6}$, ...
Matematičkom indukcijom se lako dokazuje (dokažite to) da je:
$f(n)=2\cos\frac{n\pi}{6}$, $n\in N$ (j).
Pošto je $f(-n)\overset{(h)}{=}f(n)\overset{(j)}{=}2\cos\frac{n\pi}{6}=2\cos\frac{-n\pi}{6}$ (jer je kosinus parna funkcija), tj. $f(-n)=2\cos\frac{-n\pi}{6}$ (k), tada iz (j), (k) i (i) slijedi: $f(z)=2\cos\frac{z\pi}{6}$, $z\in Z$ (l), pa je tražena funkcija:

$$f:Z\longrightarrow R,\quad f(x)=2\cos\frac{\pi}{6}x.$$

348) Naći sve funkcije $f:N\longrightarrow N_0$ koje zadovoljavaju svojstva:
(a) $f(xy)=f(x)+f(y)$,
(b) $f(x)=0$ kada je posljednja znamenka broja x jednaka 3,
(c) $f(10)=0$.

Rješenje:

Pokazat ćemo da je tražena funkcija: $f:N\longrightarrow N_o$, $f(x)=0$.
Matematičkom indukcijom se lako pokazuje da je
$f(x_1x_2\cdots x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)$, odakle za $x_1=x_2=\dots=x_n=x$ dobivamo: $f(nx)=n\cdot f(x)$, $n\in N$. Kako se svaki prirodan broj x može napisati u obliku rastava na proste faktore:

$$x=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_n^{q_n},\ p_i\in P,\ q_i\in N,\ i=1,2,\dots,n,\ \text{tada je:}$$

$f(n)\overset{(a)}{=}q_1\cdot f(p_1)+q_2\cdot f(p_2)+\dots+q_n\cdot f(p_n)$, pa je dovoljno dokazati da je $f(1)=0$ i $f(p)=0$, $\forall p\in P$.

Imamo: $f(1)=f(1\cdot 1)\overset{(a)}{=}f(1)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$,

$0\overset{(c)}{=}f(10)=f(2\cdot 5)\overset{(a)}{=}f(2)+f(5)\Rightarrow f(2)=f(5)=0$,

$f(3)\overset{(b)}{=}0$.

Svaki prost broj $p>5$ završava jednom od znamenaka: 1, 3, 7, 9.
Ako je posljednja znamenka broja $p\in P$ jednaka 3, prema (b) je $f(p)=0$.
Ako je posljednja znamenka broja $p\in P$ jednaka 1, tada $3p$ završava sa 3, pa je $0\overset{(c)}{=}f(3p)\overset{(a)}{=}f(3)+f(p)\overset{(b)}{=}0+f(p)=f(p)$, tj. $f(p)=0$.
Analogno se pokazuje da je $f(p)=0$ kada prost broj p ima posljednju znamenku 7, odnosno 9, promatrajući $f(9p)$, odnosno $f(7p)$.
Dakle, tražena funkcija je: $f:N\longrightarrow N_o$, $f(x)=0$.

349) Naći sve funkcije $f:N\longrightarrow N$ koje zadovoljavaju uvjet:
(a) $f(n+1)>f(f(n))$.

Rješenje:

Dokažimo prvo matematičkom indukcijom da je:
$f(m)\geq n$, $m\geq n$ (b).

(b_1) Za $n=1$ je $f(m)\geq 1$, $m\in N$ (zbog $f(m)\in N$).

(b_2) Pretpostavimo da tvrdnja (b) vrijedi za $n=k$, tj. da je $f(m)\geq k$, $m\geq k$.

(b_3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da je $f(m)\geq k+1$, $m\geq k+1$.

Dokaz:

$m\geq k+1\Rightarrow m-1\geq k\overset{(b_2)}{\Rightarrow}f(m-1)\geq k\overset{(b_2)}{\Rightarrow}f(f(m-1))\geq k\overset{(a)}{\Rightarrow}f(m)>f(f(m-1))\geq$
$\geq k\Rightarrow f(m)>k\Rightarrow f(m)\geq k+1$, $m\geq k+1$.

Stim je (b) dokazano.
Iz (b) izlazi da je $f(n)\geq n$ (c).
Pokazat ćemo da je $f(n)=n$, $\forall n\in N$ (d).
Pretpostavimo (suprotno tvrdnji) da postoji neki $n\in N$ za koji je $f(n)>n$ (e).
Neka je $f(m_o)=\min\limits_{m>n} f(m)$ (f). Tada imamo:

$m>n\Rightarrow m_o>n\Rightarrow m_o-1\geq n$ (g) i $f(m_o-1)\overset{(c)}{\geq}m_o-1$ (h), pa iz

$m_o-1>n\overset{(g),(h)}{\Longrightarrow}f(m_o-1)>n$, odnosno iz $m_o-1=n\overset{(e)}{\Rightarrow}f(m_o-1)>n$,

tj. $f(m_o-1)>n$ (i).
Iz (a) izlazi: $f(m_o)>f(f(m_m-1))$, a odatle, supstitucijom

$f(m_o-1)=k\overset{(i)}{>}n$, $f(m_o)>f(k)$, $k>n$, što je u kontradikciji sa (f).
Stim je (d) dokazano.
Dakle, tražena funkcija je: $f:N\longrightarrow N$, $f(x)=x$.

350) Naći sve funkcije $f:S\longrightarrow N_o$, $S=\{3n\mid n\in N \text{ i } 1\leq n\leq 333\}$, koje zadovoljavaju uvjete:
(a) $f(m+n)-f(m)-f(n)\in\{0,1\}$,
(b) $f(2)=0$,
(c) $f(3)>0$,
(d) $f(9999)=3333$.

Rješenje:

Iz (a) izlazi: $f(m+n)=f(m)+f(n)+a$, $a\in\{0,1\}$ (e).

Nadalje je: $0\overset{(b)}{=}f(2)=f(1+1)\overset{(e)}{=}f(1)+f(1)+a=2\cdot f(1)+a\Rightarrow f(1)=0$ (f)
(jer su $f(1)$, $a\in N_o$),

$0\overset{(c)}{<}f(3)=f(2+1)\overset{(e)}{=}f(2)+f(1)+a\overset{(b)\wedge(f)}{=}0+0+a=a\Rightarrow f(3)=1$ (g),

$f(3(n+1))=f(3n+3)\overset{(e)}{=}f(3n)+f(3)+a\overset{(g)}{=}f(3n)+1+a>f(3n)\Rightarrow f(3(n+1))>$
$>f(3n)$ (h).

Iz (h) matematičkom indukcijom lako dokazujemo (dokažite to) da je $f(3n)>n$ (i), pa na osnovu (h) izlazi da ako u (i) vrijedi stroga nejednakost za neki n, tada ta nejednakost vrijedi i za sve $m>n$. Kako je prema (d): $f(3.3333)=3333$, tada u (i) vrijedi jednakost za sve $n\leq 3333$. Dakle, tražena funkcija je:

$$f:S\longrightarrow N_o,\ S=\{3n\mid n\in N \text{ i } 1\leq n\leq 333\},\ f(x)=x.$$

351) Naći funkcije $f,g:R\longrightarrow R$ koje zadovoljavaju sustav jednadžbi:
$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2x+1)=2x$, $f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2x+1)=x$, $x\neq 1$.

Rješenje:

Zbrajanjem jednadžbi izlazi: $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3}{2}x$ (a), odakle je:
$g(2x+1)=\frac{1}{2}x$ (b). Iz (a) i (b) dobivamo rješenje zadatka:

$$f,g:R\longrightarrow R,\ f(x)=\frac{3x}{2(x-1)},\ x\neq 1,\ g(x)=\frac{x-1}{4}.$$

V j e ž b e :

352) $f:R\longrightarrow R$, (a) $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)=\frac{x+1}{x-1}$, $x\neq -2,1$. (R: $f:R\longrightarrow R$, $f(x)=\frac{x+4}{3x-2}$, $x\neq\frac{2}{3}$).

353) $f:R\rightarrow R$, (a) $3f(x-1)-f(\frac{1-x}{x})=2x$, $x\neq 0$.

(R: $f:R\rightarrow R$, $f(x)=\frac{3(x+1)^2}{4(x+1)^2}$, $x\neq -1$).

354) $R:R\rightarrow R$, $f(x)=ax^2+bx+c$, (a) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$.

(R: $f:R\rightarrow R$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2+b$, $b\in R$).

355) $f:N\rightarrow Z$, (a) $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$,
(b) $f(1)=1$.
(R: $f:N\rightarrow Z$, $f(x)=\frac{x(x+3)}{2}-1=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{17}{8}$).

356) $f:N\rightarrow N$, (a) $f(1)=2$, (b) $f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1$.
(R: $f:N\rightarrow N$, $f(x)=x+1$).

357) $f:R\rightarrow R$, (a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, (b) $f(1)=1$,
(c) $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$, $x\neq 0$. (R: $f:R\rightarrow R$, $f(x)=x$).

358) $f:R\rightarrow R$, (a) $f(x)+\sqrt{(f(x))^2+1}=x+\sqrt{x^2+1}$.
(R: $f:R\rightarrow R$, $f(x)=x$).

359) $F:Z\rightarrow Z$, (a) $f(a+b)\geq f(a)+f(b)$, (b) $f(1)=1$,
(c) $|f(-1)|=1$. (R: $F:Z\rightarrow Z$, $f(x)=x$).

360) Dokazati da je funkcija $f:R\rightarrow R$, za koju vrijedi:

(a) $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$, $a\in R$,

periodična funkcija.
(R: $f:R\rightarrow R$, $f(x+2a)=f(x)$, $\forall x\in R$).

L I T E R A T U R A

1) Andrić: Nelinearne Diofantove jednačine (klub mladih matematičara "Arhimedes" Beograd),
2) Andrić: Pripremni zadaci za mat. takmičenja za uč. osn. škola (Društvo matematičara SR Srbije Beograd, 1987.),
3) Antonov-Vigodski-Nikitin-Sankin: Zbirka zad. iz elementarne matematike (Zavod za izd. udžbenika Sarajevo, 1972.),
4) Ašić i dr.: Medjunarodne matematičke olimpijade (Društvo matematičara SR Srbije Beograd, 1986.),
5) Ašić i dr.: Savezna i republička matematička takmičenja srednjoškolaca (Društvo matematičara SR Srbije Beograd, 1984.),
6) Batagelj-Pisanski: Rešene naloge iz matematike iz republiških tekmovanj-I del (Državna založba Slovenije Ljubljana, 1973.),
7) Batagelj-Pisansiki: Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj-II del (Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije Ljubljana, 1986.),
8) Brečević: Kvadratne jednadžbe, nejednadžbe i njihova primjena (Školska knjiga Zagreb, 1967.),
9) Brkić-Gjumbir: 198 zadataka s mat. natjecanja uč. sred. šk. u SR Hrvatskoj (Zavod za unapredjivanje stručnog obrazovanjaSR Hrvatske Zagreb, 1973.),
10) Čelebić-Novčić: Zadaci sa takmičenja sa rešenjima (Zavod za udžb. i nast. sredstva Beograd, 1986.),
11) Čukić-Janc-Milin: Neke funkcije teorije brojeva, kompleksni brojevi u geom. zadacima, problem boja (Društvo matematičara SR Srbije Beograd, 1977.),
12) Dakić: Matematika 2-zbirka zadataka (Školska knjiga Zagreb, 1985.),
13) Djurković-Lazović: Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike ("Svjetlost" Sarajevo, 1985.),
14) Grasselli: Diofantske enačbe (Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije Ljubljana, 1984.),
15) Grasselli: Osnove teorije števil (Državna založba Slovenije Ljubljana, 1975.),
16) Ivanović-Milin: Rešeni zadaci iz mat. sa prijemnih i klasifikac. ispita (Naučna knjiga Beograd, 1985.),
17) Ivović-Milošević: Zbirka rešenih zad. iz mat. sa zad. za takm. i prijemne ispite na fakultetima (Izdavačko-informativni centar studenata Beograd, 1974.),
18) Javor: Natječemo se u znanju matematike-I (PNM, Školska knjiga Zagreb, 1976.),
19) Kadelburg-Mićić-Janković: Elementarna teorija brojeva, Dirihleov princip, diferencne jednačine (Društvo matematičara SR Srbije Beograd, 1976.),

20) Kurnik: Natječemo se u znanju matematike-2 (PNM, Školska knjiga Zagreb, 1978.),
21) Kuščenko: Zbirka zadataka sa prijemnih ispita, velikih matura i mat. olimpijada (Naučna knjiga Beograd, 1970.),
22) Malenica-Vuković-Haverić-Radić: Zbirka zad. sa republičkih takmič. iz mat. i kvalifikacionih ispita ("Svjetlost" Sarajevo, 1985.),
23) "Matematički list" (Društvo matematičara SR Srbije Beograd),
24) "Matematičko-fizički list" "Društvo matematičara i fizičara Zagreb),
25) "Matematika" (Školska knjiga Zagreb),
26) Materijali za mlade matematičare (Društvo matematičara SR Srbije Beograd),
27) Materijali za mlade matematičare(Društvo mladih matematičara "Pitagora" Beli Manastir),
28) Materijali za mlade matematičare (Klub mladih matematičara "Arhimedes" Beograd),
29) Mićić-Kadelburg: Uvod u teoriju brojeva (Društvo matematičara SR Srbije Beograd, 1983.),
30) Mihailović: Zbirka rešenih zad. iz algebre za II r. gimn. prirodno-mat. smera, završne ispite u sred. šk. i prijemne ispite na fakultetima (Naučna knjiga Beograd, 1971.),
31) Milanović: Diofantove jednačine (Klub mladih matematičara "Arhimedes" Beograd),
32) Milin-Ivanović: Zbirka rešenih zad. iz trigonometrije sa zadacima za takmičenja i prijemne ispite na fakultetima (Naučna knjiga Beograd, 1984.),
33) Mitrinović-March: Priručnik za takmičenje srednjoškolaca u matematici-I-problemi iz elementarne teorije brojeva (Zavod za izd. udžb. SR Srbije Beograd, 1965.),
34) Mladenović-Ognjanović: Pripremni zadaci za mat. takmičenja za uč. sred. šk. (Društvo matematičara SR Srbije Beograd, 1987.),
35) "Nastava matematike" (Društvo matematičara SR Srbije Beograd),
36) Pavković-Dakić: Polinomi (Školska knjiga Zagreb, 1987.),
37) Pavković: Rekurzivne jednadžbe ("Matematičko-fizički list" 3/118, Društvo matematičara i fizičara Zagreb),
38) Pavković-Svrtan-Veljan: Matematika 3-zbirka zadataka (Školska knjiga Zagreb, 1975.),
39) Pavković-Veljan: Matematika 1-zbirka zadataka (Školska knjiga Zagreb, 1985.),
40) Popadić: Priručnik za takmičenja srednjoškolaca u matematici -III- kongruencije (Zavod za izd. udžb. SR Srbije Beograd, 1967.),
41) "Presek" (Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije Ljubljana),

42) Radić: Algebra II (Školska knjiga Zagreb, 1972.),
43) Stevanović: Elementarna i vektorska algebra (Zavod za izd. udžb. SR Srbije Beograd, 1968.),
44) Stojanović: Odabrani zadaci sa mat. takmičenja (Društvo matematičara SR Srbije Beograd, 1986.),
45) Škreblin-Smolec-Brečević: Pregled matematike-1 (Školska knjiga Zagreb, 1964.),
46) Tošić: Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare (Naučna knjiga Beograd, 1986.),
47) Turajlić-Cvetković-Lazarević: Matematičke olimpijade srednjoškolaca u Čehoslovačkoj, Madjarskoj i Rumuniji (Zavod za izd. udžb. SR Srbije Beograd, 1967.),
48) Vasić-Janić-Mitrinović-Tošić: Mat. priručnik za takm. srednjoškolaca i prijemne ispite na fakultetima (Gradjevinska knjiga Beograd, 1983.),
49) Veljan: Rekurzivne relacije ("Matematika" 1-2/1986, Školska knjiga Zagreb),
50) Zolić-Galin: Zbirka riješenih zad. za takm. iz matematike-7. i 8. r. ("Svjetlost" Sarajevo, 1986.),
51) "A Matematika Tanítása"(A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata, Budapest),
52) Molnár: Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye, 1947-1970 (Tankönyvkiadó Budapest, 1974.),
53) „Математика"(Издание на ЦК на ДКМС за средношколци, София),
54) Паскапев-Пенчев: Задачи за подготовка за математически олимпиади (Държавно издателство „Народна просвета" София, 1983.),
55) П етров: Ръководство за решаване на задачи по математика (Държавно издателство „Народна просвета" София, 1977.),
56) Бабинская: Задачи математические олимпиады („Просвещение" Москва, 1986.),
57) Барыбин-Исаков: Сборник задач по математике (Учпедгиз Москва, 1955.),
58) Дорохин-Плаксенко-Божора: Сборник задач и упражнений по математике („Вышая школа" Москва, 1986.),
59) Фридман-Турецкий: Как научиться решать задачи („Просвещение" Москва, 1984.),
60) Гальперин-Толпыго: Московские математические олимпиады („Просвещение" Москва, 1986.),
61) Горделадзе-Кухарчук-Яремчук: Збірник конкурсних задач з математики („Вища школа" Київ, 1976.),
62) Говоров-Дыбов-Мирошин-Смирнова: Сборник конкурсных задач по математике („Наука" Москва, 1983.),
63) Колягин-Леонтьева-Макарычев-Миндюк-Руденко-Соколова: Сборник задач по алгебре дла 6-8 классов („Просвещение" Москва, 1975.),

64) „Квант" (Москва),

65) Ляпин-Баранова-Борчугова: Сборник задач по элементарной алгебре („Просвещение" Москва, 1973.),

66) Михайловский-Ядренко-Призвавишенский: Збірник республіканських математичних олімпіад („Вища школа" Київ, 1975.),

67) Нестеренко-Олехник-Потапов: Задачи вступительных экзаменов по математике („Наука" Москва, 1980.),

68) Сивашинский: Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям („Наука" Москва, 1971.),

69) Сивашинский: Задачи по математике для внеклассных занятий („Просвещение" Москва, 1968.),

70) Шахно: Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике („Вышэйшая школа" Минск, 1973.),

71) Васильев-Гутенмахер-Раббот-Тоом: Заочные математические олимпиады („Наука" Москва, 1981.),

72) Вересова-Денисова-Полякова: Практикум по решению математических задач („Просвещение" Москва, 1979.),

73) Виноградов: Основы теорий чисел („Наука" Москва, 1979.),

74) Вышенский-Карташов-Михайловский-Ядренко: Сборник задач киевских математических олимпиад („Вища школа" Київ, 1984.).

...