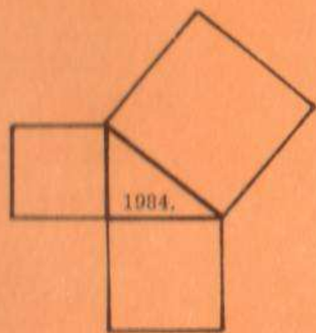
Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** i **dr. Zdravku Kurniku** na dozvoli da knjižicu
"Matematička natjecanja srednjoškolaca u SFRJ u 1988. godini "
skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
»P I T A G O R A«
BELI MANASTIR

Priredili:
Luka Čeliković
dr. Zdravko Kurnik

MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ U 1988. GODINI

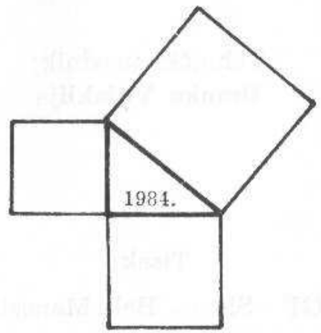


Beli Manastir, 1990.

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
»P I T A G O R A«
BELI MANASTIR

Priredili:
Luka Čeliković
dr. Zdravko Kurnik

MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ U 1988. GODINI



Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ
U 1988. GODINI

Pripremili:

Luka Čeliković
dr. Zdravko Kurnik

Izdavač:

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »P I T A G O R A«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:

Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:
Branko Vujaklija

Tisak:

GP »Slovo« Beli Manastir

Beli Manastir, 1990.

S A D R Ž A J

PREDGOVOR

Ova zbirka sadrži riješene zadatke sa matematičkih natjecanja srednjoškolaca u 1988. godini i to sa republičkih natjecanja svih naših Republika, pokrajinskog natjecanja SAP Vojvodine, »Arhimedesovog matematičkog turnira« (SR Srbija) i saveznog natjecanja.

Pri izradi zbirke korišteni su materijali natjecateljskih komisija. U prikupljanju tih materijala posebno su se angažirali prof. Anđelko Marić iz Sinja i prof. Ivo Vujičić iz Titograda.

Zadatke i potpuna rješenja sa »Arhimedesovog matematičkog turnira« dao je prof. Bogoljub Marinković iz Beograda. Dio zadataka pregledao je i dao većinu rješenja sa Saveznog natjecanja dr. Vladimir Volenec iz Zagreba. Pojedina rješenja uzeta su prema rješenjima dr. Vladimira Jankovića iz Beograda (Savezno II 2), Mirana Božičevića iz Zagreba (Savezno II 3), prof. Milovana Mladenovića iz Grocke (Savezno III i IV 2), dr. Pavla Mladenovića iz Beograda (Savezno III i IV 3), te Dijane Ilišević iz Belog Manastira (Republičko SR Crne Gore III 2, 3). Kontrolu kucanog teksta izvršili su Anđa Mijatović i Denis Vidović.

Svim spomenutim osobama najtoplije se zahvaljujemo. Također se zahvaljujemo radnim ljudima GP »Slovo« Beli Manastir, a posebno diplomiranom ekonomisti Dragi Pašajliću i Branku Vujakliji na štampanju zbirke, te radnim organizacijama Baranje, a posebno dipl. oecc. Milki Bošnjak—Mrđa na sufinanciranju zbirke. Unaprijed se zahvaljujemo i svima onima koji nam ukažu na eventualne štamparske greške.

Luka Čeliković
Zdravko Kurnik

SR CRNA GORA

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SR CRNE GORE

REPUBLIČKO NATJECANJE

Zadaci:

I razred:

1) Ako prirodni brojevi a,b i c zadovoljavaju jednakost $a^2+b^2=c^2$, dokazati da je bar jedan od brojeva a i b djeljiv sa 3.
2) Dokazati da točke simetrične ortocentru H trokuta ABC u odnosu na pravce na kojima leže njegove stranice, pripadaju kružnici koja je opisana tom trokutu.
3) Ako je produkt tri realna broja jednak 1, a njihova suma veća od sume njihovih recipročnih vrijednosti, onda je bar jedan od tih brojeva veći od 1. Dokazati.
4) U ravnini je dana kružnica polumjera 1 i n točaka $A_1, A_2, \dots, A_n$. Dokazati da na kružnici postoji točka M za koju vrijedi $|MA_1|+|MA_2|+\dots+|MA_n|\geq n$.

II razred:

1) Neka su $a, b, \sqrt{a}+\sqrt{b}$ racionalni brojevi. Dokazati da su tada i brojevi $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ takodjer racionalni.
2) Dan je trokut ABC i točka M u unutrašnjosti trokuta. Neka su x,y i z udaljenosti točke M od stranica $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom ($|AB|=c$, $|BC|=a$, $|CA|=b$). Neka su h_a, h_b i h_c duljine visina koje odgovaraju duljinama stranica a,b i c. Dokazati da je $x/h_a+y/h_b+z/h_c=1$.
3) Brojevi x,y,a i b zadovoljavaju jednakosti $x+y=a+b$, $x^2+y^2=a^2+b^2$. Dokazati da je $x^n+y^n=a^n+b^n$ za sve prirodne brojeve n.
4) Dani su pozitivni brojevi a,b,c,d, takvi da je $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. Dokazati da je $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

III razred:

1) Dokazati da je za proizvoljan cijeli broj x broj $x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$ djeljiv sa 8640.
2) Neka su x,y,z prirodni brojevi za koje vrijedi $x^n + y^n = z^n$. Dokazati da je $\min(x,y) \geq n$.
3) Neka su m i n neparni prirodni brojevi. Dokazati da je jedino rješenje jednadžbe $\cos^n x + 1/\sin^m x = \sin^n x + 1/\cos^m x$ oblika $x = \pi/4 + k\pi$, $k \in Z$.
4) Dokazati da je udaljenost od svake točke čije su koordinate cijeli brojevi do pravca p...$y = 5x/3 + 4/5$ veća od 1/30.

IV razred:

1) Isto kao 4. zadatak iz III razreda.
2) Naći sve prirodne brojeve n, takve da neka tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a+b)^n$ čine aritmetički niz.
3) Dani su nizovi (a_n),(b_n),(c_n) sa

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n),\quad b_1 = 1,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n),$$

$$c_1 = 2,\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Dokazati konvergenciju danih nizova i izračunati njihove granične vrijednosti.
4) Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrana tetiva kružnice polumjera R dulja od stranice upisanog jednako - straničnog trokuta, ako se postupak izbora tetive obavlja na slijedeća dva načina:
   a) slučajno se bira tetiva kružnice, a zatim povlači te - tiva,
   b) slučajno se bira jedan kraj, a zatim se takodjer slu - čajno bira i drugi kraj tetive.

R j e š e n j a :

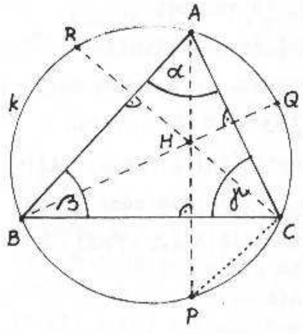
I razred:

1) Za svaki $n \in N$ vrijedi $n \equiv r \pmod 3$, $r \in \{0, \pm 1\}$, odakle je $n^2 \equiv r_1 \pmod 3$, $r_1 \in \{0,1\}$ (*).

Kada bi bilo $a,b \not\equiv 0 \pmod 3$, tada bi bilo $a^2, b^2 \equiv 1 \pmod 3$,

tj. $a^2 + b^2 \equiv -1 \pmod 3$, što je kontradikcija sa (*). Dakle, bar jedan od brojeva a i b je djeljiv sa 3, što se i tvrdilo.

2)



Neka je k kružnica opisana trokutu ABC, a P,Q,R druga sjecišta pravaca AH,BH,CH s kružnicom k. Promatrajmo najprije točku P. Odmah se vidi da je $\sphericalangle BCR = 90^\circ - \beta$, $\sphericalangle PHC = \beta$, $\sphericalangle CPA = \sphericalangle CBA = \beta$ (obodni kutevi nad istim kružnim lukom $\widehat{AC}$) i $\sphericalangle PCB = 90^\circ - \beta$. Prema tome, trokut PHC je jednakokračan, a pravac BC simetrala njegovog kuta $\sphericalangle PCH$. Na temelju te činjenice slijedi da je pravac BC simetrala i stranice $\overline{PH}$ trokuta PHC, tj. točka P je simetrična ortocentru H u odnosu na pravac BC. Analogno se pokazuje da su Q i R točke simetrične točki H u odnosu na pravce CA i AB.

3) Neka su a,b,c tri realna broja za koje vrijedi $abc = 1$, $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Nakon množenja sa abc nejednakost se svodi na oblik $a + b + c - bc - ac - ab > 0$. Ova nejednakost neće se promijeniti ako na lijevoj strani dodamo abc i oduzmemo 1. Dakle je $abc + a + b + c - bc - ac - ab - 1 > 0$. Sada imamo redom: $(a-1) + bc(a-1) - b(a-1) - c(a-1) > 0$, $(a-1)(1 + bc - b - c) > 0$, $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$. Odavde neposredno proizlazi da bar jedan faktor mora biti pozitivan, a to znači da bar jedan od brojeva a,b,c mora biti veći od 1. To dokazuje tvrdnju.

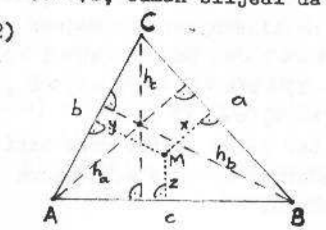
4) Neka je k(S,1) dana kružnica i T težište skupa točaka $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Pravac ST siječe kružnicu k u dvije točke. Označimo sa M sjecište koje je dalje od točke T (u posebnom slučaju $T \equiv S$ ulogu točke M može igrati bilo koja točka kružnice k). Svojstvo težišta promatranog skupa točaka možemo izraziti u obliku $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n} = n\overrightarrow{MT}$.

Projicirajmo sada točke $A_1, A_2, \dots, A_n$ ortogonalno na pravac MT i označimo sa $A_1', A_2', \dots, A_n'$ pripadne projekcije. Pri projiciranju svojstvo težišta se ne mijenja, pa je T i težište skupa $\{A_1', A_2', \dots, A_n'\}$, te vrijedi $\overrightarrow{MA_1'} + \overrightarrow{MA_2'} + \dots + \overrightarrow{MA_n'} = n\overrightarrow{MT}$. Budući da su vektori $\overrightarrow{MA_1'}, \overrightarrow{MA_2'}, \dots, \overrightarrow{MA_n'}, \overrightarrow{MT}$ na jednom pravcu, za njihove duljine vrijedi $|MA_1'| + |MA_2'| + \dots + |MA_n'| \geq n \cdot |MT|$.

Na temelju očiglednih nejednakosti $|MA_1'| \leq |MA_1|, |MA_2'| \leq |MA_2|, \dots, |MA_n'| \leq |MA_n|, |MT| \geq 1$ odmah dobivamo da je $|MA_1| + |MA_2| + \dots + |MA_n| \geq |MA_1'| + |MA_2'| + \dots + |MA_n'| \geq n \cdot |MT| \geq n$.

II razred:

1) Tvrdnja je očigledna ako je jedan od brojeva a i b jednak 0 ili ako je $a = b$.
U slučaju kada su a i b različiti pozitivni racionalni brojevi, na temelju pretpostavke neposredno zaključujemo da je i broj $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ takodjer racionalan. Konačno, zbrajanjem i oduzimanjem racionalnih brojeva $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, odmah slijedi da su i brojevi $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ racionalni.

2) 

Imamo redom
$P = P_{\Delta ABC} = ah_a/2 = bh_b/2 = ch_c/2$,
$P_1 = P_{\Delta BCM} = ax/2$,
$P_2 = P_{\Delta CAM} = by/2$,
$P_3 = P_{\Delta ABM} = cz/2$.
Sada je

$$1 = \frac{P}{P} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P} = \frac{P_1}{P} + \frac{P_2}{P} + \frac{P_3}{P} = \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c},$$

što se i tvrdilo.

3) Kvadriranjem prve jednakosti i uvažavanjem druge proizlazi najprije $xy = ab$.
Sada tvrdnju zadatka dokazujemo matematičkom indukcijom.

1°) Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja vrijedi jer se u tom slučaju dobivaju polazne jednakosti $x + y = a + b$ i $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.
2°) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k - 1$ i $n = k$, tj. da je $x^{k-1} + y^{k-1} = a^{k-1} + b^{k-1}$ i $x^k + y^k = a^k + b^k$.
3°) Dokažimo da na osnovu te pretpostavke tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da je $x^{k+1} + y^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1}$.
Zaista, $x^{k+1} + y^{k+1} = (x + y)(x^k + y^k) - xy(x^{k-1} + y^{k-1}) = (a + b)(a^k + b^k) - ab(a^{k-1} + b^{k-1}) = a^{k+1} + b^{k+1}$.

4) Iz $a/b < c/d$ proizlazi $ad < bc$, a odatle $ab + ad < ab + bc$, odnosno $a(b + d) < b(a + c)$. Dakle je $a/b < (a+c)/(b+d)$ (1).
Iz $a/b < c/d$ proizlazi $ad < bc$, a odavde $ad + cd < bc + cd$, odnosno $(a + c)d < (b + d)c$. Dakle je $(a+c)/(b+d) < c/d$ (2).
Iz (1) i (2) slijedi tvrdnja zadatka.

III razred:

1) Rastav broja 8640 na prim faktore glasi $8640 = 2^6 . 3^3 . 5$, a rastav zadanog izraza na faktore poprima slijedeći oblik
$A(x) = x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3 = x^3(x - 1)^2(x + 1)^2(x - 2)(x + 2) = ((x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2))((x - 1)x^2(x + 1))$.
Razlikovat ćemo četiri slučaja.
Ako je x paran broj ali nije djeljiv sa 3, tada je u produktu $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$ jedan faktor djeljiv sa 5, 1 sa 4, 2 sa 3 i 2 sa 2, tj. taj produkt je djeljiv sa $2^4 . 3^2 . 5 . 3$. S druge strane produkt $(x - 1)x^2(x + 1)$ djeljiv je sa $2^2 . 3$. Prema tome $2^6 . 3^3 . 5 / A(x)$.
Ako je x paran broj djeljiv sa 3, tada je u produktu $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$ jedan faktor djeljiv sa 5, jedan sa 4, jedan sa 3 i dva sa 2, tj. taj produkt je djeljiv sa $2^4 . 3 . 5$. U tom slučaju je produkt $(x - 1)x^2(x + 1)$ djeljiv sa $2^2 . 3^2$. Prema tome opet $2^6 . 3^3 . 5 / A(x)$.
Ako je x neparan broj ali nije djeljiv sa 3, tada $2^3 . 3^2 . 5 / (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$ i $2^3 . 3 / (x - 1)x^2(x + 1)$.
Prema tome $2^6 . 3^3 . 5 / A(x)$.

Ako je x neparan broj djeljiv sa 3, tada
$2^3.3.5 \mid (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ i $2^3.3^2 \mid (x-1)x^2(x+1)$.
Prema tome opet $2^6.3^3.5 \mid A(x)$.

2) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \leq y$.
Kako je $x^n + y^n = z^n$ i $x,y,z \in N$, to je $z^n > y^n \Rightarrow z > y \Rightarrow$
$\Rightarrow z \geq y+1 \Rightarrow z^n \geq (y+1)^n \Rightarrow z^n \geq y^n + ny^{n-1} + \ldots + ny + 1 \geq$
$\geq y^n + ny^{n-1}$. Iz $z^n \geq y^n + ny^{n-1} \Rightarrow x^n + y^n \geq y^n + ny^{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^n \geq ny^{n-1}$. Kako je $x \leq y$, to je $ny^{n-1} \geq nx^{n-1}$. Iz $x^n \geq$
$\geq ny^{n-1} \geq nx^{n-1} \Rightarrow x^n \geq nx^{n-1} \Rightarrow x \geq n$.
Dakle, $\min(x,y) = x \geq n$.

3) Budući da su m i n neparni brojevi, dovoljno je razliko - vati slijedeće slučajeve:

$1^o)$ $\sin x < \cos x \Rightarrow (\sin^n x < \cos^n x \ \& \ \sin^m x < \cos^m x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\cos^n x > \sin^n x \ \& \ 1/\sin^m x > 1/\cos^m x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^n x + 1/\sin^m x > \sin^n x + 1/\cos^m x$.

$2^o)$ Za $\sin x = \cos x$ zadana jednakost očigledno vrijedi.

$3^o)$ $\sin x > \cos x \Rightarrow (\sin^n x > \cos^n x \ \& \ \sin^m x > \cos^m x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\cos^n x < \sin^n x \ \& \ 1/\sin^m x < 1/\cos^m x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^n x + 1/\sin^m x < \sin^n x + 1/\cos^m x$.

4) Implicitni oblik jednadžbe pravca p glasi $25x - 15y + 12 = 0$.
Lako se pokazuje da ne postoji par cijelih brojeva x,y koji zadovoljavaju ovu jednadžbu. Naime, $y = \frac{25x+12}{15} = 2x + 1 - \frac{5x+3}{15}$ je cijeli broj ako je $\frac{5x+3}{15}$ cijeli broj, ali ne postoji cijeli broj x za koji je izraz $5x+3$ djeljiv sa 5.
Neka je sada T bilo koja točka s cjelobrojnim koordinatama a,b. Udaljenost točke T od pravca p dana je jednakošću
$$d(T,p) = \frac{|25a - 15b + 12|}{\sqrt{25^2 + (-15)^2}} = \frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}}.$$
Pretpostavimo suprotno tvrdnji da postoji točka T za koju je

$$\frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}} \leq \frac{1}{30}, \text{ tj, } |25a - 15b + 12| \leq \frac{\sqrt{34}}{6}.$$
Odavde nužno slijedi da je cijeli broj $25a - 15b + 12$ jednak 0, a to, kao što smo vidjeli, nije moguće ni za koji par cijelih brojeva a i b. Dakle je
$$d(T,p) = \frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}} > \frac{1}{30}.$$

<u>IV razred</u>:

1) Vidi rješenje 4. zadatka III razreda.

2) Tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ su $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$. Oni čine aritmetički niz ako je (*)
$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$. Napišemo li tu jednakost u razvijenom obliku $2 \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots(k-1)k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2\ldots(k-1)} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)(n-k)}{1.2\ldots(k-1)k(k+1)}$, pomnožimo sa $1.2\ldots(k+1)$ i podijelimo sa $n(n-1)\ldots(n-k+2)$, dobivamo jednakost $2(k+1)(n-k+1) = k(k+1) + (n-k+1)(n-k)$, koja nakon množenja i sredjivanja prelazi u kvadratnu jednadžbu po n
$n^2 - (4k+1)n + 4k^2 - 2 = 0$.
Rješenja ove jednadžbe glase $n_{1,2} = \frac{4k+1 \pm \sqrt{8k+9}}{2}$ (**).
Da bi rješenja n_1 i n_2 bila prirodni brojevi, nužno je da izraz pod korijenom bude kvadrat neparnog prirodnog broja.
Stavimo li $8k+9 = (2m+1)^2$, dobivamo najprije da je $2k = m^2 + m - 2$, a onda iz (**) za rješenja n_1 i n_2 proizlaze prikazi $n_1 = m^2 + 2m - 1 = (m+1)^2 - 2$, $n_2 = m^2 - 2$. Na temelju tih prikaza zaključujemo da su svi traženi prirodni brojevi n, koji zbog (*) moraju još zadovoljavati uvjet $n \geq k+1$, oblika $n = m^2 - 2$, $m = 3,4,5,\ldots$.
Jasno je da zbog simetrije binomnih koeficijenata za svaki takav n postoje u odgovarajućem razvoju dva mjesta gdje se ostvaruje polazni zahtjev o aritmetičkom nizu.

3) $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 2$ (1),

$a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n)$, $b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)$, $c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ (2).

Iz (2) dobivamo $a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n$ (3).

Budući da je $a_1+b_1+c_1=3$, to je prema (3)

$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=3$.

Sada je $a_{n+1}=3-(b_{n+1}+c_{n+1})\overset{(2)}{=}3-a_n-\frac{1}{2}(b_n+c_n)\overset{(2)}{=}$
$\overset{(2)}{=}3-a_n-a_{n+1}$, pa je $2a_{n+1}=3-a_n$ ili

$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}$ (4).

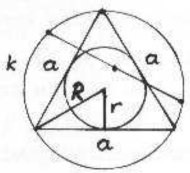
Rješenje a_{n+1} nehomogene rekurzivne jednadžbe (4) dobivamo kao sumu rješenja a^*_{n+1} pridružene homogene jednadžbe $a^*_{n+1}=-\frac{1}{2}a^*_n$ (5) i partikularnog rješenja a'_{n+1} nehomogene jednadžbe (4). Lako se nalazi da je $a^*_{n+1}=\lambda\cdot(-\frac{1}{2})^{n+1}$ (5) i $a'_{n+1}=1$ (6), pa je $a_{n+1}=a^*_{n+1}+a'_{n+1}$, odnosno $a_{n+1}=\lambda\cdot(-\frac{1}{2})^{n+1}+1$, $a_1=0$. Iz $0=a_1=\lambda\cdot(-\frac{1}{2})^1+1$ proizlazi $\lambda=2$ (7).

Konačno je $a_{n+1}=2\cdot(-\frac{1}{2})^{n+1}+1$, tj. $a_{n+1}=-(-\frac{1}{2})^n+1$.

Prema tome je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

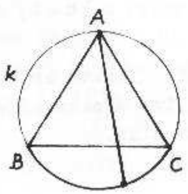
Analogno se nalazi $b_{n+1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$ i $c_{n+1}=(-\frac{1}{2})^n+1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1$.

4) a)



Duljina tetive je veća od duljine $a=R\sqrt{3}$ stranice jednakostraničnog trokuta za izbor središta u unutrašnjosti kruga polumjera $r=R/2$, pa je vjerojatnost $P=r^2\pi/R^2\pi=(r/R)^2=(1/2)^2=1/4$.

b)



Neka je ABC jednakostraničan trokut upisan u krug i A jedna krajnja točka tetive. Tetiva je dulja od stranice tog trokuta ako je ona unutar kuta $\sphericalangle BAC$, pa je vjerojatnost $P=\mu(\widehat{BC})/\mu(k)=1/3$.

SR BOSNA I HERCEGOVINA

DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR BOSNE I HERCEGOVINE

REPUBLIČKO NATJECANJE

Zadaci:

I razred:

1) Dokazati da je izraz $S=23^{12}-23^{10}-23^8+23^4+23^2-1$ djeljiv sa 105.
2) Neka su M i N točke dodira kružnice upisane u trokut ABC sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a P točka presjeka pravca MN sa simetralom kuta ABC. Dokazati da je kut BPC pravi.
3) Ako je $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, tada je
$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$ Dokazati.
4) Dano je 5 točaka u ravnini tako da nikoje 3 od njih ne leže na istom pravcu i nikoje 4 ne leže na istoj kružnici. Dokazati da postoji kružnica koja prolazi kroz 3 od tih 5 točaka, tako da jedna od preostalih točaka bude unutar te kružnice, a druga izvan.

II razred:

1) Naći realna rješenja sustava jednadžbi:
$$\frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a,\quad \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b,\quad a,b\in R.$$
2) Neka su z_1 i z_2 rješenja jednadžbe $z^2+pz+q=0$, $q\neq 0$. Tada z_1 i z_2 leže (u kompleksnoj ravnini) ili na kružnici sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava ili na polupravcu koji izlazi iz ishodišta koordinatnog sustava akko je $p\cdot|q|=\bar{p}q$. Dokazati.
3) Koliko ima prirodnih brojeva $n\leq 1988$ za koje vrijedi: $[\sqrt{n}]$ dijeli n ? ($[x]$ = najveći cijeli broj koji nije veći od x).

4) Dano je n točaka $A_1, A_2, \dots, A_n$ u ravnini. Dokazati da polovišta svih dužina A_iA_j, $i \neq j$, odredjuju bar $2n-3$ različitih točaka.

III razred:

1) Izračunati $\operatorname{tg} 9^\circ$ (bez upotrebe logaritamskih tablica i računala).

2) Naći realna rješenja sustava jednadžbi: $x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{1}{x_2})$,

$x_2 = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{1}{x_3})$, $x_3 = \frac{1}{2}(x_4 + \frac{1}{x_4})$, $x_4 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{1}{x_1})$.

3) Suma 5 pozitivnih brojeva jednaka je 1. Dokazati da se ti brojevi mogu postaviti na kružnicu tako da suma 5 produkata susjednih brojeva ne prelazi $1/5$.

4) U ravnini je dano $4n+1$ točaka tako da nikoje 3 nisu kolinearne. Dokazati da se $4n$ od tih točaka mogu razbiti u parove, tako da dužine odredjene tim parovima imaju bar n presjeka.

IV razred:

1) Na listu papira sa kvadratnom mrežom nacrtan je pravokutnik ABCD čije strane leže na linijama mreže i za koji vrijedi: $|AD| = k|AB|$ $(k \in N)$. Promatrajmo sve puteve iz A u C koji idu linijama mreže i koji su najkraći. Dokazati da je izmedju svih tih puteva onih kojima prvi odsječak leži na $\overline{AD}$ k puta više od onih kojima prvi odsječak leži na $\overline{AB}$.

2) Postoji li polinom $p(x)$ sa realnim koeficijentima takav da za svaki x iz nekog intervala (α, β), $\alpha < \beta$, vrijedi: $p(\sin x) = \sin 2x$?

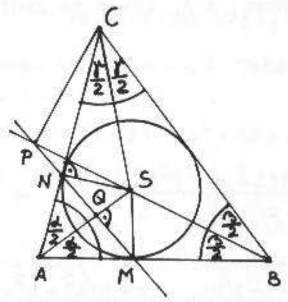
3) Za niz brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{1988}$ vrijedi: $a_1 = 1$, $|a_{k+1}| = |a_k + 1|$ za $k = 1, 2, \dots, 1987$. Naći maksimalnu vrijednost izraza: $|a_1 + a_2 + \dots + a_{1988}|$.

4) Dano je n plavih i n crvenih točaka u ravnini, tako da nikoje 3 nisu kolinearne. Tada postoji pravac koji ne prolazi ni kroz jednu od tih točaka, takav da sa jedne njegove strane leži k plavih i k crvenih točaka, gdje je k neki broj veći od 0, a manji od n. Dokazati.

R j e š e n j a :

I razred:

1) $S = (23^{12} - 23^{10}) - (23^8 - 23^4) + (23^2 - 1) =$
$= 23^{10}(23^2 - 1) - 23^4(23^2 - 1)(23^2 + 1) + (23^2 - 1) =$
$= (23^2 - 1)(23^{10} - 23^6 - 23^4 + 1) =$
$= (23^2 - 1)(\, 23^6(23^4 - 1) - (23^4 - 1)\,) =$
$= (23^2 - 1)(23^4 - 1)(23^6 - 1) =$
$= (23^2 - 1)^2(23^2 + 1)(23^3 - 1)(23^3 + 1) =$
$= ((23-1)(23+1))^2(23^2+1)(23-1)(23^2+23+1)(23+1)(23^2-23+1) =$
$= 22^2 . 24^2 . 530 . 22 . 553 . 24 . 507$,
što je djeljivo sa $105 = 3.5.7$, jer $3 | 24$, $5 | 530$ i $7 | 553$.

2) 

Uz oznake kao na slici imamo:
$\sphericalangle PNC = \sphericalangle ANQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (*)
(vršni kutevi),
$\sphericalangle PSC = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (**)
(vanjski kut trokuta SBC ;
(*) & (**) $\Rightarrow \sphericalangle PNC = \sphericalangle PSC =$
$= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ PNSC je tetivni četverokut $\Rightarrow \sphericalangle SPC = \sphericalangle SNC = 90^\circ$
(kutevi nad istim kružnim lukom $\widehat{SC}$) $\Rightarrow \sphericalangle BPC = 90^\circ$.

3) $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b-c} = -\frac{b}{c-a} - \frac{c}{a-b} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{a}{b-c} = \frac{(b-c)(-a+b+c)}{(c-a)(a-b)} \Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2} = \frac{-a+b+c}{(c-a)(a-b)}$.
Analogno izlazi $\frac{b}{(c-a)^2} = \frac{a-b+c}{(a-b)(b-c)}$ i $\frac{c}{(a-b)^2} =$
$= \frac{a+b-c}{(b-c)(c-a)}$; pa je $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} =$
$= \frac{-a+b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{a-b+c}{(a-b)(b-c)} + \frac{a+b-c}{(b-c)(c-a)} =$
$= \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$.

4) U dokazu tvrdnje ovog zadatka koristit ćemo slijedeću činjenicu:
Ako je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k, a C točka u istoj ravnini, tada je $\sphericalangle ACB$ tupi, pravi, odnosno šiljasti tada i samo tada ako je točka C unutar, na, odnosno izvan kružnice k (dokažite to !).
Od 5 zadanih točaka (od kojih nikoje 3 nisu kolinearne) uvijek možemo odabrati 2 točke takve da se preostale 3 točke nalaze s iste strane pravca odredjenog sa te dvije prvobitno odabrane točke. Označimo te 2 točke sa A_1 i A_2 i promatrajmo kuteve pod kojima se dužina A_1A_2 vidi iz preostale 3 točke, koje ćemo označiti sa A_3, A_4, A_5. Ako je na primjer $\sphericalangle A_1A_3A_2 > \sphericalangle A_1A_4A_2 > \sphericalangle A_1A_5A_2$ (zašto su sva tri kuta medjusobno različita ?), tada ćemo trokutu $A_1A_2A_4$ opisati kružnicu, A_3 će biti unutar, a A_5 izvan te kružnice.

II razred:

1) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = a \;/^2 \\[2ex] \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = b \;/^2 \end{array}\right| - \Rightarrow \frac{(x^2-y^2)(1-x^2+y^2)}{1-x^2+y^2} = a^2-b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-y^2 = a^2-b^2 \;(*) \Rightarrow \frac{x-y\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}} = a \;\&\; \frac{y-x\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}} = b$$

$$\Rightarrow x = \frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}} \;\&\; y = \frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}} \quad (**) .$$

Pri tome mora vrijediti:

$$x^2-y^2 \geq 0 \;\&\; 1-x^2+y^2 > 0 \Rightarrow 0 \leq x^2-y^2 < 1 \overset{(*)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(*)}{\Rightarrow} 0 \leq a^2-b^2 < 1 \quad (***).$$

Rješenje zadanog sustava jednadžbi je dano sa (**), pri čemu mora vrijediti uvjet (***).

2) $z^2+pz+q=0 \Rightarrow p=-(z_1+z_2) \;\&\; q=z_1z_2 \quad (*)$,
$q \neq 0 \Rightarrow z_1z_2 \neq 0 \Rightarrow z_1 \neq 0 \;\&\; z_2 \neq 0 \quad (**)$,

$$p\cdot|q| = \bar{p}\cdot q \overset{(*)}{\Leftrightarrow} -(z_1+z_2)\cdot|z_1z_2| = -\overline{z_1+z_2}\cdot(z_1z_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z_1+z_2)\cdot|z_1|\cdot|z_2| = (\overline{z_1}+\overline{z_2})\cdot(z_1z_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z_1\cdot|z_1|\cdot|z_2| + z_2\cdot|z_1|\cdot|z_2| = (\overline{z_1}z_1)z_2 + (\overline{z_2}z_2)z_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z_1\cdot|z_1|\cdot|z_2| + z_2\cdot|z_1|\cdot|z_2| = |z_1|^2\cdot z_2 + |z_2|^2\cdot z_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|z_1|-|z_2|)(z_1|z_2|-z_2|z_1|) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z_1|-|z_2| = 0 \vee z_1|z_2|-z_2|z_1| = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \vee |z_2|z_1 = |z_1|z_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r_1 = r_2 \vee \arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ z_1 i z_2 leže na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjerom $|z_1| = |z_2|$ ili z_1 i z_2 leže na polupravcu koji polazi iz ishodišta i sa pozitivnim smjerom osi x zatvara kut $\arg z_1 = \arg z_2$.

3) Neka je $[\sqrt{n}] = k \in N$. Tada je
$k \leq \sqrt{n} < k+1$,
$k^2 \leq n < (k+1)^2 = k^2+2k+1$,
$n = k^2+p$, $0 \leq p < 2k+1$, pa izlazi

$$k = [\sqrt{n}] \,|\, n = k^2+p \Leftrightarrow k \,|\, p < 2k+1 \Leftrightarrow p \in \{0,k,2k\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n \in \{k^2, k^2+k, k^2+2k\}.$$

Za $k \in \{1,2,3,\dots,43\}$, $p \in \{0,k,2k\}$, je $n = k^2+p < 1988$, a za $k = 44$ je samo $n = k^2 = 44^2 < 1988$, dok su $n = k^2+k = 44^2+44$ i $n = k^2+2k = 44^2+2.44$ veći od 1988. Dakle, ukupan broj prirodnih brojeva $n < 1988$, koji zadovoljavaju uvjet $[\sqrt{n}]\,|\,n$, je $43.3+1 = 130$.

4) Uočimo dvije točke koje medjusobno imaju maksimalnu udaljenost i označimo ih sa P i Q, a njihovo središte sa R . Oko P i Q opišimo kružnice polumjera $|PR| = |QR| = |PQ|/2$. Točku P spojimo sa svim ostalim (n-2) - ma točkama (osim sa točkom Q sa kojom je već spojena). Polovišta svih tih dužina su unutar kružnice $k(P,|PQ|)$ i medjusobno su različita (zašto ?). Isto učinimo sa točkom Q i dobit ćemo no -

vih $n-2$ polovišta, pa je ukupan broj različitih polovišta (polovišta svih dužina, a ne samo onih kojima je krajnja točka P ili Q) najmanje $2.(n-2)+1$ (točka R) $= 2n-3$. Minimalan broj polovišta $(2n-3)$ biti će kada su sve točke kolinearne (na istome pravcu) i kada je razmak svake dvije susjedne točke konstantan.

III razred:

1) Kako je $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$, a $tg45^\circ = 1$, ostaje nam još odrediti $tg36^\circ$.

Iz $tg(3.36^\circ) = tg108^\circ = tg(180^\circ - 72^\circ) = -tg72^\circ = -tg(2.36^\circ)$, tj. $tg(3.36^\circ) = -tg(2.36^\circ)$, primjenom formula

$tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ i $tg3\alpha = tg(2\alpha+\alpha) = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$, dobivamo $\dfrac{3tg36^\circ - tg^3 36^\circ}{1-3tg^2 36^\circ} = -\dfrac{2tg36^\circ}{1-tg^2 36^\circ}$. Supstitucijom $t = tg36^\circ \in (0,1)$, iz posljednje jednadžbe izlazi:

$$\frac{3t-t^3}{1-3t^2} = -\frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow t^5 - 10t^2 + 5t = 0 \;/ :t \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t^2)^2 - 10t^2 + 5 = 0 \Rightarrow t^2 = 5 \mp 2\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = 5 - 2\sqrt{5} \text{ (jer iz } t<1 \Rightarrow t^2<1) \Rightarrow t = \mp\sqrt{5-2\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ (zbog } t>0) \Rightarrow tg36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Sada, primjenom formule $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 - tg\alpha . tg\beta}$, izlazi:

$$tg9^\circ = tg(45^\circ - 36^\circ) = \frac{tg45^\circ - tg36^\circ}{1-tg45^\circ . tg36^\circ} = \frac{1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}} =$$

$$= 1+\sqrt{5} - (2+\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5} - \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

2) Uvjet: $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 0$.

Očigledno je da su x_1, x_2, x_3, x_4 istog predznaka.

1°) $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$.

Dokažimo prvo jednu pomoćnu lemu: Za pozitivan realan broj x vrijedi: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Dokaz leme: Iz $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \;/ :x>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Dokažimo sada tvrdnju zadatka.

Prema prethodnoj lemi je $x_1 + 1/x_1 \geq 2$, $x_2 + 1/x_2 \geq 2$, $x_3 + 1/x_3 \geq 2$, $x_4 + 1/x_4 \geq 2$, pa iz zadanog sustava jednadžbi izlazi: $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 1$ i $1/x_1 \leq 1$, $1/x_2 \leq 1$, $1/x_3 \leq 1$, $1/x_4 \leq 1$, tj. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$ i $1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 \leq 4$.

Zbrajanjem jednadžbi zadanog sustava dobivamo:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2 +$
$+ (1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4)/2$, tj.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4$, što je, prema ranije pokazanom, moguće samo ako je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ (obrazložite to !).

2°) $x_1, x_2, x_3, x_4 < 0$.

Množenjem zadanih jednadžbi sa -1, problem se svodi na prethodni slučaj, pa za rješenje sustava dobivamo $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$ (pokažite to !).

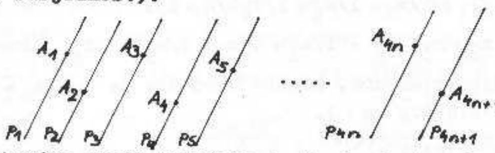
3) Označimo te brojeve sa a,b,c,d,e. Prema uvjetu zadatka mora biti $a+b+c+d+e = 1$ (*).

Pretpostavimo (suprotno tvrdnji zadatka) da ne postoji razmještaj tih 5 brojeva, takav da suma 5 produkata susjednih brojeva ne bude veća od 1/5. Razmotrimo na primjer ovakve razmještaje brojeva: $aRbRcRdReRa$ (**) i $aRcReRbRdRa$ (***) (gdje je R relacija "biti susjedan"). Tada iz (**) slijedi $ab+bc+cd+de+ea > 1/5$ (****), a iz (***) $ac+ce+eb+bd+da > 1/5$ (*****), pa imamo :

$1 = 1^2 \stackrel{(*)}{=} (a+b+c+d+e)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2.(ab+ac+$
$+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de) = (a^2+b^2)/2 +$
$+(b^2+c^2)/2 + (c^2+d^2)/2 + (d^2+e^2)/2 + (e^2+f^2)/2 +$
$+2.(ab+bc+cd+de+ea) + 2.(ac+ce+eb+bd+da) \geq$
$\geq (ab+bc+cd+de+ea) + 2.(ab+bc+cd+de+ea) +$
$+2.(ac+ce+eb+bd+da)$ (zbog $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a^2+b^2)/2 \geq ab, \ldots$) $= 3.(ab+bc+cd+de+ea) +$

$+ 2.(ac + ce + eb + bd + da) > 3\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{1}{5}$ (prema (****) i (*****))$=$ $= 1$, tj. $1 > 1$, čime dolazimo do kontradikcije.
Stim je tvrdnja zadatka dokazana.

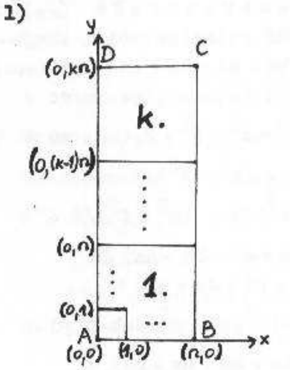
4) Zadanih $4n+1$ točaka odredjuje $\binom{4n+1}{2} = 2n(4n+1)$ pravaca, a ti pravci odredjuju najviše $2n(4n+1)$ smjerova. Odaberimo jedan smjer s koji je različit od svih tih smjerova i zadanim točkama postavimo pravce paralelne s tim smjerom. Pravce i zadane točke označimo kao na slici (iskoristimo susjednost):



Promatrajmo prvih 5 točaka A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. One odredjuju bar jedan konveksan četverokut. Točki koja nije vrh tog četverokuta pridružimo slijedeće 4 točke A_6, A_7, A_8, A_9 i ponovo uočimo jedan postojeći konveksni četverokut. Nastavimo li ovaj postupak, dobit ćemo n konveksnih četverokuta, a n sjecišta dijagonala tih četverokuta daju skup od n različitih presjeka parova dužina.

IV razred:

1)



Stavimo pravokutnik ABCD u koordinatni sustav kao na slici. Neka je $|AB| = n$. Tada je $|AD| = k.n$. Da bi iz točke (1,0) stigli u točku C najkraćim putem, potrebno nam je prijeći $n-1$ horizontalnih i kn vertikalnih jediničnih odsječaka, tj. ukupno $kn + n - 1$, pa je broj načina na koje to možemo učiniti $\binom{kn+n-1}{n-1}$ (broj kombinacija bez ponavljanja $(n-1)$ - ve klase (broj horizontalnih pomaka) od $kn+n-1$ elemenata).

Analogno se pokazuje da je broj načina na koji se može iz točke (0,1) stići u točku C jednak $\binom{kn+n-1}{n}$, pa iz $\binom{kn+n-1}{n} = k.\binom{kn+n-1}{n-1}$ (dokažite to !) proizlazi tvrdnja zadatka.

2) Neka postoji polinom $p(x)$ sa realnim koeficijentima takav da vrijedi $p(\sin x) = \sin 2x$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$ (*).
Supstitucijom $t = \sin x$ i primjenom formule $\sin 2x =$ $= 2\sin x\cos x = \pm 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$, iz (*) dobivamo:
$p(t) = \pm 2t\sqrt{1-t^2}\ /^2 \Rightarrow p^2(t) = 4t^2(1-t^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow p^2(t) = -4t^4 + 4t^2$ (**).
Zbog toga $p(t)$ mora biti oblika (zašto ?) $p(t) = at^2 + bt$, odakle kvadriranjem izlazi $p^2(t) = a^2t^4 + 2abt^3 + b^2t^2$ (***).
Iz (**) i (***) slijedi: $b^2 = 4$, $2ab = 0$, $a^2 = -4 < 0$, što je očito nemoguće.
Dakle, polinom sa navedenim svojstvom ne postoji.

3) Iz $1 = a_1 = |a_0 + 1| \Rightarrow a_0 = 0$. Neka je $|a_{1989}| = |a_{1988} + 1|$.

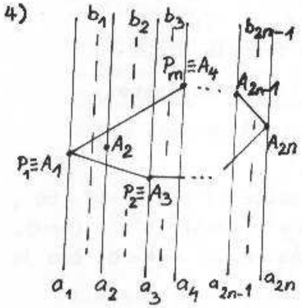
Tada je:
$$\left.\begin{array}{l} |a_1| = |a_0+1|\ /^2 \\ |a_2| = |a_1+1|\ /^2 \\ \text{==============} \\ |a_{1989}| = |a_{1988}+1|\ /^2 \end{array}\right| + \Rightarrow \sum_{i=1}^{1989} |a_i|^2 = \sum_{i=0}^{1988} |a_i+1|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{1989} a_i^2 = \sum_{i=0}^{1988} (a_i+1)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{1989} a_i^2 = \sum_{i=0}^{1988} a_i^2 + 2.\sum_{i=0}^{1988} a_i +$$
$$+ 1989 \Rightarrow 2.\sum_{i=0}^{1988} a_i = a_{1989}^2 - a_0^2 - 1989 \Rightarrow \sum_{i=1}^{1988} a_i =$$
$$= \frac{1}{2}(a_{1989}^2 - 1989) \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{1988} a_i\right| = \frac{1}{2}\cdot|a_{1989}^2 - 1989|.$$

Izraz $\left|\sum_{i=1}^{1988} a_i\right|$ je minimalan kada je izraz $|a_{1989}^2 - 1989|$ minimalan. Kako je $a_{1989} \in N$, a $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$, tada je posljednji izraz minimalan (18) kada je $a_{1989} = 45$.

Ostaje još provjeriti da a_{1989} može poprimiti vrijednost 45. Evo jednog primjera: $a_1=1$, $a_2=-2$, $a_3=1$, $a_4=-2$, $a_5=1$, ..., $a_{1944}=-2$, $a_{1945}=1$, $a_{1946}=2$, $a_{1947}=3$, ..., $a_{1989}=45$.

4)



Uočimo konveksan m-terokut čiji su vrhovi iz skupa od 2n zadanih točaka (plavih ili crvenih) i u čijoj unutrašnjosti se nalaze sve ostale 2n-m točke. Ako rub tog m-terokuta sadrži i plave i crvene točke, tada postoje 2 susjedne točke P i C tog ruba, od kojih je jedna plava, a druga crvena. Pravcem $p \parallel PC$ lako je odvojiti te 2 točke od ostalih 2n-2 točaka i tvrdnja zadatka je dokazana (k=1).

Neka su sada sve rubne točke konveksnog m-terokuta iste, na primjer plave boje. Tada ćemo položiti 2n medjusobno paralelnih pravaca a_i $(i=1,2,\dots,2n)$, takvih da na svakome leži točno jedna zadana točka A_i. Potom, paralelno sa tim pravcima, izmedju svaka 2 pravca a_i $(i=1,2,\dots,2n)$ položimo po jedan od ukupno 2n-1 pravaca b_j $(j=1,2,\dots,2n-1)$. Za svaki pravac b_j $(j=1,2,\dots,2n-1)$ promotrimo razliku R_j $(j=1,2,\dots,2n-1)$ broja plavih i broja crvenih točaka koje se nalaze sa iste strane pravca b_j kao i točka P_1. Očito je da je $R_1=1$, a $R_{2n-1}=-1$, pa mora postojati pravac b_p $(p\in\{1,2,\dots,2n-1\})$ za koji je $R_p=0$, što se itvrdilo.

SR HRVATSKA

POKRET "NAUKU MLADIMA" SR HRVATSKE

REPUBLIČKO NATJECANJE

Zadaci:

I razred:

1) Dokaži da je $\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ cio broj za svaki cijeli broj x.

2) Zadan je realan broj $k\neq 0$ i funkcija $f:R\to R$ tako da za sve $x\in R$ vrijedi:
$f(x)\neq 1$ i $f(x)\neq 0$, te $f(x+k)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.
Dokaži da je $f(x+4k)=f(x)$ za svaki $x\in R$.

3) Nadji sve polinome P za koje je $(P(x))^2=P(x^2)$.

4) U krug je upisan četverokut ABCD čije su dijagonale medjusobno okomite. Dokaži da je površina kruga $P=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\pi$, gdje su a,b duljine dijelova dijagonale $\overline{AC}$ (računajući od sjecišta dijagonala do vrhova A i C), a analogno su c,d duljine dijelova dijagonale $\overline{BD}$.

II razred:

1) Riješi jednadžbu $2\cdot(\log_x y+\log_y x)=5$.

2) Po unutarnjoj strani obruča polumjera 2r kotrlja se, bez klizanja, kotač polumjera r. Dokaži da zadana točka kotača opisuje jedan promjer obruča.

3) Odredi maksimalnu vrijednost funkcije $f(x)=\frac{x}{ax^2+b}$, $a,b>0$.

4) Odredi one polinome P(x) za koje vrijedi: $(x+1)\cdot P(x)=(x-2)\cdot P(x+1)$.

III razred:

1) Dokaži da $10 \mid a_1+\dots+a_{1988} \Rightarrow 10 \mid a_1^5+\dots+a_{1988}^5$, $a_i\in N$, $i=1,\dots,1988$.

2) Definirajmo niz: $u_1 = 1$, $u_2 = 3 + 5$, $u_3 = 7 + 9 + 11$, $u_4 = 13 + 15 + 17 + 19$, ... Odredi opći član niza u_k i parcijalnu sumu $\sum_{i=1}^{k} u_i$.

3) Duljina visine uspravnog stošca dva puta je veća od polumjera baze. Nadji omjer volumena kugle pisane oko stošca i kugle upisane u stožac.

4) U prostoru su dane točke $A(2,1,3)$, $B(3,1,5)$, $C(3,3,1)$ i $D(3,0,-2)$. Nadji udaljenost mimoilaznih pravaca AB i CD.

IV razred:

1) Nadji sve funkcije $f: Q \to R$ takve da za sve $x, y \in Q$ vrijedi: $f(x+y) = f(x).f(y)$, $f(1) = 2$.

2) Neka su $a, x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitivni realni brojevi, $n \geq 2$. Dokaži da je:

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n - x_1} \geq \frac{n^2}{2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}$$ i

ispitaj kada nastupa jednakost.

3) Dokaži da je za svaki prirodan broj n izraz $(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n$ cijeli broj, koji nije djeljiv sa 5.

4) Neka je R radijus kugle opisane oko pravilne četverostrane piramide, a r radijus kugle upisane u tu piramidu. Dokaži da je $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$.

R j e š e n j a :

I razred:

1) $$f(x) = \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6} = \frac{x(x+1)(x+2)}{6} .$$

Kako je produkt $x(x+1)(x+2)$ tri uzastopna cijela broja x, $x+1$, $x+2$ djeljiv sa 6 (dokažite to matematičkom indukcijom !), tada je očito $f(x)$ cio broj.

2) $$f(x+2k) = f((x+k)+k) = \frac{1 + f(x+k)}{1 - f(x+k)} = \frac{1 + \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)} ,$$

$$f(x+4k) = f((x+2k)+2k) = -\frac{1}{f(x+2k)} = f(x), \text{ tj.}$$

$f(x+4k) = f(x)$, $\forall x \in R$.

3) Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Tada je $P(0) = a_0$, $P(0^2) = a_0$ pa zbog uvjeta zadatka proizlazi $a_0{}^2 = a_0$, odakle je $a_0 \in \{0,1\}$.

1°) Pretpostavimo da je $a_0 = 1$. Neka je k najmanji broj iz skupa $\{1,2,\dots,n\}$ takav da je $a_k \neq 0$. Tada je

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_k x^k + 1$,

$(P(x))^2 = 1 + 2a_k x^k + \dots$,

$P(x^2) = 1 + a_k x^{2k} + \dots$.

Odavde zaključujemo da je $(P(x))^2 \neq P(x^2)$. Dakle, a_0 ne može poprimiti vrijednost 1.

2°) Pretpostavimo da je $a_0 = 0$ i k najmanji broj iz skupa $\{1,2,\dots,n-1\}$ za koji je $a_k \neq 0$. Tada je

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_k x^k = x^k(a_n x^{n-k} + \dots + a_k) = x^k.Q(x)$,

$P(x^2) = x^{2k}.Q(x^2)$,

$(P(x))^2 = x^{2k}.(Q(x))^2$.

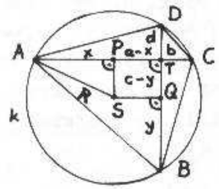
Iz uvjeta $(P(x))^2 = P(x^2)$ proizlazi $(Q(x))^2 = Q(x^2)$, pa na temelju razmatranja u 1° zaključujemo da slobodni koeficijent a_k polinoma Q mora biti 0.

Dakle, mora biti $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ i $a_n = 1$ (zašto?).

Traženi polinomi su $P(x) = x^n$, $n \in N$.

Još dva rješenja dobivamo uz pretpostavku da je P konstanta: $P(x) = c$. Naime $(P(x))^2 = P(x^2) \Rightarrow c^2 = c \Rightarrow c \in \{0,1\}$ i $P(x) = 0$, $P(x) = 1$.

4)



$|PA| = |PC| \Rightarrow x = a - x + b \Rightarrow x = (a+b)/2$,

$|QB| = |QD| \Rightarrow y = c - y + d \Rightarrow y = (c+d)/2$

$\Rightarrow c - y = c - (c+d)/2 = (c-d)/2$,

$ab = cd$ (potencija točke T s obzirom na kružnicu k),

ΔASP: $R^2 = x^2 + (c-y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = (\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{c-d}{2})^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2cd) \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ab) \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_k = R^2\pi = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\pi$.

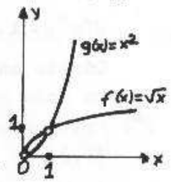
II razred:

1) Uvjeti: $x \in R^+ \setminus \{1\}$, $y \in R^+ \setminus \{1\}$.

$2(\log_x y + \log_y x) = 5 \Rightarrow 2(\log_x y + 1/\log_x y) = 5 \;/.\log_x y \Rightarrow$

$\Rightarrow 2.\log_x^2 y - 5.\log_x y + 2 = 0 \Rightarrow \log_x y = \frac{5 \mp 3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (\log_x y)_1 = 1/2 \Rightarrow y_1 = x^{1/2} \Rightarrow y_1 = \sqrt{x},\ x \in (R^+ \setminus \{1\}) \\ (\log_x y)_2 = 2 \Rightarrow y_2 = x^2,\ x \in (R^+ \setminus \{1\})\ . \end{cases}$

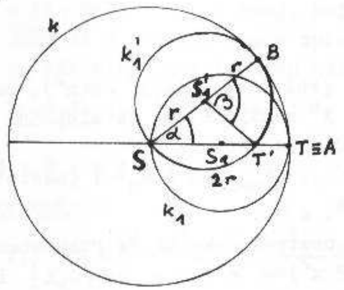


Neka je $f:(R^+ \setminus \{1\}) \longrightarrow (R^+ \setminus \{1\})$, $f(x) = \sqrt{x}$

i $g:(R^+ \setminus \{1\}) \longrightarrow (R^+ \setminus \{1\})$, $g(x) = x^2$.

Tada je očito $g^{-1} = f$, tj. $f^{-1} = g$ (provjerite to!).

2)



Neka je k obruč polumjera 2r, a k_1 kotač polumjera r koji se kotrlja po unutrašnjoj strani obruča. Uočimo neku točku T kotača k_1. U nekom momentu točka T će pasti u neku točku A obruča k. U nekom drugom momentu kotač k_1 će doći u neki položaj k_1' i dodirivat će obruč k u nekoj točki B. Pri tome će vrijediti $\overset{\frown}{BT'} = \overset{\frown}{BA}$, odakle je $|S_1'B|.\beta = |SA|.\alpha$, $r\beta = 2r\alpha$, $\beta = 2\alpha$. No kako je $\beta = 2.\sphericalangle T'SB$ (središnji kut β jednak je dvostrukom obodnom kutu $\sphericalangle T'SB$ nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{BT'}$), tada je $\alpha = \sphericalangle T'SB$, tj. T' leži na spojnici $\overline{SA}$.

3) $y = \frac{x}{ax^2+b} \Leftrightarrow ayx^2 - x + by = 0$,

$x \in R \Leftrightarrow D = B^2 - 4AC \geq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4ay.by \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 4aby^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4aby^2 \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4ab} \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{ab}}, \frac{1}{2\sqrt{ab}}\right]$.

Funkcija $y = \frac{x}{ax^2+b}$ će imati maksimum $y_M = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$.

Ostaje još izračunati x_M:

$a.\frac{1}{2\sqrt{ab}}x^2 - x + b.\frac{1}{2\sqrt{ab}} = 0 \Rightarrow ax^2 - 2\sqrt{ab}x + b = 0 \Rightarrow (\sqrt{a}x - \sqrt{b})^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow x_M = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Dakle, $M = (x_M, y_M) = (\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{2\sqrt{ab}})$.

4) $(x+1).P(x) = (x-2).P(x+1)$ (*) ,

$(x-2) \nmid (x+1)$ (općenito) $\overset{(*)}{\Rightarrow} x-2 \mid P(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = (x-2).P_1(x)$ (**) $\Rightarrow P(x+1) = (x-1).P_1(x+1) \Rightarrow$

$\overset{(*),(**)}{\Rightarrow} (x+1).(x-2)P_1(x) = (x-2).(x-1)P_1(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1).P_1(x) = (x-1).P_1(x+1)$ (***),

$x-1 \nmid x+1 \overset{(***)}{\Rightarrow} x-1 \mid P_1(x) \Rightarrow P_1(x) = (x-1).P_2(x)$ (****) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_1(x+1) = x.P_2(x+1) \overset{(***),(****)}{\Rightarrow} (x+1).(x-1)P_2(x) =$

$= (x-1).xP_2(x+1) \Rightarrow (x+1).P_2(x) = x.P_2(x+1)$ (*****) ,

$x \nmid x+1 \overset{(*****)}{\Rightarrow} x \mid P_2(x) \Rightarrow P_2(x) = x.P_3(x)$ (******) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_2(x+1) = (x+1).P_3(x+1) \overset{(*****),(******)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (x+1).xP_3(x) = x.(x+1)P_3(x+1) \Rightarrow P_3(x) = P_3(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_3(x) = a$ (konstanta) (*******) $\overset{(******)}{\Rightarrow} P_2(x) = ax \Rightarrow$

$\overset{(****)}{\Rightarrow} P_1(x) = ax(x-1) \overset{(**)}{\Rightarrow} P(x) = ax(x-1)(x-2)$, $a \in R$.

III razred:

1) $\sum_{i=1}^{1988} a_i^5 = \sum_{i=1}^{1988} (a_i^5 - a_i) + \sum_{i=1}^{1988} a_i$ (*) .

Dokažimo prvo da $10 | n^5 - n,\ n \in N$ (**).
Dokaz provodimo matematičkom indukcijom:

(a) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer $10 | 0$.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da $10 | k^5 - k$.

(c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da $10 | (k+1)^5 - (k+1)$.

Dokaz:

$(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 =$
$= (k^5 - k) + 10(k^3 + k^2) + 5(k^4 + k) =$
$= (k^5 - k) + 10(k^3 + k) + 5k(k+1)(k^2 - k + 1)$, što je djeljivo sa 10 jer $10 | k^5 - k$ (prema (b)), $10 | 10(k^3 + k)$ i $10 | 5k(k+1)(k^2 - k + 1)$ (zbog $2 | k(k+1)$).

Prema (**) je $\sum_{i=1}^{1988} (a_i^5 - a_i)$ djeljivo sa 10, a po pretpostavci je $\sum_{i=1}^{1988} a_i$ djeljivo sa 10, pa je tvrdnja zadatka (na osnovu (*)) očigledna.

2) Prvo dokažimo matematičkom indukcijom da je
$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ (*).

(a) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je $1 = 1^2$.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da je $S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.

(c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da je $S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k+1)^2$.

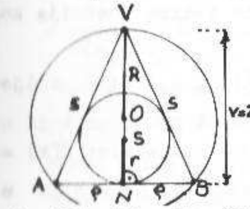
Dokaz:
$S_{k+1} = S_k + (2k + 1) \overset{(b)}{=} k^2 + (2k + 1) = (k+1)^2$.

Stim je tvrdnja (*) dokazana.
Kako u_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ima i sumanada, tada $U_k = \sum_{i=1}^{k} u_i$ ima $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ članova, pa je

$U_k = \sum_{i=1}^{k} u_i = S_{k(k+1)/2} \overset{(*)}{=} \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, tj.

$U_k = \sum_{i=1}^{k} u_i = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ (**). Nadalje je $u_k = U_k - U_{k-1} =$
$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} - \frac{(k-1)^2 k^2}{4} = k^3$, tj. $u_k = k^3$ (***).

3)



ΔANV: $s = \sqrt{4\rho^2 + \rho^2} = \rho\sqrt{5}$,

$P_{\Delta ABV} = 2\rho^2$,

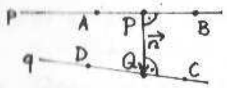
$R = \frac{|AB| \cdot |BV| \cdot |VA|}{4P_{\Delta ABV}}$,

$r = \frac{2P_{\Delta ABV}}{|AB| + |BV| + |VA|}$,

$\frac{R}{r} = \frac{|AB| \cdot |BV| \cdot |VA| \cdot (|AB| + |BV| + |VA|)}{8P^2_{\Delta ABV}} = \frac{5(1 + \sqrt{5})}{8}$.

Konačno je $\frac{V_R}{V_r} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{125(2 + \sqrt{5})}{64}$.

4)



Označimo li pravce AB i CD sa p i q, dobivamo:

$p \ldots (x, y, z) = (x_A + \lambda(x_B - x_A), y_A + \lambda(y_B - y_A), z_A + \lambda(z_B - z_A)) =$
$= (2 + \lambda, 1, 3 + 2\lambda),\ \lambda \in R$ (*),

$q \ldots (x, y, z) = (x_C + \mu(x_D - x_C), y_C + \mu(y_D - y_C), z_C + \mu(z_D - z_C)) =$
$= (3, 3 - 3\mu, 1 - 3\mu),\ \mu \in R$ (**).

Svaka točka $P \in p$ zadovoljava uvjet (*), a svaka točka $Q \in q$ uvjet (**).

Tražimo one točke $P \in p$ i $Q \in q$ za koje će biti $\overline{PQ} \perp p$ i $\overline{PQ} \perp q$. Tada će tražena udaljenost $d(p, q)$ biti jednaka udaljenosti $d(P, Q)$. Kako je $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C) = (0, -3, -3)$, $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} =$
$= (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P) = (1 - \lambda, 2 - 3\mu, -2 - 2\lambda - 3\mu)$, tada iz $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$ izlazi:

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ & $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda, 2 - 3\mu, -2 - 2\lambda - 3\mu) \cdot (1, 0, 2) =$
$= 0$ & $(1 - \lambda, 2 - 3\mu, -2 - 2\lambda - 3\mu) \cdot (0, -3, -3) = 0 \Rightarrow$
$-5\lambda - 6\mu = 3$ & $6\lambda + 18\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ & $\mu = 1/3 \Rightarrow n = \overrightarrow{PQ} =$
$= (2, 1, -1) \Rightarrow d(p, q) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{6}$.

IV razred:

1) Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$f(x+y)=f(x).f(y),\ \forall x,y\in Q$ (1) & $f(1)=2$ (2).

Očito je da funkcija $f_2: Q\longrightarrow R$, $f_2(x)=2^x$, zadovoljava uvjete (1) i (2). Pokazat ćemo da je to jedina funkcija koja zadovoljava te uvjete.

Iz $f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) \overset{(1)}{=} f(\frac{x}{2}).f(\frac{x}{2})=(f(\frac{x}{2}))^2\geq 0,\ \forall x\in Q$, slijedi da je $f(Q)\subseteq R_0^+$. Kada bi postojao neki $y\in Q$, za koji bi bilo $f(y)=0$, tada bi za svaki $x\in Q$ vrijedilo: $f(x)=f((x-y)+y)\overset{(1)}{=}f(x-y).f(y)=f(x-y).0=0$, što je u kontradikciji sa (2). Dakle, $f(Q)\subseteq R^+$.

Definirajmo sada funkciju $g_2: f(Q)\longrightarrow R$, $g_2(x)=\log_2 x$ (3), a zatim definirajmo kompoziciju funkcija

$h=g_2 o f: Q\longrightarrow R$, $h(x)=g_2(f(x))=\log_2 f(x)$ (4).

Prema (2) je $h(1)=1$ (5) & $h(x+y)=h(x)+h(y)$ (6).

Matematičkom indukcijom se lako pokazuje (pokažite to!) da je $h(x_1+x_2+\ldots+x_n)=h(x_1)+h(x_2)+\ldots+h(x_n)$ (7).

Odatle izlazi: $h(n)=h(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n})\overset{(7)}{=}\underbrace{h(1)+h(1)+\ldots+h(1)}_{n}=$

$=n.h(1)\overset{(5)}{=}n.1=n$ (8), $1=h(1)=h(n.\frac{1}{n})=$

$=h(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n})\overset{(7)}{=}\underbrace{h(\frac{1}{n})+\ldots+h(\frac{1}{n})}_{n}=n.h(\frac{1}{n})\Rightarrow h(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ (9).

$h(\frac{m}{n})=h(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m})\overset{(7)}{=}\underbrace{h(\frac{1}{n})+\ldots+h(\frac{1}{n})}_{m}=m.h(\frac{1}{n})\overset{(9)}{=}m.\frac{1}{n}=\frac{m}{n}\Rightarrow$

$\Rightarrow h(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}$ (10).

Dakle je $h(x)=x,\ \forall x\in Q$ (11), odnosno $\log_2 f(x)=x$, tj. $f(x)=2^x$.

2) Koristeći odnos aritmetičke i geometrijske sredine

$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\geq(x_1x_2\ldots x_n)^{1/2}$ (*) (dokažite ga matematičkom indukcijom), dobivamo:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\right)\overset{(*)}{\geq}$$

$$\overset{(*)}{\geq}\left(\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}\cdot\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}\cdots\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\right)^{1/n}=$$

$$=\frac{1}{((x_1+x_2)\ldots(x_n+x_1))^{1/n}}\overset{(*)}{\geq}\frac{1}{\frac{1}{n}((x_1+x_2)+\ldots+(x_n+x_1))}=$$

$$=\frac{n}{2(x_1+x_2+\ldots+x_n)}$$, odakle slijedi tvrdnja zadatka

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\geq\frac{n^2}{2(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\quad (**).$$

Pošto u (*) vrijedi jednakost akko je $x_1=x_2=\ldots=x_n$, tada će u (**) vrijediti jednakost akko je

$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}=\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}=\ldots=\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}$ & $x_1+x_2=x_2+x_3=\ldots=x_n+x_1$, tj.

akko je $a^{x_1-x_2}=a^{x_2-x_3}=\ldots=a^{x_n-x_1}$ & $x_1+x_2=x_2+x_3=\ldots$ $\ldots=x_n+x_1$. Iz posljednje jednakosti izlazi:

$x_1=x_3=x_5=\ldots$, $x_2=x_4=x_6=\ldots$, $x_2=x_n$.

Za $a=1$ i n paran broj u (**) će vrijediti jednakost akko je $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}$ & $x_2=x_4=\ldots=x_n$, a u svim ostalim slučajevima akko je $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$.

3) Supstitucijom: $a=3+2\sqrt{2}$, $b=3-2\sqrt{2}$ (*), odakle je: $a+b=6$, $ab=1$ (**), izlazi:

$a+b=6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$, $ab=1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_1=a^1+b^1=6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\equiv 1^2-2.1\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_3=a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2)-ab(a+b)=(a+b)S_2-abS_1\equiv$
$\equiv 1.S_2-1.S_1\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv S_2-S_1\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv -1-1\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv$
$\equiv -2\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_4=a^4+b^4=(a+b)S_3-abS_2\equiv S_3-S_2\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_5=a^5+b^5\equiv S_4-S_3\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

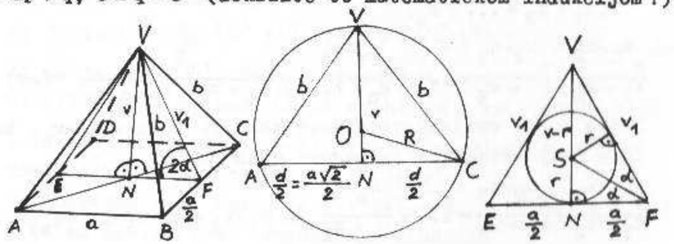
$S_6=a^6+b^6\equiv S_5-S_4\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_7 \equiv 1 \pmod 5 \equiv S_1 \pmod 5$,

$S_8 \equiv -1 \pmod 5 \equiv S_2 \pmod 5$,

$S_n = S_{6p+q} \equiv S_{n-1} - S_{n-2} \pmod 5 \equiv S_q \pmod 5$, gdje je $n = 6p+q$, $0 \le q < 6$ (dokažite to matematičkom indukcijom !).

4)



ΔVAN: $b^2 = v^2 + (a\sqrt{2}/2)^2 = \frac{1}{2}(2v^2 + a^2)$ (1) .

Pošto je polumjer R opisane kugle jednak polumjeru trokutu ACV opisane kružnice, imamo:

ΔACV: $R = \frac{dbb}{4P_{\Delta ACV}} = \frac{db^2}{2dv} = \frac{b^2}{2v} \overset{(1)}{=} \frac{2v^2 + a^2}{4v}$ (2),

ΔFVN: $v = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\, 2\alpha$ (3) , (2) & (3) $\Rightarrow$ $R = \frac{a(\mathrm{tg}^2 2\alpha + 2)}{4\mathrm{tg} 2\alpha}$ (4) .

Pošto je polumjer r upisane kugle jednak polumjeru tro - kutu EFC upisane kružnice, imamo: $r = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$ (5) .

Iz (4) i (5) sada slijedi:

$\frac{R}{r} = \frac{\mathrm{tg}^2 2\alpha + 2}{2\mathrm{tg}2\alpha . \mathrm{tg}\alpha} = \frac{\mathrm{tg}^4\alpha + 1}{2\mathrm{tg}^2\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha)}$ (6), na osnovu čega izlazi :

$\frac{R}{r} \ge \sqrt{2} + 1 \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{tg}^4\alpha + 1}{2\mathrm{tg}^2\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha)} \ge \sqrt{2} + 1$ $/ . 2\mathrm{tg}^2\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha) > 0$ (zbog $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tg}^4\alpha \ge 2(\sqrt{2}+1)\mathrm{tg}^2\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{(2\sqrt{2}+3)}_{A}(\mathrm{tg}^2\alpha)^2 \underbrace{- 2(\sqrt{2}+1)}_{B}\mathrm{tg}^2\alpha \underbrace{+1}_{C} \ge 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $A > 0$ & $D = B^2 - 4AC \ge 0$, što je uvijek istinito zbog $A = 2\sqrt{2} + 3 > 0$ i $D = 4(\sqrt{2}+1)^2 - 4(2\sqrt{2}+3) = 0$.

SR MAKEDONIJA

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA SR MAKEDONIJE

REPUBLIČKO NATJECANJE

Zadaci :

I razred:

1) Neka su A i A' dva broja koji imaju iste znamenke. Ako je $A + A' = 10^{10}$, dokazati da je A djeljiv sa 10 .

2) Dan je trokut $P_1P_2P_3$ i u njemu proizvoljna točka P. Točke u kojima pravci P_1P, P_2P i P_3P sijeku stranice trokuta su redom Q_1, Q_2, Q_3. Dokazati da izmedju omjera $|P_1P|/|PQ_1|$, $|P_2P|/|PQ_2|$, $|P_3P|/|PQ_3|$ ima bar jedan ne veći od 2 i bar jedan ne manji od 2.

3) Dokazati da ako su duljine simetrala dva unutarnja kuta trokuta jednake, tada je trokut jednakokračan.

4) Dokazati da se prirodan broj z ne može na dva različita načina prikazati u obliku $z = x! + y!$, gdje su x i y prirodni brojevi koji zadovoljavaju uvjet $x \le y$ (pri tome je $x! = 1.2.3...x$) .

II razred:

1) Riješiti jednadžbu $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

2) Dokazati da postoji samo konačno mnogo uredjenih trojki $(x-y, y-z, z-x)$ kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednakosti: $x(x-1) + 2yz = y(y-1) + 2xz = z(z-1) + 2xy$.

3) Dvije piramide imaju zajedničku bazu - kvadrat sa stranicom a. Piramide su sa iste strane kvadrata. Visine tih piramida imaju nožišta u polovištima suprotnih stranica kvadrata i imaju jednaku duljinu b. Naći volumen zajedničkog dijela tih dviju piramida .

4) Naći najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 1$, pri čemu te vrijednost za sve realne brojeve x zadovoljavaju uvjet: $x^4 + 36 \le 13x^2$. Odgovor obrazložiti .

III razred:

1) U svako polje tablice 103×103 upisani su realni brojevi čija apsolutna vrijednost nije veća od 1. U proizvoljnom kvadratu 2×2 te tablice suma brojeva je nula. Dokazati da suma svih brojeva tablice nije veća od 103 !

2) Baza piramide je jednakostraničan trokut sa stranicom a, a bočni bridovi imaju duljinu b. Konstruirana je sfera tako da dodiruje sve bridove piramide. Naći njen polumjer.

3) Ako je $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d}$, dokazati da je tada $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

4) Dokazati da od proizvoljna 4 realna broja uvijek možemo odabrati dva broja x i y tako da je $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$.

IV razred:

1) Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi:
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1 .$$

2) U toku 3 mjeseca šahist je igrao najmanje jednu partiju dnevno, ali je pri tome igrao točno dvanaest partija nedjeljno. Dokazati da se mogu naći uzastopni dani u kojima je šahist odigrao točno dvadeset i jednu partiju.

3) Isto kao 3. zadatak u III razredu.

4) Isto kao 4. zadatak u III razredu.

R j e š e n j a :

I razred:

1) Iz uvjeta $A + A' = 10^{10}$, A i A' imaju iste znamenke, proizlazi da su A i A' deseteroznamenkasti brojevi.

Neka je $A = \overline{a_{10}a_9 \ldots a_1}$, $A' = \overline{a'_{10}a'_9 \ldots a'_1}$.

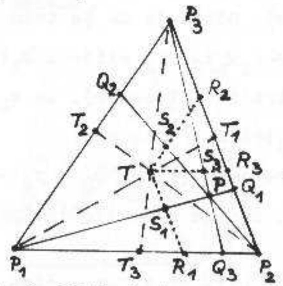
Za sumu znamenaka jedinica moguća su dva slučaja:
$a_1 + a'_1 = 10$ i $a_1 + a'_1 = 0$.

U prvom slučaju imamo:
$$a_1 + a'_1 = 10$$
$$a_2 + a'_2 = 9$$
$$\ldots$$
$$a_{10} + a'_{10} = 9 .$$

Zbrajanjem prethodnih jednakosti izlazi:
$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}) + (a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_{10}) = 10 + 9.9$,
$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}) = 91$, a ova jednakost je nemoguća (zašto ?).

Preostaje drugi slučaj $a_1 + a'_1 = 0$, a odavde odmah slijedi $a_1 = 0$, $a'_1 = 0$, što dokazuje tvrdnju zadatka.

2)



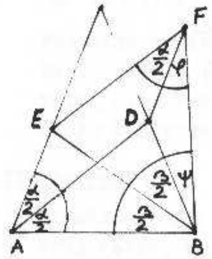
Neka je T težište trokuta $P_1P_2P_3$ (sjecište težišnica P_1T_1, P_2T_2, P_3T_3), $TR_1 \parallel P_2P_3$, $TR_2 \parallel P_3P_1$, $TR_3 \parallel P_1P_2$, te S_1, S_2 i S_3 sjecišta pravaca P_1Q_1, P_2Q_2 i P_3Q_3 sa pravcima TR_1, TR_2 i TR_3.

Ako je $P \equiv T$, tada po svojstvu težišta izlazi $|P_1P|/|PQ_1| = |P_2P|/|PQ_2| = |P_3P|/|PQ_3| = 2$.

Neka je $P \not\equiv T$. Tada prema Talesovom teoremu o pramenu pravaca izlazi $|P_1S_1| : |S_1Q_1| = |P_1T| : |TT_1| = 2:1$, pa dobivamo $|P_1P| : |PQ_1| > |P_1S_1| : |S_1Q_1| = 2:1$, tj. $|P_1P|/|PQ_1| > 2$.

Analogno se pokazuje da je $|P_2P|/|PQ_2| < 2$.

3)



Neka za simetrale AD, BE kuteva α, β trokuta ABC vrijedi $|AD| = |AE|$.

Pretpostavimo (suprotno tvrdnji zadatka) da je na primjer $\alpha > \beta$. Tada je i $\alpha/2 > \beta/2$. Odaberimo točku F tako da je ADFE paralelogram. Tada je $\sphericalangle DFE = \alpha/2$, $|DF| = |AE|$, $|AD| = |EF|$. Kako je po pretpostavci $|BE| = |AD|$, tada je $|BE| = |EF|$, pa je trokut BFE jednakokračan, tj. vrijedi $\alpha/2 + \varphi = \beta/2 + \psi$.

Zbog $\alpha/2 > \beta/2$ odavde slijedi da je $\varphi < \psi$, odnosno $|BD| < |FD|$, tj. $|BD| < |AE|$ (*) .

S druge strane, pošto za trokute ABE i ABD vrijedi $|AB| =$

$=|AB|$, $|BE|=|AD|$, $\alpha/2>\beta/2$, tada je $|BD|>|AE|$ (**), što je u kontradikciji sa (*).
Analogno se pokazuje da ne može biti ni $\alpha<\beta$, pa je, dakle, $\alpha=\beta$.

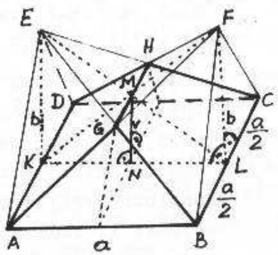
4) Pretpostavimo da se prirodan broj z može prikazati na dva različita načina:
$z=x_1!+y_1!=x_2!+y_2!$, $x_1\leq y_1$, $x_2\leq y_2$, $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$ (*).
Neka je na primjer $x_1<x_2$ (**). Očito je da je tada $x_2\leq y_1$, jer u protivnom iz $x_1\leq y_1<x_2\leq y_2$ slijedi $x_1!+y_1!<x_2!+y_2!$, što je u kontradikciji sa (*). Iz $x_2\leq y_1$ i $x_2\leq y_2$ izlazi da $x_2!|y_1!$ i $x_2!|y_2!$, pa $x_2!|x_2!+y_2!-y_1!$. S druge strane iz (*) je $x_2!+y_2!-y_1!=x_1!$, pa $x_2!/x_1!$, tj. $x_2\leq x_1$, što je u kontradikciji sa (**).
Analogno se pokazuje da ne može biti ni $x_1>x_2$, čime je tvrdnja zadatka dokazana.

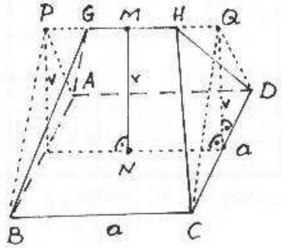
II razred:

1) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}\ /^3 \Rightarrow 2-x=1-3\sqrt{x-1}+3(x-1)-(x-1)\sqrt{x-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x-1}.(x+2)=4(x-1)\ /^2 \Rightarrow (x-1)(x+2)^2=16(x-1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)(x^2-12x+20)=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-10)=0$.
Tražena rješenja su: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$.

2) Zadane jednadžbe se mogu pisati u obliku
$(x^2-y^2)-(x-y)-2z(x-y)=0$
$(y^2-z^2)-(y-z)-2x(y-z)=0$
$(z^2-x^2)-(z-x)-2y(z-x)=0$, odnosno
$(x-y)((y-z)-(z-x)-1)=0$
$(y-z)((z-x)-(x-y)-1)=0$
$(z-x)((x-y)-(y-z)-1)=0$.
Diskusija:
1^o) $x-y=0$ & $y-z=0 \Rightarrow z-x=0 \Rightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$;
2^o) $x-y=0$ & $(z-x)-(x-y)-1=0$ & $(x-y)-(y-z)-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z-x=1$ & $y-z=-1 \Rightarrow (x,y,z)=(0,-1,1)$;
3^o) $y-z=0$ & $(y-z)-(z-x)-1=0$ & $(x-y)-(y-z)-1=0$
$\Rightarrow z-x=-1$ & $x-y=1 \Rightarrow (x,y,z)=(1,0,-1)$;
4^o) $z-x=0$ & $(y-z)-(z-x)-1=0$ & $(z-x)-(x-y)-1=0$
$\Rightarrow y-z=1$ & $x-y=-1 \Rightarrow (x,y,z)=(-1,1,0)$.
Kako je traženih trojki ukupno 4, tvrdnja zadatka je dokazana.

3)




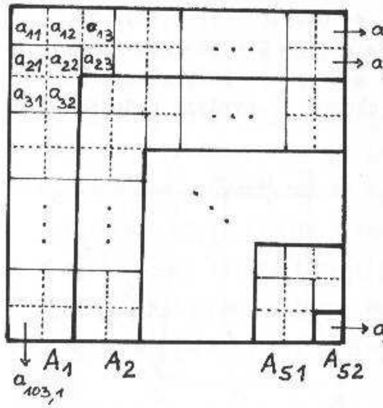
$$\left.\begin{array}{r}\Delta KLE\sim\Delta NLM \Rightarrow a:b=\frac{a}{2}:v \Rightarrow v=\frac{b}{2} \Rightarrow |EM|=\frac{1}{2}|EL| \\ \Delta GHE\sim\Delta BCE\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow |GH|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{a}{2} \Rightarrow |PG|=|HQ|=\frac{a}{4},$$
$$V=V_{BAPCDQ}-2.V_{BAPG}=\frac{av}{2}.a-2.\frac{1}{3}.\frac{av}{2}.\frac{a}{4}=\frac{5}{12}a^2v=\frac{5}{12}a^2.\frac{b}{2}=\frac{5a^2b}{24}.$$

4) $x^4+36\leq 13x^2 \Leftrightarrow x^4-13x^2+36\leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x-2)(x-3)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-3,-2]\cup[2,3]$.
Funkciju f pišemo u obliku $f(x)=(x-1)^2-2$, $T(1,-2)$.
Na intervalu $[-3,-2]$ zadana funkcija opada, dok na intervalu $[2,3]$ raste. Kako je $f(-3)=14$, $f(-2)=7$, $f(2)=-1$ i $f(3)=2$, najveća vrijednost funkcije je 14, a najmanja -1.

III razred:

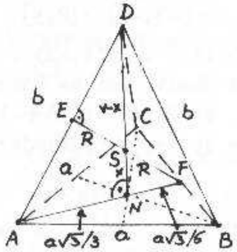
1) Označimo polja tablice sa a_{ij}, $i,j=1,2,\dots,103$, gdje je i broj retka, a j broj stupca. Podijelimo zatim ta polja u klase ovako: $A_1=\{a_{1j},a_{2j},a_{i1},a_{i2} : i,j=1,2,\dots,103\}$, $A_2=\{a_{3j},a_{4j},a_{i3},a_{i4} : i,j=3,4,\dots,103\}$, ..., $A_{51}=$
$=\{a_{101,101},a_{101,102},a_{101,103},a_{102,101},a_{102,102},a_{102,103},$

$a_{103,101}, a_{103,102}\}$, $A_{52}=\{a_{103,103}\}$. Podijelimo zatim klase $A_1, A_2, \dots, A_{51}$ na kvadrate sa po 4 polja, tako da u svakoj klasi ostanu nezastupljena 4 polja $A_k' = \{a_{2k-1,2k-1}, a_{2k-1,2k}, a_{2k-1,2k+1}, a_{2k,2k+1}\}$, $k=1,2,\dots,51$. Kako osim toga, prema pretpostavci, u svakom polju realni broj ima apsolutnu vrijednost najviše 1, tada suma svaka 3 polja



$a_{2k-1,2k}, a_{2k-1,2k+1}, a_{2k,2k+1}$ može po apsolutnoj vrijednosti biti najviše 1 (jer zajedno sa poljem $a_{2k,2k}$ daje sumu nula), pa je suma svaka 4 polja iz A_k' po apsolutnoj vrijednosti najviše 2. U polju $a_{103,103}$ apsolutna vrijednost broja je najviše 1. Zbog toga suma brojeva u svim poljima tablice nije veća od $51.2+1=103$.

2)



Uz oznake kao na slici imamo:

$\Delta AND \sim \Delta SED \Rightarrow a\sqrt{3}/3 : b = R:(v-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = v - Rb\sqrt{3}/a$ (*),

ΔFSN: $x = \sqrt{R^2-(a\sqrt{3}/6)^2}$ (**),

DAN: $v = \sqrt{b^2-(a\sqrt{3}/3)^2}$ (***).

Iz (*), (**) i (***) izlazi:

$$\sqrt{R^2-a^2/12} = \sqrt{b^2-a^2/3} - Rb\sqrt{3}/a \quad /^2$$

$$\Rightarrow 4(3b^2-a^2)R^2 - 8abR\sqrt{3b^2-a^2} + a^2(4b^2-a^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{1,2} = \frac{2a(2b\mp a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

3) $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} \;=\; \cos x : \cos(x+2\varphi) = a:c \Rightarrow$

$\Rightarrow (\cos x + \cos(x+2\varphi)) : \cos(x+2\varphi) = (a+c):c \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\cos x + \cos(x+2\varphi)}{a+c} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\cos x + \cos(x+2\varphi)}{\cos(x+\varphi)} = \frac{a+c}{b} \Rightarrow \frac{2\cos(x+\varphi).\cos\varphi}{\cos(x+\varphi)} = \frac{a+c}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a+c}{b} = 2\cos\varphi$ (*).

Analogno se pokazuje da je i $\frac{b+d}{c} = 2\cos\varphi$ (**),

pa iz (*) i (**) slijedi tvrdnja zadatka.

4) Neka su a,b,c,d četiri proizvoljna realna broja takva da je $a\le b\le c\le d$. Tada postoje 4 kuta $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, $-\pi/2<\alpha\le\beta\le\gamma\le\delta<\pi/2<\pi+\alpha$, takva da je $\mathrm{tg}\,\alpha=a$, $\mathrm{tg}\,\beta=b$, $\mathrm{tg}\,\gamma=c$, $\mathrm{tg}\,\delta=d$. Interval $[\alpha,\pi+\alpha]$ β,γ i δ dijele na 4 dijela od kojih bar jedan nije veći od $\pi/4$. Neka je na primjer $0\le\beta-\alpha\le\pi/4$. Tada je $0\le\mathrm{tg}(\beta-\alpha)\le1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0\le\frac{\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\alpha}\le1 \Rightarrow 0\le\frac{b-a}{1+ba}\le1$, pa za $b=x, a=y$ slijedi tvrdnja zadatka. Analogno se pokazuje i u slučaju $0\le\gamma-\beta\le\pi/4$ i $0\le\delta-\gamma\le\pi/4$. U slučaju $0\le(\pi+\alpha)-\delta\le\pi/4$ je $0\le\mathrm{tg}(\pi+\alpha-\delta)\le1$, tj. $0\le\mathrm{tg}(\alpha-\delta)\le1$, pa se problem svodi na prvi slučaj.

<u>IV razred:</u>

1) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1} =$

$= (\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}) + (\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}) + \dots + (\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}) + \frac{1}{2n+1} =$

$= \frac{2(2n+1)}{(n+1)(3n+1)} + \frac{2(2n+1)}{(n+2).3n} + \dots + \frac{2(2n+1)}{2n(2n+2)} + \frac{1}{2n+1} =$

$\frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2-n^2} + \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2-(n-1)^2} + \dots + \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2-1} + \frac{1}{2n+1} >$

$> \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2} + \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2} + \dots + \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2} + \frac{1}{2n+1} = 1$.

2) Neka je šahist prvi dan odigrao a_1 partija, u prva dva dana a_2 partija, u prva 3 dana a_3 partija, ..., nakon 77 dana (11 nedjelja) neka je ukupno odigrao a_{77} partija. Kako je svaki dan odigrao bar jednu partiju, a nedjeljno

točno 12, tada je $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{77} = 11.12 = 132$, a takodjer i $a_1+21 < a_2+21 < a_3+21 < \ldots < a_{77}+21 = 132+21 = 153$. Pošto je 154 broja, a ni jedan od njih nije veći od 153, tada po Dirichletovom principu izmedju njih mora postojati bar dva jednaka broja i to jedan u grupi $a_1, a_2, \ldots, a_{77}$, a drugi u grupi $a_1+21, a_2+21, \ldots, a_{77}+21$ (zašto ?). Neka je na primjer $a_m = a_n+21$, $m > n$, $m,n \in \{1,2,\ldots,77\}$. Tada je $a_m - a_n = 21$, tj. od $(n+1)$-vog do m-tog dana šahist je odigrao točno 21 partiju, što se i tvrdilo.

3) Vidi rješenje 3. zadatka III razreda.

4) Vidi rješenje 4. zadatka III razreda.

SR SLOVENIJA

DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR SLOVENIJE

REPUBLIČKO NATJECANJE

Zadaci:

I razred:

1) Šesteroznamenkasti broj počinje znamenkom 1. Ako tu znamenku premjestimo na posljednje mjesto, novi broj je tri puta veći od prvoga. Naći taj broj.

2) Pokaži da je $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} < \sqrt{c(ab+1)+1}$, kada su a,b i c realni brojevi koji nisu manji od 1.

3) Pet sportaša sudjelovalo je na stolnoteniskom turniru, svaki je sa svakim igrao po jednu partiju. Prvi igrač je x_1 puta pobijedio i y_1 puta izgubio, drugi x_2 puta pobijedio i y_2 puta izgubio, ..., peti x_5 puta pobijedio i y_5 puta izgubio. Pokaži da vrijedi:
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2.$$

4) U proizvoljnom trokutu ABC točka M je polovište stranice $\overline{AB}$, a P proizvoljna točka izmedju A i M. Paralela sa spojnicom $\overline{PC}$ kroz točku M siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Za omjer (r) izmedju površina trokuta PBD i ABC vrijedi:
a) $1/2 < r < 1$, zavisno o položaju točke P,
b) $r = 1/2$, nezavisno o položaju točke P,
c) $1/2 \le r < 1$, zavisno o položaju točke P,
d) $1/3 < r < 2/3$, zavisno o položaju točke P,
e) $r = 1/3$, nezavisno o položaju točke P.
Obrazloži odgovor.

II razred:

1) Neka su a i b uzastopni prirodni brojevi i c njihov produkt. Ako je $D = a^2+b^2+c^2$, $\sqrt{D}$ je:
a) u svakom slučaju iracionalan broj,
b) u nekim slučajevima iracionalan, a u drugim racionalan broj,

c) uvijek neparan broj,
d) uvijek prirodan broj, čas neparan, a čas paran,
e) uvijek paran broj.
Obrazložite odgovor.

2) Riješiti jednadžbu:
$\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = \log_3 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_5 x + \log_5 x \cdot \log_3 x$.

3) Dan je krug sa središtem S i polumjerom r. U unutrašnjosti kruga leži točka M.
   a) Gdje sve leži točka M ako hoćemo krugu upisati kvadrat, koji ima točku M na jednoj od stranica.
   b) Točka M je postavljena tako da se da upisati kvadrat, koji ima točku M na jednoj od stranica. Nacrtaj taj kvadrat.

4) Trokutu ABC upisana kružnica ima središte u točki S, a opisana u točki T. Produžetak dužine $\overline{AS}$ siječe opisanu kružnicu u točki D. Koji odgovor je pravilan?
a) $|CD|=|BD|=|TD|$, b) $|AS|=|CS|=|BD|$, c) $|CD|=|CS|=|BD|$,
d) $|CD|=|SD|=|BD|$, e) $|TB|=|TC|=|SD|$?
Odgovor obrazložiti.

III razred:

1) Pokaži: između 4 proizvoljna realna broja lako odaberemo dva (označimo ih na primjer sa x i y) da vrijedi:
$0 \leq \frac{y-x}{1+xy} \leq 1$.

2) Dana je jednadžba $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} = a$. Odredi pri kakvim realnim brojevima a jednadžba ima rješenja i riješi je.

3) Stranicu $\overline{BC}$ pravilnog peterokuta produžimo do točke F, tako da je C između B i F i da je $|CF| = d$. Spojnica $\overline{AF}$ siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki G. Izrazi duljinu $|CG|$ pomoću duljine stranice peterokuta a i duljine d.

4) Točkom T koja leži u unutrašnjosti trokuta ABC, položimo pravac p, tako da siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ i da ne prolazi ni jednim vrhom trokuta. Neka su h_a, h_b i h_c udaljenosti točaka A, B i C od pravca p. Dokaži da vrijedi: $h_a \cdot S_{BCT} = h_b \cdot S_{ATC} + h_c \cdot S_{ABT}$ (pri tome su $S_{BCT}, S_{ATC}, S_{ABT}$ redom površine trokuta BCT, ATC, ABT).

IV razred:

1) Dana je kvadratna parabola $y = x^2$ i točka T(2,0). Naći krivulju na kojoj leže tjemena kvadratnih parabola, koje prolaze točkom T i dodiruju danu parabolu.

2) U kakvom su omjeru stranice pravokutnog trokuta, ako sinusi unutarnjih kuteva čine aritmetički niz?

3) Neka je n proizvoljan prirodan broj i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi veći od 1/2. Dokaži da vrijedi:
$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n} \geq \sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n+n-1}$.

4) U državi oblika kvadrata sa stranicom 2 km vladao je kralj, koji se nekog dana pet minuta prije dvanaest odlučio da bi u sedam navečer priredio prijem za sve stanovnike svoje kraljevine. Točno u podne je poslao kurira da prenese vijest ljudima. Svatko, tko je obaviješten, odlučio je da pomogne kuriru u obavještavanju sudržavljana. Nesretni kurir je bio naviknut na iznenadne odluke svoga gospodara, zato je znao organizirati prenošenje poruke, tako da su svi stanovnici pravovremeno došli na prijem. I još je znao i to da svi (pa i on sam) prelaze 3 km na sat. Da li bi i ti znao organizirati obavještavanje tako da ljudi ne zakasne.

Rješenja:

I razred:

1) Neka je x peteroznamenkasti broj sastavljen redom od druge do šeste znamenke traženog broja. Tada je traženi broj $\overline{1x} = 10^5 + x$, a $\overline{x1} = 10x + 1$ novi broj, koji od prethodnog nastaje premještanjem prve znamenke 1 na posljednje mjesto. Prema uvjetu zadatka je tada $10x + 1 = 3.(10^5 + x)$, odakle je $x = 42857$, pa je traženi broj 142 857.

2) Supstitucijom: $a-1=x^2$, $b-1=y^2$, $c-1=z^2$, $x,y,z \in R^+$, tj. $a=x^2+1$, $b=y^2+1$, $c=z^2+1$, $x,y,z \in R^+$, iz zadane nejednakosti dobivamo:
$x+y+z < \sqrt{(z^2+1)((x^2+1)(y^2+1)+1)+1} \quad /^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx < x^2y^2z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2+y^2+2z^2+2$

$\Rightarrow 0 < (xyz)^2+(xy-1)^2+(yz-1)^2+(zx-1)^2+z^2$, što uvijek vrijedi.

3) Kako je svaki sportist odigrao 4 partije, mora biti

$x_1+y_1=x_2+y_2=\dots=x_5+y_5=4 \quad (*)$.

S druge strane ukupan broj pobjeda mora biti jednak ukupnom broju poraza, pa izlazi

$x_1+x_2+\dots+x_5=y_1+y_2+\dots+y_5 \quad (**)$.

Sada imamo

$x_1^2+x_2^2+\dots+x_5^2=y_1^2+y_2^2+\dots+y_5^2 \Leftrightarrow$

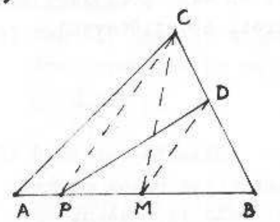
$\Leftrightarrow (x_1^2-y_1^2)+(x_2^2-y_2^2)+\dots+(x_5^2-y_5^2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1-y_1)(x_1+y_1)+(x_2-y_2)(x_2+y_2)+\dots+(x_5-y_5)(x_5+y_5)=0$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} 4(x_1-y_1+x_2-y_2+\dots+x_5-y_5)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1+x_2+\dots+x_5=y_1+y_2+\dots+y_5$, što prema $(**)$ uvijek vrijedi.

4)



Zbog $MD \parallel PC$ je $P_{\Delta MDC}=P_{\Delta MDP}$ (imaju istu bazu MD i jednake visine). Nadalje je $P_{\Delta MBC}=\frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$ (baze im se odnose kao 1:2, a visine su im jednake). Zbog toga je $P_{\Delta PBD}=$ $=P_{\Delta PMD}+P_{\Delta MBD}=P_{\Delta MDC}+P_{\Delta MBD}=$ $=\frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$.

Dakle, $r=P_{\Delta PBD}:P_{\Delta ABC}=1:2$, pa je ispravan odgovor (b).

<u>II razred:</u>

1) Prema uvjetima zadatka je $b=a+1$, $c=a(a+1)$, pa je

$D=a^2+b^2+c^2=a^2+(a+1)^2+a^2(a+1)^2=$

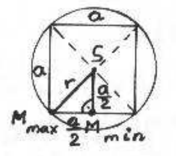
$=(a(a+1))^2+2a(a+1)+1=(a(a+1)+1)^2$, a odatle je $\sqrt{D}=a(a+1)+1$. Kako je produkt $a(a+1)$ dva uzastopna

prirodna broja $a, a+1$ uvijek paran broj, tada je $\sqrt{D}=$ $=a(a+1)+1$ uvijek neparan broj, pa je ispravna tvrdnja (c).

2) Podijelimo li zadanu jednadžbu sa $\log_3 x . \log_4 x . \log_5 x$, dobivamo $1=\frac{1}{\log_5 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}$, odnosno

$1=\log_x 5+\log_x 3+\log_x 4$, tj. $1=\log_x 60$. Dakle je $x_1=60$. Drugo rješenje $x_2=1$ dobivamo neposredno iz polazne jednadžbe.

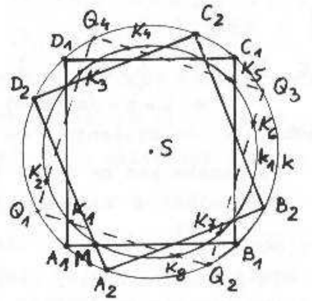
3) a)



$\frac{a}{2} \le |MS| \le r \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r\sqrt{2}}{2} \le |MS| \le r \quad (*)$.

b)



Neka je dan krug $k(S,r)$ i u njegovoj nutrini točka M koja zadovoljava $(*)$. U krug k upišimo proizvoljan kvadrat Q. Zatim nacrtamo kružnicu $k_1(S_1, |SM|)$ i nađjemo točke presjeka $K=$ $=k_1 \cap Q$. Potom zarotiramo kvadrat Q oko središta S za kut $\sphericalangle KSM$. Dobiveni kvadrat će sadržavati točku M i predstavljat će rješenje zadatka.

Za $\frac{r\sqrt{2}}{2} < |MS| < r$ postoje dva rješenja, za $|MS|=\frac{r\sqrt{2}}{2}$ ili $|MS|=r$ jedno rješenje, dok za $|MS|<\frac{r\sqrt{2}}{2}$ prema $(*)$ zadatak ne bi imao rješenja.

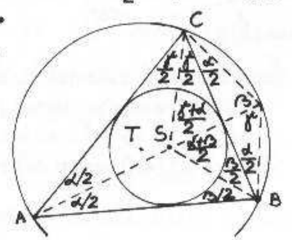
4) Korištenjem činjenice da su kutevi nad istim kružnim lukom jednaki, izlazi:

$\sphericalangle DCB=\sphericalangle DAB=\alpha/2$ ($\widehat{DB}$),

$\sphericalangle DBC=\sphericalangle DAC=\alpha/2$ ($\widehat{CD}$),

$\sphericalangle ADC=\sphericalangle ABC=\beta$ ($\widehat{CA}$),

$\sphericalangle BDA=\sphericalangle BCA=\gamma$ ($\widehat{AB}$).



Iz jednakokračnosti trokuta CSD ($\sphericalangle CSD = 180^\circ - (\beta + \frac{\gamma+\alpha}{2}) = (\alpha+\beta+\gamma) - (\beta + \frac{\gamma+\alpha}{2}) = \frac{\gamma+\alpha}{2} = \sphericalangle DCS$) slijedi da je $|CD| = |SD|$, a iz jednakokračnosti trokuta CBD ($\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBD = \frac{\alpha}{2}$) izlazi da je $|CD| = |BD|$, pa vrijedi odgovor (d).

<u>III razred</u>:

1) Vidi SR Makedoniju - III razred - 4. zadatak.

2) Supstitucijom $t = x + \frac{1}{4}$, tj. $x = t - \frac{1}{4}$ (*), iz zadane jednadžbe dobivamo:

$$t - \frac{1}{4} + \sqrt{t + \frac{1}{4} + \sqrt{t}} = a \Rightarrow t - \frac{1}{4} + \sqrt{(\sqrt{t} + \frac{1}{2})^2} = a \Rightarrow$$

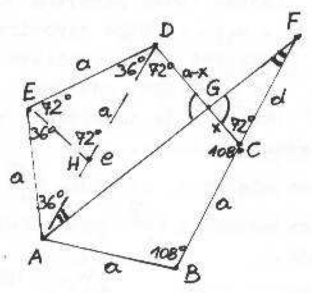
$$t - \frac{1}{4} + |\sqrt{t} + \frac{1}{2}| = a \Rightarrow t + \sqrt{t} + \frac{1}{4} = a \Rightarrow (\sqrt{t} + \frac{1}{2})^2 = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{t} + \frac{1}{2} - \sqrt{a})(\sqrt{t} + \frac{1}{2} + \sqrt{a}) = 0 \,/ : (\sqrt{t} + \frac{1}{2} + \sqrt{a}) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t} = \sqrt{a} - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a \geq \frac{1}{4} \quad (**) \\ t = (\sqrt{a} - \frac{1}{2})^2 \overset{(*)}{\Rightarrow} x + \frac{1}{4} = a - \sqrt{a} + \frac{1}{4} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow x = a - \sqrt{a} \quad (***) . \end{cases}$$

Dakle, pri $a \geq \frac{1}{4}$ zadana jednadžba ima rješenje $x = a - \sqrt{a}$.

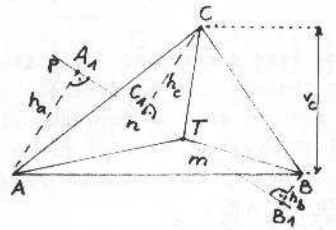
3)



Uz oznake kao na slici imamo: $\Delta CFG \sim \Delta DAG \Rightarrow x : d = (a-x) : e \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{ad}{e+d}$ (*).

Iz jednakokračnosti trokuta ADE slijedi da je $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ADE = 36^\circ$ (jer je $\sphericalangle AED = 108^\circ$). Neka je $|DH| = a$. Tada je trokut EHD jednakokračan, pa je $\sphericalangle DEH = \sphericalangle EHD = 72^\circ$ (jer je $\sphericalangle EDH = 36^\circ$). Zbog toga je $\sphericalangle AEH = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$, pa iz jednakokračnosti trokuta EAD ($\sphericalangle HEA = \sphericalangle EAH = 36^\circ$) slijedi da je $|EH| = |AH| = e - a$. Nadalje imamo: $\Delta ADE \sim \Delta EAH \Rightarrow e : a = a : (e - a) \Rightarrow e^2 - ae - a^2 = 0 \Rightarrow e = a(1 + \sqrt{5})/2 > 0$ (**).
Iz (*) i (**) sada dobivamo $x = \dfrac{2ad}{(1+\sqrt{5})a + 2d}$.

4)



Uz oznake kao na slici imamo:

$S_{ABT} = S_{AMT} + S_{MBT} = mh_a/2 + mh_b/2 = m(h_a + h_b)/2$ (1),

$S_{CAT} = S_{CNT} + S_{NAT} = n(h_c + h_a)/2$ (2),

$S_{BCT} = S_{ABC} - S_{ABT} - S_{CAT}$ (3),

$S_{ABC} = S_{AMC} + S_{MBC}$ (4),

$$h_a S_{BCT} = h_b S_{CAT} + h_c S_{ABT} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} h_a(S_{ABC} - S_{ABT} - S_{CAT}) = h_b S_{CAT} + h_c S_{ABT} \Leftrightarrow h_a S_{ABC} = (h_a + h_b) S_{CAT} + (h_c + h_a) S_{ABT} \Leftrightarrow$$

$$\overset{(2),(1)}{\Leftrightarrow} h_a S_{ABC} = n(h_a + h_b)(h_c + h_a)/2 + m(h_a + h_b)(h_c + h_a)/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_a S_{ABC} = (m+n)(h_a + h_b)(h_c + h_a)/2 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} h_a(S_{AMC} + S_{MBC}) = (h_a + h_b)((m+n)h_a/2 + (m+n)h_c/2) \Leftrightarrow h_a(S_{AMC} + S_{MBC}) =$$

$$= (h_a + h_b)(S_{MNA} + S_{NMC}) \Leftrightarrow h_a(S_{AMC} + S_{MBC}) = (h_a + h_b) S_{AMC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_a S_{MBC} = h_b S_{AMC} \Leftrightarrow h_a \cdot |MB| \cdot v_c/2 = h_b \cdot |AM| \cdot v_c/2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow h_a \cdot |MB| = h_b \cdot |AM| \Leftrightarrow h_a : |AM| = h_b : |MB|$, što uvijek vrijedi zbog sličnosti trokuta AMA_1 i BMB_1.

<u>IV razred</u>:

1) Neka je $y = ax^2 + bx + c$ proizvoljna parabola koja zadovoljava uvjete zadatka. Kako ona prolazi točkom $T(2,0)$, tada vrijedi $4a + 2b + c = 0$, tj. $c/a = -2b/a - 4$ (1). Kako se parabola $y = ax^2 + bx + c$ i zadana parabola $y = x^2$ dodiruju, mora biti $ax^2 + bx + c = x^2$, tj. $(a-1)x^2 + bx + c = 0$ i mora diskriminanta $D = B^2 - 4AC$ posljednje jednadžbe biti nula: $b^2 - 4(a-1)c = 0$, tj. $b^2 = 4c(a-1)$ (2). Pošto za tjeme parabole $y = ax^2 + bx + c$ vrijedi: $X = -\frac{b}{2a}$ (3), $Y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (4), tada izlazi: $Y \overset{(4)}{=} -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \overset{(2)}{=}$

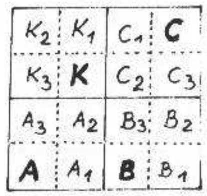
$$\overset{(2)}{=} -\frac{4c(a-1) - 4ac}{4a} = \frac{c}{a} \overset{(1)}{=} -2 \cdot \frac{b}{a} - 4 = 4 \cdot (-\frac{b}{2a}) - 4 \overset{(3)}{=}$$

$\overset{(3)}{=} 4X - 4$, tj. $Y = 4X - 4$ je traženo geometrijsko mjesto tjemena parabola koje dodiruju parabolu $y = x^2$ i prolaze točkom $T(2,0)$.

2) Primjenom sinusovog teorema lako pokazujemo (pokažite to!) da stranice bilo kog trokuta čine aritmetički niz kada unutarnji kutevi tog trokuta čine aritmetički niz. Neka su $a < b < c$ stranice i $\alpha < \beta < \gamma = 90^\circ$ kutevi pravokutnog trokuta. Prema prethodnom iz $2\sin\beta = \sin\alpha + \sin\gamma$ slijedi $2b = a + c$, tj. $a = 2b - c$ $(*)$.
Prema Pitagorinom teoremu je $a^2 + b^2 = c^2$, pa na osnovu $(*)$ slijedi: $(2b - c)^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 5b^2 - 4bc = 0 \;/: b \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b = \frac{4}{5}c$ $(**)$.
Iz $(*)$ i $(**)$ dobivamo $a = \frac{3}{5}c$, pa imamo $a : b : c =$
$= \frac{3}{5}c : \frac{4}{5}c : c$, tj. $a : b : c = 3 : 4 : 5$.

3) Dokaz provodimo matematičkom indukcijom:
   a) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1 + 1 - 1}$.
   Za $n = 2$ tvrdnja $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > \sqrt{x_1 + x_2 + 1}$ $(*)$ takodjer vrijedi jer je $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > \sqrt{x_1 + x_2 + 1} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} > x_1 + x_2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 x_2} > 1/2 \Leftrightarrow x_1 x_2 > 1/4$, što zbog $x_1 > 1/2$ i $x_2 > 1/2$ uvijek vrijedi.
   b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da je
   $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_k} \geqslant \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + k - 1}$.
   c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da je
   $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_{k+1}} \geqslant \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} + k}$.
   Dokaz:
   $$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k+1}} \overset{(b)}{\geqslant} \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + k - 1} + \sqrt{x_{k+1}} \overset{(*)}{>} \sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + k - 1) + x_{k+1} + 1} =$$
   $$= \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} + k}.$$

4) Podijelimo kraljevstvo (kvadrat sa stranicom 2 km) na 4 kvadrata sa stranicom 1 km. U jednom od kvadrata je kurir K, a u preostala 3 kvadrata uočimo po jednog stanovnika



A, B i C. Medjusobna udaljenost K, A, B, C je najviše $2\sqrt{2}$, pa, pošto je brzina kretanja 3 km/h, tada se ta udaljenost može prijeći za najviše $2\sqrt{2}/3$ sata.
Kurir K će prvo doći do A, zadužiti A da obavijesti B i vrati se nazad, a istovremeno sam odmah krenuti od B prema C i vratiti se na polazno mjesto (K). Pri tome će A doći do B i nazad i istovremeno K doći od B do C i vratiti se na polazno mjesto za najviše $2 \cdot 2\sqrt{2}/3$ sata, tj. od samog početka će najviše proteći $3 \cdot 2\sqrt{2}/3 = 2\sqrt{2} < 3$ sata.
Sada u svakom od 4 kvadrata stranice 1 km ulogu kurira preuzima K, A, B, odnosno C. Razdijelimo li svaki od tih kvadrata na 4 manja kvadrata stranice 1/2 km, problem se svodi na prethodni slučaj, stim što će u svakom od kvadrata K, A, B, C biti obaviještena 3 nova stanovnika za upola kraće vrijeme (manje od 3/2 sata), jer je stranica kvadrata upola manja.
Ovaj postupak nastavimo dalje (ukupno n puta) sve dok ne budu obaviješteni svi stanovnici. To će biti učinjeno za manje od $3 + 3/2 + 3/2^2 + 3/2^3 + \ldots + 3/2^{n-1} = 3 \cdot \dfrac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} =$
$= 6 \cdot (1 - 1/2^n) < 6$ sati.
Pošto je svakom stanovniku potrebno najviše $2\sqrt{2}/3 < 1$ sat da od kuće stigne na prijem, tada će od samog početka (kada je krenuo kurir K) do momenta kada svi stignu na prijem proći manje od $6 + 1 = 7$ sati, pa će kurir obaviti svoj zadatak.

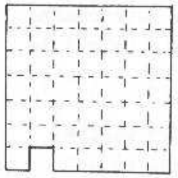
SR SRBIJA

DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE

REPUBLIČKO NATJECANJE

Z a d a c i :

I razred:

1) 

Iz kvadrata dimenzija 7×7 isječen je jedan kvadratić, kao na slici. Dokazati da se dobivena figura ne može podijeliti na osam sukladnih dijelova, tako da je svaki od tih dijelova unija šest kvadratića 1×1.

2) Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, dokazati da je :

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 .$$

3) Neka su L i M redom točke u kojima simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta sa vrhom C trokuta ABC sijeku pravac AB. Ako je $|CL| = |CM|$, dokazati da je $|AC|^2 + |BC|^2 = 4r^2$, gdje je r duljina polumjera kružnice opisane oko trokuta ABC.

4) U ravnini je dan konveksan četverokut ABCD. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sa unutarnje strane i nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ sa vanjske strane (u odnosu na četverokut ABCD) konstruirani su redom jednakostranični trokuti ABQ, CDN, BCM i ADP. Dokazati da je četverokut MQPN paralelogram.

5) Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi:

$$\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{10},$$ gdje je $[x]$ najveći cijeli broj ne veći od x, $\{x\} = x - [x]$, $(x) = [x + \frac{1}{2}]$.

II razred:

1) Dan je kvadratni trinom $f(x) = ax^2 + bx + c$, takav da za $-1 \leq x \leq 1$ vrijedi $|f(x)| \leq 1$.

a) Dokazati da je $|a| \leq 2$.

b) Odrediti bar jedan trinom $f(x) = ax^2 + bx + c$, takav da

vrijedi $|a| = 2$ i $|f(x)| \leq 1$ za $-1 \leq x \leq 1$.

2) Ako su α, β, γ kutevi trokuta, dokazati da je:

$$\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\alpha}} + \frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\beta}} + \frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} - \sqrt{\sin\gamma}} \geq 3 .$$

3) Kružnica k_1 dodiruje kružnicu k iznutra u točki C. Neka je M proizvoljna točka kružnice k_1, različita od C. Tangenta kružnice k_1 u točki M siječe kružnicu k u točkama A i B. Dokazati da je $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB$.

4) Isto kao 5. zadatak u I razredu.

5) Neka je ABCD pravokutni tetraedar, kod koga su svi bočni kutevi kod vrha C pravi i neka je M točka koja pripada strani ABC i jednako je udaljena od bridova $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CD}$, a N točka koja pripada strani BCD i jednako je udaljena od bridova $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Ako je $|AC| = a$, $|BC| = b$, izračunajte duljinu dužine $\overline{MN}$.

III razred - A kategorija i IV razred:

1) U ravnini je dano $n \geq 5$ kružnica. Svake 3 od njih imaju zajedničku točku. Dokazati da tih n kružnica imaju zajedničku točku.

2) Unutar kvadrata stranice 1 nalazi se jednostavna poligonalna linija duljine 1000. Dokazati da postoji pravac koji siječe ovu liniju bar u 500 točaka.

3) Neka je (F_n) Fibonačijev niz: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ za $n \geq 1$. Označimo sa f_n posljednju znamenku u dekadskom zapisu broja F_n. Da li postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}$?

4) Dokazati da za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijedi :

$$\min_{1 \leq j \leq n} a_j \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n+1}\right)^{n+1}.$$ Kada vrijedi jednakost ?

5) Dani su prirodni brojevi m, n i k. Koliko ima k - kombinacija X elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, takvih da za različite elemente x i y skupa X vrijedi $|x - y| > m$?

III razred - B kategorija:

1) Isto kao 1. zadatak u III razredu - A kategorije i IV razredu.
2) Isto kao 2. zadatak u III razredu - A kategorije i IV razredu.
3) Ako je n prirodan broj i x nije cjelobrojan produkt broja π, onda je:

$$\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\ldots+\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}=\frac{\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg}x}{2\sin x}.$$

4) Dana je funkcija $f:R\rightarrow R$, takva da za svako $x\in R$ vrijedi: $f(x+1)=\frac{f(x)-5}{f(x)-3}$. Dokazati da je f periodična funkcija.
5) Na koliko se načina može tablica $m\times n$ popuniti brojevima 1 i -1, tako da produkt brojeva u svakom retku i u svakom stupcu bude -1?

R j e š e n j a :

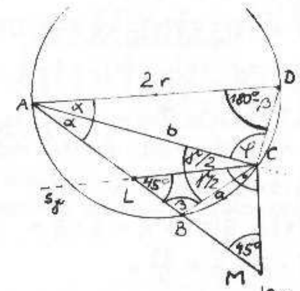
I razred:

1) Obojimo polja figure kao polja šahovske ploče. Tada je 25 polja obojeno jednom (na primjer crnom), a 23 polja drugom (na primjer bijelom) bojom.
Pretpostavimo (suprotno tvrdnji zadatka) da se zadana figura može rastaviti na 8 sukladnih dijelova, takvih da svaki sadržava 6 kvadratića dimenzija 1×1 (6 polja). Da bi 2 dijela uopće bila sukladna, nužno je (ali ne i dovoljno) da se ti dijelovi podudaraju u broju crnih, odnosno broju bijelih polja, ili pak da su im ti brojevi zamijenjeni. Neka je x broj dijelova figure, koji imaju y crnih polja. Tada $8-x$ dijelova imaju po $6-y$ crnih polja. Zato slijedi
$xy+(8-x)(6-y)=25$, tj. $2xy+48-6x-8y=25$,
što je nemoguće, jer je lijeva strana parna, a desna neparna.

2) Kako su a,b,c stranice trokuta, tada je $b+c-a>0$, $c+a-b>0$, $a+b-c>0$. Supstitucijom:
$x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$ $(*)$, odakle je:
$a=\frac{y+z}{2}$, $b=\frac{z+x}{2}$, $c=\frac{x+y}{2}$ $(**)$, dobivamo:

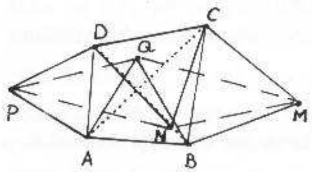
$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}$$
(zbog odnosa aritmetičke i geometrijske sredine: $\frac{1}{2}(p+q)\geq\sqrt{pq}$) $=1+1+1=3$, što se i tvrdilo.
Jednakost vrijedi za $x=y=z$, tj. za $a=b=c$.

3)



Neka su ispunjeni uvjeti zadatka. Tada, uz oznake kao na slici, izlazi:
$s_\gamma\perp s_{\gamma'}$ (dokažite to!) $\Rightarrow$ ΔLMC je pravokutan jednakokračan trokut (jer je po pretpostavci $|CL|=|CM|$) $\Rightarrow$ $\sphericalangle MLC=45^\circ$ $\Rightarrow$ $\alpha+\frac{\gamma}{2}=45^\circ$ ($\sphericalangle MLC=45^\circ$ je vanjski kut trokuta ΔLCA) i $\beta+\frac{\gamma}{2}=135^\circ$ (ΔLBC) $\Rightarrow$ $\beta-\alpha=90^\circ$ $(*)$.
Neka je $|CD|=|BC|=a$. Tada je $\sphericalangle CAD=\sphericalangle BAC=\alpha$ (obodni kutevi nad jednakim kružnim lukovima iste kružnice), pa, zbog $\sphericalangle ADC=180^\circ-\beta$ (ABCD je tetivni četverokut), iz ΔACD slijedi: $\varphi=\sphericalangle ACD=\beta-\alpha\overset{(*)}{=}90^\circ$ $(**)$.
Iz $(**)$ $\Rightarrow$ $|AD|=2r$ (promjer kružnice) $\Rightarrow$ $|AC|^2+|BC|^2=|AC|^2+|CD|^2$ (zbog $|BC|=|CD|$) $=|AD|^2$ (po Pitagorinom teoremu) $=(2r)^2=4r^2$ $\Rightarrow$ $|AC|^2+|BC|^2=4r^2$ $(***)$.

4)



Rotacijom $r(B,60^\circ)$ trokut BMQ se preslikava u trokut BCA (obrazložite to!), pa je $\Delta BMQ\cong\Delta BCA$, zbog čega je $|QM|=|AC|$ $(*)$.
Rotacijom $r(D,60^\circ)$ trokut DPN se preslika u trokut DAC, pa

je DPN ≅ DAC, zbog čega je $|PN|=|AC|$ (∗∗).
Iz (∗) i (∗∗) ⇒ $|QM|=|PN|$.
Analogno se pokazuje da je i $|PQ|=|NM|$, pa je MQPN paralelogram.

5) $x=[x]+\{x\}$, $(x)=\begin{cases}[x], & \text{za } \{x\}\in[0,1/2),\\ [x]+1, & \text{za } \{x\}\in[1/2,1),\end{cases}$

$$\{x\}=\frac{x+[x]+(x)}{10} \Leftrightarrow 10\{x\}=[x]+\{x\}+[x]+(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9\{x\}-2[x]-(x)=0 \quad (*).$$

1°) $\{x\}\in[0,1/2)$ (∗∗) $\Rightarrow (x)=[x] \overset{(*)}{\Rightarrow} 9\{x\}-2[x]-[x]=0$
$\Rightarrow 3\{x\}=[x] \overset{(**)}{\Rightarrow} [x]=3\{x\}\in[0,3/2) \Rightarrow$
$\Rightarrow [x]_1=0\in[0,3/2)$ & $[x]_2=1\in[0,3/2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x\}_1=\frac{1}{3}[x]_1=0\in[0,1/2)$ & $\{x\}_2=\frac{1}{3}[x]_2=\frac{1}{3}\in[0,1/2) \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=[x]_1+\{x\}_1=0+0=0$ & $x_2=[x]_2+\{x\}_2=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

2°) $\{x\}\in[1/2,1)$ (∗∗∗) $\Rightarrow (x)=[x]+1 \overset{(*)}{\Rightarrow}$
$\overset{(*)}{\Rightarrow} 9\{x\}-2[x]-[x]-1=0 \Rightarrow 9\{x\}-3[x]-1=0 \overset{(***)}{\Rightarrow}$
$\overset{(***)}{\Rightarrow} [x]=3\{x\}-\frac{1}{3}\in[\frac{3}{2}-\frac{1}{3},3-\frac{1}{3})=[\frac{7}{6},\frac{8}{3}) \Rightarrow$
$\Rightarrow [x]=2\in[7/6,8/3) \Rightarrow \{x\}=\frac{1}{3}[x]+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=$
$=\frac{7}{9}\in[1/2,1) \Rightarrow x=[x]+\{x\}=2+\frac{7}{9}=\frac{25}{9}$.

Rješenja zadatka su, dakle: $x_1=0$, $x_2=\frac{4}{3}$, $x_3=\frac{25}{9}$.

<u>II razred</u>:

1) a) $f(x)=ax^2+bx+c$, $x\in\mathbb{R}$ (∗),
$|f(x)|\le 1$, $x\in[-1,1]$ (∗∗),

$$(*) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(1)=a+b+c\\ f(-1)=a-b+c\\ f(0)=c \end{array}\right\} \overset{(**)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{r} |a+b+c|\le 1\\ |a-b+c|\le 1\\ |c|\le 1 \end{array}\right. \quad (***),$$

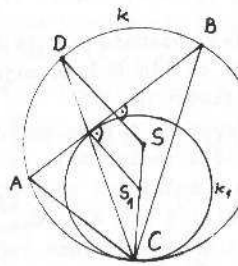
$|a|=|\frac{1}{2}((a+b+c)+(a-b+c)-2c| \overset{(***)}{\le}$
$\overset{(***)}{\le} \frac{1}{2}(1+1+2.1)=2$, tj. $|a|\le 2$, što se i tvrdilo.

b) $f(x)=2x^2-1$.

2) Neka su a,b,c stranice, a α,β,γ odgovarajući kutevi trokuta i neka je R polumjer tom trokutu opisane kružnice.

Tada izlazi:
$a<b+c \Rightarrow (\sqrt{a})^2<(\sqrt{b+c})^2<(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}+\sqrt{c} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}>0 \Rightarrow \sqrt{2R\sin\beta}+\sqrt{2R\sin\gamma}-\sqrt{2R\sin\alpha}>0$ (po sinusovom teoremu) $\Rightarrow x=\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha}>0$ (1).
Analogno izlazi $y=\sqrt{\sin\gamma}+\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin\beta}>0$ (2) i
$z=\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma}>0$ (3).
Iz (1), (2) i (3) izlazi
$\sqrt{\sin\alpha}=\frac{y+z}{2}$, $\sqrt{\sin\beta}=\frac{z+x}{2}$, $\sqrt{\sin\gamma}=\frac{x+y}{2}$ (4), pa imamo:

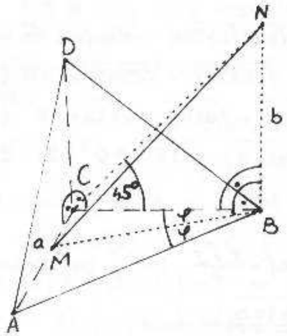
$$\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\gamma}+\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin\beta}}+$$
$$+\frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma}} \overset{(4)}{=} \frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\le\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}$$
(odnos aritmetičke i geometrijske sredine) $=1+1+1=3$, čime je tvrdnja zadatka dokazana.
Jednakost vrijedi akko je $x=y=z$, tj. $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$, odnosno $\alpha=\beta=\gamma$ (jednakostraničan trokut).

3)


Neka vrijede uvjeti zadatka i neka su S,S_1 središta kružnica k,k_1, a D druga točka presjeka pravca CM sa kružnicom k.
Iz jednakostraničnosti trokuta DCS i MCS_1 i kolinearnosti točaka D,M,C i C,S_1,S izlazi:
$\sphericalangle SDC=\sphericalangle DCS=\sphericalangle MCS_1=\sphericalangle S_1MC$, tj.
$\sphericalangle SDC=\sphericalangle S_1MC$, pa je $DS \parallel MS_1$, tj.
$DS\perp AB$ (jer je $MS_1\perp AB$).
Kako je DS polumjer kružnice k, tada je $\widehat{DA}=\widehat{BD}$ (obrazložite to!), pa je $\sphericalangle ACD=\sphericalangle DCB$ (obodni kutevi nad jednakim kružnim lukovima iste kružnice k), tj. $\sphericalangle ACM=\sphericalangle MCB$.

4) Vidi rješenje 5. zadatka I razreda.

5) Prema uvjetima zadatka mora biti točka M sjecište simetrale kuta $\sphericalangle ABC$ i brida $\overline{AC}$, a točka N sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BCD$ i okomice povučene iz B okomito na $\overline{BC}$ (obrazlo-



žite te tvrdnje !).
Nadalje imamo:

ΔABC: $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$ (Pitagorin teorem),

$|AM| : |MC| = |AB| : |BC| = \sqrt{a^2+b^2} : b$ (simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru susjednih dviju) $\Rightarrow (a-|MC|) : |MC| = \sqrt{a^2+b^2} : b \Rightarrow$

$\Rightarrow |MC| = ab/(b+\sqrt{a^2+b^2})$,

ΔMBC: $|MB|^2 = |MC|^2 + |BC|^2 = (ab/(b+\sqrt{a^2+b^2}))^2 + b^2$,

ΔNMB: $|MN| = |MB|^2 + |BN|^2 = \sqrt{\left(\frac{ab}{b+\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + 2b^2}$.

<u>III razred - A kategorija i IV razred:</u>

1) Ako medju zadanim kružnicama postoje dvije kružnice koje se dodiruju, tada svaka od preostalih $n-2$ kružnica prolazi tom dodirnom točkom (zašto ?).
Takodjer, ako medju zadanim kružnicama postoje 3 koje imaju 2 zajedničke točke, tada je jedna od tih točaka zajednička i za preostalih $n-3$ kružnica (zašto ?).
Neka se sada nikoje 2 kružnice ne dodiruju i neka ne postoje 3 kružnice koje imaju 2 zajedničke točke. Neka se nadalje 3 kružnice, k_1, k_2 i k_3, sijeku u točki A i neka su B,C,D druge presječne točke kružnica k_1 i k_2, k_1 i k_3, k_2 i k_3. Tada svaka od preostalih $n-3$ kružnica prolazi točkom A. Pretpostavimo (suprotno tvrdnji) da postoji kružnica k_4 koja ne prolazi točkom A. Tada ona mora prolaziti točkama B,C i D (zašto ?). Uočimo sada novu kružnicu k_5, koja od točaka A,B,C i D sadrži najviše dvije (jer je kružnica odredjena sa 3 točke, pa bi se u protivnom podudarala sa jednom od kružnica k_1,k_2,k_3,k_4). No tada izmedju kružnica k_1,k_2,k_3 i k_4 postoje bar dvije, koje sa kružnicom

k_5 nemaju zajedničku točku (provjerite to !), čime dolazimo do kontradikcije (napravite skicu).
Stim je tvrdnja zadatka dokazana.

2) Neka je ABCD zadani jedinični kvadrat i d_i, a_i, b_i $(i=1,2,\dots,n)$ redom duljine stranica i duljine ortogonalnih projekcija tih stranica zadane poligonalne linije na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ kvadrata ABCD. Kako je $d_i \leq a_i + b_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ (nejednakost trokuta), tada je
$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) \geq \sum_{i=1}^{n} d_i = 1000, \text{ pa je } \sum_{i=1}^{n} a_i \geq 500$$
ili $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq 500$. Neka je na primjer $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 500$. Kako je $|AB| = 1$, tada postoji zajednička točka $T' \in \overline{AB}$ ortogonalnih projekcija od najmanje 500 stranica poligonalne linije na stranicu $\overline{AB}$ kvadrata ABCD (zašto ?), što znači da je T' projekcija od najmanje 500 točaka T te poligonalne linije. Normala na $\overline{AB}$ točkom T' siječe poligonalnu liniju u najmanje 500 točaka.

3) (F_n): 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...
(f_n): 1,1,2,3,5,8, 3, 1, 4, 5, 9, 4,...
Lako se provjerava da je $f_{60+k} = f_k$, $k \in N$, tj. da je 60 period niza $(f_n)_{n \in N}$.
Neka je $n = 60q_n + r_n$, $n \in N$, $q_n, r_n \in N_0$, $0 \leq r_n < 60$. Tada je
$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = 0$ (zbog $r_n < 60$) i $\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-r_n}{60n} =$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{60}\left(1-\frac{r_n}{n}\right) = \frac{1}{60}, \text{ pa je } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(q_n \cdot \sum_{i=1}^{60} f_i + \sum_{i=1}^{r_n} f_i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} \sum_{i=1}^{60} f_i + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r_n} f_i = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{n} f_i + 0 =$$
$$= \frac{1}{60} \cdot 280 = \frac{14}{3}.$$

4) Promotrimo funkciju $f: (0,\infty) \to R$, $f(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} x^{n+1} - x + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Kako je $f'(x) = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} x^n - 1 \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow 0 < x \lesseqgtr \frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}}$,

tada funkcija f ima minimum $f(\frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}}) = 0$ za $x = \frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}}$ (jer je $f''(\frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}}) > 0$).

Neka je $a = \min\limits_{1\leq j\leq n} a_j$. Tada je $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} + (\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n+1})^{n+1} \geq$

$\geq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + (\frac{na}{n+1})^{n+1} = ((\frac{n}{n+1})^{n+1}a^{n+1} - a + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}) + a = f(a) + a \geq a =$

$= \min\limits_{1\leq j\leq n} a_j$, tj. $\min\limits_{1\leq j\leq n} a_j \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + (\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n+1})^{n+1}$.

Jednakost vrijedi kada je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

5) Neka je $S_n = \{1,2,\dots,n\}$ i U skup svih k-kombinacija $X = (x_1,x_2,\dots,x_k)$, $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, $x_i \in S_n$ $(i=1,2,\dots,k)$, za koje vrijedi: $x_i \neq x_j \Rightarrow |x_i - x_j| > m$ $(i,j \in \{1,2,\dots,k\})$.
Neka je nadalje V skup svih k-kombinacija $Y = (y_1,\dots,y_k)$, $y_i = x_i - (i-1)m \in S_{n-(k-1)m} = \{1,2,\dots,n-(k-1)m\}$ $(i=1,\dots,k)$.
Definirajmo sada funkciju $f: U \longrightarrow V$, $f(X) = Y$. Očito je da je f bijekcija (dokažite to !), pa skupovi U i V imaju isti broj elemenata. Kako skup V ima $\binom{n-(k-1)m}{k}$ elemenata, tada ih toliko ima i U, što zapravo predstavlja i rješenje zadatka.

<u>III razred - B kategorija</u>:

1) Vidi rješenje 1. zadatka III razreda - A kategorije i IV razreda.

2) Vidi rješenje 2. zadatka III razreda - A kategorije i IV razreda.

3) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos x + \cos(2k+1)x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos(k+1)x.\cos kx} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin x}{2\sin x.\cos(k+1)x.\cos kx} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sin x}.\frac{\sin(k+1)x.\cos x - \cos(k+1)x.\sin x}{\cos(k+1)x.\cos kx} =$$

$$= \frac{1}{2\sin x} \sum_{k=1}^{n} (\frac{\sin(k+1)x}{\cos(k+1)x} - \frac{\sin kx}{\cos kx}) = \frac{1}{2\sin x} \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{tg}(k+1)x - \mathrm{tg}kx) =$$
$$= \frac{1}{2\sin x}(\mathrm{tg}(n+1)x - \mathrm{tg}x) .$$

4) $f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}$ (1); $f(x+2) = f((x+1)+1) = \frac{f(x+1)-5}{f(x+1)-3} =$
$\overset{(1)}{=} \frac{2.f(x)-5}{f(x)-2}$ (2) ; $f(x+4) = f((x+2)+2) \overset{(2)}{=}$
$\overset{(2)}{=} \frac{2.f(x+2)-5}{f(x+2)-2} \overset{(2)}{=} f(x)$, tj. $f(x+4) = f(x), \forall x \in R$ (3),
što znači da je f periodična funkcija sa periodom 4.

5) Označimo sa $a_{ij} \in \{-1,1\}$, $i \in \{1,2,\dots,m\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, broj koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu tablice. Tada imamo:
$$\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = -1 \ (i=1,\dots,m) \ \& \ \prod_{i=1}^{m} a_{ij} = -1 \ (j=1,2,\dots,n)$$
$$\Rightarrow a_{in} = -\prod_{j=1}^{n-1} a_{ij} \ (i=1,\dots,m) \ (1) \ \&$$
$$\& \ a_{mj} = -\prod_{i=1}^{m-1} a_{ij} \ (j=1,\dots,n) \ (2) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{mn} = -\prod_{j=1}^{n-1} a_{mj} = -\prod_{j=1}^{n-1}(-\prod_{i=1}^{m-1} a_{ij}) = (-1)^n.\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{m-1} a_{ij} \ \&$$
$$\& \ a_{mn} = -\prod_{i=1}^{m-1} a_{in} = -\prod_{i=1}^{m-1}(-\prod_{j=1}^{n-1} a_{ij}) = (-1)^m.\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{j=1}^{n-1} a_{ij} \ \Rightarrow$$
$\Rightarrow (-1)^n = (-1)^m \Rightarrow$ m i n su ili oba parna ili oba neparna broja, a tablica $m \times n$ se može napisati na $2^{(m-1)(n-1)}$ načina (osim elemenata posljednjeg retka i posljednjeg stupca, koje uzimamo prema relacijama (1) i (2), sve ostale elemente uzimamo proizvoljno).

KLUB MLADIH MATEMATIČARA "A R H I M E D E S" BEOGRAD

X MATEMATIČKI TURNIR

Z a d a c i :

I razred:

Prva grupa zadataka:

1) Odrediti skupove A,B i C ako su ispunjeni slijedeći uvjeti: (1) $A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$, (2) $B\cup C=\{1,2,4,6,8\}$,
(3) $A\cup C=\{1,2,3,4,5,7,8\}$, (4) $A\cap B=\{2\}$,
(5) $B\cap C=\{2,4,8\}$, (6) $A\cap C=\{2\}$.

2) Neka su x i y prirodni brojevi. U slijedećim primjerima treba zamijeniti upitnike (?) znakovima $>$, $<$ ili $=$, tako da se dobiju točne rečenice:
   a) Ako je $x>8$, onda je $x+3\,?\,10$,
   b) Ako je $50x=60y$, onda je $x\,?\,y$,
   c) Ako je $5x>10$ i $y>x$, onda je $y\,?\,3$,
   d) Ako je $x>y$, onda je $y+2\,?\,x+5$,
   e) Ako je $x>y$, onda je $60-x\,?\,75-y$,
   f) Ako je $y<5$, onda je $3y\,?\,17$.

3) Na koliko se načina u odjeljenju od 32 učenika mogu izabrati:
   a) predsjednik, tajnik i blagajnik razredne zajednice,
   b) tri delegata za školsku zajednicu?

4) Koje od slijedećih rečenica su točne, a koje netočne?
   (1) Produkt dva različita iracionalna broja uvijek je iracionalan broj.
   (2) Suma dva različita iracionalna broja uvijek je iracionalan broj.
   (3) Suma racionalnog i iracionalnog broja uvijek je iracionalan broj.

5) Koje su od slijedećih rečenica (formula) točne?

(1) $|a|=\begin{cases} a, & \text{ako je } a\geq 0\\ -a, & \text{ako je } a<0,\end{cases}$ (2) $|a|=\begin{cases} a, & \text{ako je } a>0\\ -a, & \text{ako je } a\leq 0,\end{cases}$

(3) $|a|=\begin{cases} a, & \text{ako je } a\leq 0\\ -a, & \text{ako je } a\geq 0,\end{cases}$ (4) $|a|=\begin{cases} a, & \text{ako je } a>0\\ 0, & \text{ako je } a=0\\ -a, & \text{ako je } a<0.\end{cases}$

(5) $|a|+a=\begin{cases} 2a, & \text{ako je } a\geq 0\\ 0, & \text{ako je } a<0,\end{cases}$ (6) $|a|-a=\begin{cases} 0, & \text{ako je } a\geq 0\\ -2a, & \text{ako je } a<0.\end{cases}$

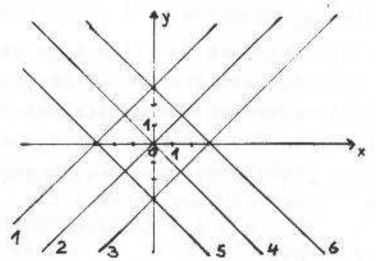
6) Veličine x i y su obrnuto proporcionalne. Popuniti prazna polja u slijedećoj tablici i izraziti formulom zavisnost izmedju x i y.

x	1	2			120
y		6	4	0,5	

7) a) Poslije povećanja za 15%, cijena jednog odijela je 48300 dinara. Kolika mu je bila cijena prije tog poskupljenja?
   b) Jedna stranica pravokutnika povećana je za 25%. Za koliko bi procenata trebalo smanjiti drugu stranicu, da bi površina pravokutnika ostala nepromjenjena?

8) Dana je nejednadžba $\frac{2x+1}{5}<\frac{3x+2}{8}$.
   a) Riješiti danu nejednadžbu u skupu realnih brojeva.
   b) Napisati (navodeći mu sve elemente) skup P_1 svih rješenja dane nejednadžbe u području prirodnih brojeva.
   c) Napisati (navodeći sve elemente) skup P_2 svih rješenja u cijelim brojevima, koja zadovoljavaju i uvjet $-4<x<1$.
   d) Napisati skup M svih brojeva koji su i u skupu P_1 i u skupu P_2.

9) a)



___ $y=-x-3$
___ $y=-x$
___ $y=x$
___ $y=x+3$
___ $y=-x+3$
___ $y=x-3$

Napisano je šest jednadžbi i nacrtano šest grafova (u istom koordinatnom sustavu). Na crti ispred svake jednadžbe napiši broj onog grafa koji joj odgovara.
   b) Riješi sustav jednadžbi: $x+y+3=0$, $x-y-3=0$.

10) Koje od slijedećih rečenica su točne? Zaokruži brojeve ispred takvih rečenica.

(1) Visina trokuta je manja od svake njegove stranice.
(2) Težišnica nije manja od visine trokuta povučene iz istog vrha trokuta.
(3) Poluopseg trokuta uvijek je veći od ma koje njegove stranice.
(4) Svaki paralelogram je centralno - simetrična figura.
(5) Svaki deltoid ima dvije osi simetrije.
(6) Oko tupokutnog trokuta ne može se opisati kružnica.

Druga grupa zadataka:

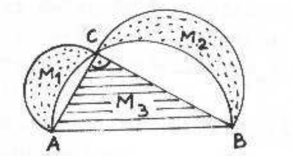
11) Na nekom balu prisustvovale su 42 osobe. Dama D_1 igrala je sa 7 muškaraca - kavaljera, dama D_2 sa 8 kavaljera,... ..., dama D_n sa svim kavaljerima prisutnim na balu. Koliko je dama i koliko kavaljera bilo na tom balu?

12) Razlomak 101/110 prikazati kao sumu dvaju razlomaka s nazivnicima 5 i 22 (a brojnici su pozitivni).

13) Simetrala hipotenuze $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC odsijeca trokut čija je površina 3 puta manja od površine trokuta ABC. Odrediti unutrašnje kutove trokuta ABC.

14) Dan je kut od 63°. Pomoću šestara i ravnala podijeliti ga:
a) na 3 jednaka dijela,
b) na 7 jednakih dijelova.

15)



Hipokrat iz Hiosa (oko 440. g. p.n.e.) utvrdio je da je suma površina dvaju mjesečića M_1 i M_2 (na slici su oni "poprskani" točkicama) jednaka površini pravokutnog trokuta ABC, tj. $M_1 + M_2 = M_3$. Dokazati tu tvrdnju.

__Drugi razred:__

Prva grupa zadataka:

1) Izračunati na najjednostavniji način:
(1) $\sin 1988\pi$, (2) $\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}$,
(3) $\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\pi$, (4) $\sin 1980^{\circ}$,

(5) $tg15^{\circ}.tg30^{\circ}.tg45^{\circ}.tg60^{\circ}.tg75^{\circ}$, 6) $\frac{\sin^2 15^{\circ} + \cos^2 15^{\circ}}{\cos^2 30^{\circ} - \sin^2 30^{\circ}}$.

2) Pojednostavni izraze:
(1) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$, (2) $\frac{\sin 2\beta}{\sin\beta}$,
(3) $(\frac{1}{\cos\gamma} + tg\gamma)\cdot(\frac{1}{\cos\gamma} + tg\gamma)$.

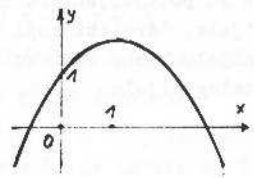
3) Koja veza postoji izmedju a i b, ako je $a = \sin\alpha + \cos\alpha$ i $b = \cos\alpha - \sin\alpha$?

4) U trokutu ABC kut $\sphericalangle C$ je pravi ($\sphericalangle C = 90^{\circ}$). Izračunati produkt $ctgA.ctgB$.

5) Riješiti jednadžbu $\sin 2x = 2\sin x$. (Dati formulu koja daje sva rješenja).

6) Odrediti dva broja, čiji su zbroj, produkt i kvocijent medjusobno jednaki.

7)



Koja od funkcija ima graf prikazan na ovoj slici? Zaokruži odgovarajuće slovo.
a) $y = x^2 + 2x - 3$, b) $y = x^2 - 2x + 3$,
c) $y = -x^2 - 2x + 1$, d) $y = -x^2 + 2x + 1$,
e) $y = -x^2 + 2x - 1$.

8) Neka su x_1 i x_2 korijeni jednadžbe $x^2 - ax + a - 1 = 0$. Odrediti parametar a, tako da vrijednost izraza $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$ bude najmanja. Kolika je ta najmanja vrijednost?

9) Ne koristeći tablice niti kalkulator, odrediti što je veće: $\log_3 30$ ili $\log_4 60$?

10) Riješiti jednadžbu $\log^2 x^2 = \log 10000$.

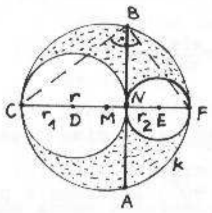
Druga grupa zadataka:

11) Dešifrirati slijedeće primjere, imajući u vidu da istom slovu svugdje odgovara ista znamenka, a različitim slovima različite znamenke:
(1) $RADAR = RRR\cdot RRR$, (2) $RADAR = (RRR)^A$, (3) $RADAR = (\frac{AAA}{A})^A$.

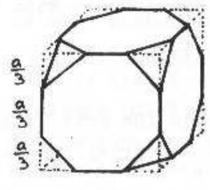
12) Naći sve trojke realnih brojeva (x,y,z) koji zadovoljavaju slijedeće 3 jednadžbe (sustav):
(1) $x.y = 2$, (2) $x.z = 3$, (3) $x^2 + y^2 = 5$.

13) Riješiti sustav jednadžbi: $2^x . 3^y = 24$, $2^y . 3^x = 54$.

14) Arhimed (287 - 212. god. p.n.e.) je izveo formulu za odredjivanje površine dviju figura koje su na slici osjenčane ("poprskane" točkicama). Ta formula glasi ovako: $P = \frac{1}{8}\pi t^2$, gdje je t duljina tetive $\overline{AB}$. Izvedite (dokažite) ovu Arhimedovu formulu.



15) Od kocke brida a odsječeno je 8 dijelova ("ćoškova"), koji imaju oblik trostrane piramide (tetraedra). Presječnim ravninama bridovi kocke su podijeljeni na tri jednaka dijela. Odrediti koji dio volumena cijele kocke čini volumen preostalog dijela.



R j e š e n j a :

<u>I razred</u>:

Prva grupa zadataka:

1) (4) & (6) $\Rightarrow$ $2 \in A$ & $2 \in B$ & $2 \in C$
(5) $\Rightarrow$ $2,4,8 \in B$ & $2,4,8 \in C$ & $4,8 \notin A$ (jer bi u suprotnom došli u kontradikciju sa (4));
(1) $\Rightarrow$ $1 \notin A$ & $1 \notin B$;
(2) & (3) $\Rightarrow$ $1 \in C$.
Sličnim razmatranjem iz (1),(2) i (3) dobivamo da je $3 \in A$, $5 \in A$, $6 \in B$ i $7 \in A$.
Prema tome: $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{1,2,4,8\}$.

2) a) $x > 8 \Rightarrow x + 3 > 10$, b) $50x = 60y \Rightarrow x > y$,
c) $5x > 10$ & $y > x \Rightarrow y > 3$, d) $x > y \Rightarrow y + 2 < x + 5$,
e) $x > y \Rightarrow 60 - x < 75 - y$, f) $y < 5 \Rightarrow 3y < 17$.

3) a) $V_{32}^3 = 32.31.30 = 29760$, b) $C_{32}^3 = \frac{32.31.30}{3.2.1} = 4960$.

4) (1) Netočno. (Na primjer: $\sqrt{2}, \sqrt{8} \in I$, ali $\sqrt{2}.\sqrt{8} = 4 \notin I$).

(2) Netočno. (Na primjer: $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \in I$, ali $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \notin I$).
(3) Točno. (Neka je $a \in Q$, $b \in I$. Kada bi bilo $c = a + b \in Q$, tada bi slijedilo da je $b = c - a \in Q$ (jer je ralika 2 racionalna broja uvijek racionalan broj), što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $b \in I$).

5) Točne su formule (1),(2),(4),(5) i (6).

6)

x	1	2	3	24	120
y	12	6	4	0,5	0,1

Formula je $xy = 12$, tj. $y = 12/x$.

7) a) 42000, b) 20%.

8) a) $x \in (-\infty, 2)$, b) $P_1 = \{1\}$, c) $P_2 = \{-3,-2,-1,0\}$, d) $M = \emptyset$.

9) a) $5 \ldots y = -x - 3$, $4 \ldots y = -x$, $2 \ldots y = x$,
$1 \ldots y = x + 3$, $6 \ldots y = -x + 3$, $3 \ldots y = x - 3$.
b) $x = 0$, $y = -3$.

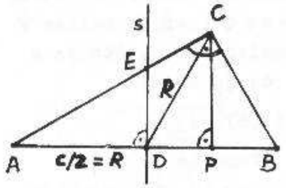
10) Točne su rečenice (2),(3) i (4).

Druga grupa zadataka:

11) Neka je n broj dama na balu, a $m = 42 - n$ broj kavaljera. Dama D_1 je igrala sa $7 = 1 + 6$ kavaljera, D_2 sa $8 = 2 + 6$ kavaljera,..., D_k sa $k + 6$ kavaljera,..., D_n sa svih $m = 42 - n = n + 6$ kavaljera. Iz $42 - n = n + 6$ slijedi $n = 18$, $m = 24$.
Dakle, na balu je bilo 18 dama i 24 kavaljera.

12) $\frac{101}{110} = \frac{x}{5} + \frac{y}{22} \Rightarrow 22x + 5y = 101 \Rightarrow y = \frac{101 - 22x}{5} = 20 - 4x + \frac{1-2x}{5}$
$\Rightarrow y = 20 - 4x + \frac{1 - 2x}{5}$ (1),
$\frac{1 - 2x}{5} = u \Rightarrow x = \frac{1 - 5u}{2} \Rightarrow x = -2u + \frac{1 - u}{2}$ (2),
$\frac{1 - u}{2} = t \Rightarrow u = 1 - 2t$ (3)
Sad iz (1),(2) i (3) izlazi: $x = 5t - 2$, $y = -22t + 29$.
Iz $x > 0$ i $y > 0$, tj. $5t - 2 > 0$ i $-22t + 29 > 0$ slijedi $\frac{2}{5} < t < 1\frac{7}{22}$, tj. (zbog $t \in Z$) $t = 1$, pa je $x = 3$, $y = 7$.
Dakle, $\frac{101}{110} = \frac{3}{5} + \frac{7}{22}$.

13)



$P_{\Delta ADE} = \frac{1}{3} P_{\Delta ABC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{2} \cdot |ED| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| . |CP| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{|AP|}{|AD|} = \frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |AP| = \frac{3}{2} \cdot |AD| = \frac{3}{2} \cdot \frac{|AB|}{2} = \frac{3}{4} \cdot |AB| \Rightarrow$

$\Rightarrow |DP| = |AP| - |AD| = \frac{1}{4} \cdot |AB| = |BP| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ΔDBC je jednakokračan trokut $\Rightarrow |BC| = |CD| \Rightarrow$
$=$ ΔDBC je jednakostraničan trokut (zbog $|DB| = |DC|$, tj. $R = c/2$) $\Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle BDC = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = 30^\circ$.
Dakle, kutevi trokuta su 30°, 60° i 90° .

14)a) Oduzmemo li od zadanog kuta od 63° kut od 60° (koji je lako konstruirati), dobit ćemo kut od 3°.
Oduzimanjem od pravog kuta kut od $69^\circ = 63^\circ + 2.3^\circ$, dobit ćemo kut od 21°. Sada zadani kut od 63° podijelimo kutom od 21° na 3 jednaka dijela.

b) Kut od 3° konstruiramo na isti način kao u (a).
Pomoću kuta od $9^\circ = 3.3^\circ$ podijelit ćemo zadani kut od 63° na 7 jednakih dijelova .

15) $M_1 + M_2 = \frac{1}{2} P_{k(r=a/2)} + \frac{1}{2} P_{k(r=b/2)} + M_3 - \frac{1}{2} P_{k(r=c/2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1 + M_2 = a^2\pi/8 + b^2\pi/8 - c^2\pi/8 + M_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1 + M_2 = \pi(a^2 + b^2 - c^2)/8 + M_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1 + M_2 = M_3$ (zbog $a^2 + b^2 = c^2$) .

<u>Drugi razred:</u>

Prva grupa zadataka:

1) (1) 0, (2) 1, (3) 0, (4) 0, (5) 1, (6) 2 .

2) (1) $\cos^2\alpha$, (2) $2\cos\beta$, (3) 1 .

3) $a^2 + b^2 = 2$. 4) 1 .

5) $\sin 2x = 2\sin x \Rightarrow 2\sin x . \cos x = 2\sin x \Rightarrow \sin x . (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$
$\sin x = 0 \vee \cos x = 1 \Rightarrow x = k\pi \ (k \in Z) \vee x = 2k\pi \ (k \in Z) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = k\pi \ (k \in Z)$.

Riješite zadatak grafičkom metodom. (Uputa: Nadjite sjecišta krivulja $y = \sin 2x$ i $y = 2\sin x$).

6) Iz $x + y = xy = x/y$ $(x \neq 0, y \neq 0)$ slijedi $(x,y) = (1/2, -1)$.

7) Odgovor: (d) .

8) $x^2 - ax + a - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = a \ \& \ x_1 x_2 = a - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a-1) = (a-1)^2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(x_1^2 + x_2^2) = 1$.

9) $\left.\begin{array}{l} \log_3 30 = x \Rightarrow 3^x = 30 \Rightarrow x > 3 \\ \log_4 60 = y \Rightarrow 4^y = 60 \Rightarrow y < 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > y \Rightarrow \log_3 30 > \log_4 60$.

10) $\log^2 x^2 = \log 10000 \Rightarrow (\log x^2)^2 = 4 \Rightarrow \log x^2 = \pm 2 \Rightarrow$
$x^2 = 100 \vee x^2 = 0{,}01 \Rightarrow x = \pm 10 \vee x = \pm 0{,}1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \{-10; -0{,}1; 0{,}1; 10\}$.

Druga grupa zadataka:

11) (1) & (2) $\Rightarrow A = 2 \overset{(3)}{\Rightarrow} RADAR = 111^2 = 12312 \Rightarrow R = 1 \ \& \ D = 3$
$\Rightarrow RADAR = 12321$.

12) (1) & (3) $\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 = 4 + 5 \Rightarrow (x+y)^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + y = \pm 3$ (4),
(1) & (4) $\Rightarrow (xy = 2 \ \& \ x + y = 3) \vee (xy = 2 \ \& \ x + y = -3) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y) \in \{(2,1),(1,2),(-2,-1),(-1,-2)\} \overset{(2)}{\Rightarrow}$
$\overset{(2)}{\Rightarrow} (x,y,z) \in \{(2,1,\frac{3}{2}), (1,2,3), (-2,-1,-\frac{3}{2}), (-1,-2,-3)\}$.

13) $\left.\begin{array}{l} 2^x . 3^y = 24 \\ 2^y . 3^x = 54 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^x . 3^y = 2^3 . 3 \\ 2^y . 3^x = 2 . 3^3 \end{array}\right\}$ (1) .
Množenjem jednadžbi (1) dobivamo:
$2^{x+y} . 3^{x+y} = 2^4 . 3^4 \Rightarrow 6^{x+y} = 6^4 \Rightarrow x + y = 4$ (2).
Dijeljenjem jednadžbi (1) dobivamo:
$2^{x-y} . 3^{y-x} = 2^2 . 3^{-2} \Rightarrow (\frac{2}{3})^{x-y} = (\frac{2}{3})^2 \Rightarrow x - y = 2$ (3).
Na kraju iz (2) i (3) slijedi: $x = 3$, $y = 1$.
Riješite zadatak primjenom logaritama (logaritmirajući zadane jednadžbe).

14) $P = r^2\pi - r_1^2\pi - r_2^2\pi \Rightarrow P = \pi(r^2 - (r_1^2 + r_2^2))$ (1),

$r_1 + r_2 = r \Rightarrow r_1^2 + r_2^2 = r^2 - 2r_1r_2$ (2),

$(\frac{t}{2})^2 = 2r_1 . 2r_2$ (potencija točke N s obzirom na kružnicu k) $\Rightarrow 2r_1r_2 = t^2/8$ (3),

(1) & (2) & (3) $\Rightarrow P = t^2\pi/8$.

15) $V = a^3$ (volumen kocke),

$V_1 = \frac{1}{6} . (\frac{a}{3})^3 = \frac{a^3}{162}$ (volumen jednog odsječenog "ćoška" kocke),

$V_2 = V - 8 . V_1 = a^3 - \frac{4}{81}a^3 = \frac{77}{81}a^3$ (volumen ostatka kocke),

$V_2 : V = 77 : 81$.

S A P V O J V O D I N A

DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SAP VOJVODINE

POKRAJINSKO NATJECANJE

Z a d a c i :

I razred - prirodno - matematička struka:

1) Koliko stranica može imati konveksan mnogokut čije su sve dijagonale jednake ?
2) Riješiti sustav jednadžbi:
$xy + x + y = 1$, $yz + y + z = 5$, $xz + x + z = 2$.
3) Ako su a,b,c duljine stranica trokuta opsega 2, onda je :
a) $(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0$,
b) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.
4) Odredi četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ za koji vrijedi:
$\overline{cda} - \overline{abc} = 297$, $a + b + c = 23$.
5) U kutiji se nalazi n kuglica. Dva igrača izmjenično izvlače kuglice iz kutije. U jednom potezu igrač smije izvući najmanje jednu, a najviše k kuglica ($k < n$). Pobjednik je igrač koji izvuče posljednju kuglicu. Kako igrači trebaju igrati da obezbjede pobjedu, ukoliko je to moguće ?

I razred - ostale struke:

1) Isto kao i 1. zadatak I razreda - prirodno - matematičke struke.
2) Odrediti sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $xy - 5y - 2x = 13$.
3) U razredu od 20 učenika 16 učenika uči engleski, 15 učenika francuski i 17 učenika njemački jezik. Dokazati da najmanje 8 učenika uči sva 3 jezika.
4) Isto kao 4. zadatak I razreda - prirodno - matematičke struke.
5) Isto kao 5. zadatak I razreda - prirodno - matematičke struke.

II razred:

1) Naći sve prirodne brojeve k, za koje postoje prirodni bro-

jevi m i n tako da vrijedi: $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}=\frac{k}{m^2+n^2}$.

2) Ako je $\log_b x=\frac{1}{2}(\log_a x+\log_c x)$, onda je $\log_b\sqrt{ac}=\log_b a-$ $-\log_b c$, pri čemu je $x\neq 1$.

3) Odrediti sve realne brojeve a i b, takve da je izraz $(a+bi)^3$ realan i veći od 27.

4) U školi od 100 učenika 80 učenika uči engleski, 75 francuski i 85 njemački jezik. Broj učenika koji uče sva tri jezika je najmanje moguć. Koliko učenika uči engleski i francuski jezik, ali pri tome ne uči njemački jezik?

5) U neke od k kutija stavljeno je po k manjih kutija, u neke od tih manjih kutija stavljeno je po k još manjih kutija. Ovakav postupak je ponovljen nekoliko puta. Nakon toga su prebrojene sve kutije koje nisu prazne (tj. koje sadrže bar jednu manju kutiju) i ustanovljeno je da ih ima m. Koliko je ukupno kutija upotrebljeno?

<u>III razred</u>:

1) Upisana sfera danog tetraedra dodiruje svaku od 4 strane tetraedra u njegovim težištima. Dokazati da je tetraedar pravilan.

2) Neka je $a+b+c\neq 0$, pri čemu su a,b,c realni brojevi koji nisu svi medjusobno jednaki. Da li sustav: $ax+by+cz=$ $=0$, $bx+cy+az=0$, $cx+ay+bz=0$ ima rješenja različitih od $(0,0,0)$?

3) Medju elementima danog aritmetičkog niza prirodnih brojeva postoji element koji je potpun kvadrat. Dokazati da postoji beskonačno mnogo potpunih kvadrata medju elementima tog niza.

4) Dokazati da za svaki prirodan broj $n\geq 2$ vrijedi:
$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha+\dots+\operatorname{tg}(n-1)\alpha\cdot\operatorname{tg}n\alpha=\operatorname{tg}n\alpha/\operatorname{tg}\alpha-n$.

5) Isto kao 5. zadatak II razreda.

<u>IV razred</u>:

1) Konveksan poligon je podijeljen na trokute dijagonalama koje se sijeku. Dokazati da suma polumjera kružnica upisanih u trokute nije manja od 2P/O, gdje P i O redom označavaju vrijednost površine i opsega poligona.

2) Odrediti sve trojke realnih brojeva a,b,c, takve da brojevi $a-b$, $a-c$, $b-c$ čine geometrijski niz.

3) Dokazati da je za svako $x\in(0,\pi/2)$:
$\underbrace{\cos(\cos\ldots(\cos x)\ldots)}_{1988}>\underbrace{\sin(\sin\ldots(\sin x)\ldots)}_{1988}$.

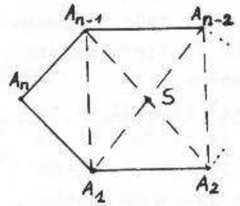
4) Neka su x_1 i x_2 nule trinoma $p(x)=x^2-1988x+1$. Dokazati da je $x_1^n+x_2^n\in N$ za svako $n\in N$.

5) Na koliko različitih načina se od 7 ljudi može formirati 5 različitih komisija, pod uvjetom da je svaki čovjek član samo jedne komisije i da svaka komisija ima bar jednog člana?

R j e š e n j a :

<u>I razred - prirodno - matematička struka</u>:

1) Očito je da postoje konveksan četverokut (na primjer pravokutnik, jednakokračan trapez,...) i konveksan peterokut (pravilni) koji imaju sve dijagonale jednake. Pokazat ćemo da ne postoji konveksan n-terokut, $n\geq 6$, koji ima sve dijagonale jednake. Pretpostavimo li (suprotno tvrdnji) da postoji konveksan n-terokut $A_1A_2\ldots A_n$, $n\geq 6$, kome su sve



dijagonale jednake, tada u konveksnom četverokutu $A_1A_2A_{n-2}A_{n-1}$ vrijedi: $|A_1A_{n-1}|+|A_2A_{n-2}|<(|A_1S|+$ $+|SA_{n-1}|)+(|A_2S|+|SA_{n-2}|)=(|A_1S|+$ $+|SA_{n-2}|)+(|A_2S|+|SA_{n-1}|)=|A_1A_{n-2}|+$ $+|A_2A_{n-1}|$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da su sve dijagonale jednake.
Dakle, konveksan n-terokut sa jednakim dijagonalama može imati 4 ili 5 stranica.

2) Zadani sustav jednadžbi možemo pisati u obliku:
$(x+1)(y+1)=2$, $(y+1)(z+1)=6$, $(x+1)(z+1)=3$ $(*)$.
Supstitucijom: $a=x+1$, $b=y+1$, $c=z+1$ $(**)$, iz $(*)$ dobivamo:

$$(***)\begin{cases} ab=2 \\ bc=6 \\ ca=3 \end{cases} \Rightarrow a^2b^2c^2=36 \Rightarrow abc=\pm 6 \overset{(***)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(***)}{\Rightarrow} (a,b,c)\in\{(1,2,3),(-1,-2,-3)\} \overset{(**)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} (x,y,z)\in\{(0,1,2),(-2,-3,-4)\}\ .$$

3) a) $a+b+c=2$ $(*)$,

$\left.\begin{matrix} \\ a<b+c,\ b<c+a,\ c<a+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a<1\ \&\ b<1\ \&\ c<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-a>0\ \&\ 1-b>0\ \&\ 1-c>0 \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c)>0.$

b) $(1-a)(1-b)(1-c)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-(a+b+c)+ab+bc+ca-abc>0 \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} -1+ab+bc+ca-abc>0\ /\cdot(-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2-2(ab+bc+ca)+2abc<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2-(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2)+2abc<0 \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} 2-4+(a^2+b^2+c^2)+2abc<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc<2\ .$

4) $a+b+c=23$ $(*)$,

$\overline{cda}-\overline{abc}=297 \Rightarrow (100c+10d+a)-(100a+10b+c)=297 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10(d-b)=99(3+a-c)$ $(**)$.

Lijeva strana jednakosti $(**)$ ima znamenku jedinica nulu, pa to mora imati i desna strana, zbog čega mora biti $3+a-c\in\{0,10\}$. Kada bi bilo $3+a-c=10$, tada bi desna strana $(**)$ bila 990, pa, da bi to bila i lijeva strana, mora biti $d-b=99$, što je nemoguće (zašto ?).

Iz $3+a-c=0$, tj. $c=a+3$ $(***)$ i $(**)$ slijedi da je $d=b$ $(****)$, a iz $(*)$ i $(***)$ izlazi da je $b=20-2a$ $(*****)$. Nadalje iz $(***)$ slijedi da je $a\le 6$ (zbog $c\le 9$), a iz $(*****)$ da je $a>5$, pa je $a=6$. Odatle, prema $(***)$, $(****)$ i $(*****)$ dobivamo: $c=9$, $b=d=8$.

Traženi broj je $\overline{abcd}=6898$. (Izvršite pokus !).

5) Neka je $n=(k+1)q+r$, $0\le r<k+1$. Ako je $r=0$, tada drugi igrač pobjedjuje tako da izvuče $(k+1)-m$ kuglica svaki puta kada prvi igrač izvuče $m\le k$ kuglica. Ako je $r\ge 1$, tada prvi igrač pobjedjuje tako da prvo izvuče r kuglica, a zatim čini isto što i drugi igrač u prethodnom slučaju.

<u>I razred - ostale struke:</u>

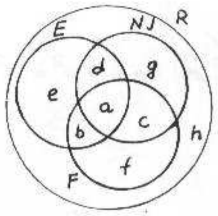
1) Vidi rješenje 1. zadatka I razreda prirodno - matematičke struke.

2) $xy-5y-2x=13 \Leftrightarrow (x-5)(y-2)=23$.

$x-5$	23	1	-23	-1
$y-2$	1	23	-1	-23
x	28	6	-18	4
y	3	25	1	-21

Cjelobrojna rješenja zadane jednadžbe su, dakle:
(28,3), (6,25), (-18,1), (4,-21) .

3)



Uz oznake kao na slici imamo:

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g+h &= 20\ /\cdot(-2) \\ a+b\quad +d+e \qquad\qquad &= 16 \\ a+b+c \qquad +f \qquad &= 15 \\ a \quad +c+d \qquad\quad +g &= 17 \end{aligned}\right| + \Rightarrow$$

$\Rightarrow a-(e+f+g+2h)=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a\ge 8$ (zbog $e,f,g,h\in N_0$) .

4) Vidi rješenje 4. zadatka I razreda - prirodno - matematičke struke.

5) Vidi rješenje 5. zadatka I razreda - prirodno - matematičke struke.

<u>II razred:</u>

1) $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}=\frac{k}{m^2+n^2} \Leftrightarrow k=(\frac{m^2+n^2}{mn})^2$ $(*)$;

1^o) $M(m,n)=1.$

$(*) \Rightarrow mn\,|\,m^2+n^2 \Rightarrow m\,|\,m^2+n^2\ \&\ n\,|\,m^2+n^2 \Rightarrow m\,|\,n^2\ \&\ n\,|\,m^2$ (zbog $m\,|\,m^2\ \&\ n\,|\,n^2$) $\Rightarrow m\,|\,n\ \&\ n\,|\,m$ (zbog $M(m,n)=1$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow m=n \overset{(*)}{\Rightarrow} k=(\frac{2m^2}{m^2})=2^2=4$;

2^o) $M(m,n)=d$, tj. $m=m_1d$, $n=n_1d$, $d\in N\setminus\{1\}$, $M(m_1,n_1)=1.$

$(*) \Rightarrow k=(\frac{d^2(m_1{}^2+n_1{}^2)}{d^2m_1n_1})^2=\frac{m_1{}^2+n_1{}^2}{m_1n_1}$, a odatle (analognim postupkom kao u 1°) slijedi da je $m_1 = n_1$, tj. $k = 4$.

Dakle, rješenje zadatka je $k = 4$.

2) Primjenom formule $\log_m x = \dfrac{\log_n x}{\log_n m}$ (dokažite je !), dobivamo:

$\log_b x = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_c x) \Leftrightarrow \log_b x = \frac{1}{2}(\log_b x / \log_b a +$
$+ \log_b x / \log_b c) \Leftrightarrow \log_b x = \log_b x(\log_b a + \log_b c)/2 \log_b a \log_b c$
$\Leftrightarrow 1 = (\log_b a + \log_b c)/2 \log_b a \log_b c$ (jer je $\log_b x \neq 0$ zbog
$x \neq 1) \Leftrightarrow (\log_b a + \log_b c)/2 = \log_b a \log_b c \Leftrightarrow \log_b \sqrt{ac} =$
$= \log_b a \log_b c$.

3) $z = (a + bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$,

$z \in R \Leftrightarrow 3a^2b - b^3 = 0 \Leftrightarrow b(3a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b^2 = 3a^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b \in \{0, \pm a\sqrt{3}\}$ (*) ,

$Re(z) > 27 \Leftrightarrow a^3 - 3ab^2 > 27$ (**) ,

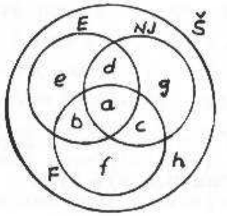
1°) $b = 0 \overset{(**)}{\Rightarrow} a^3 > 27 \Rightarrow a > 3$,

2°) $b = \pm a\sqrt{3} \Rightarrow b^2 = 3a^2 \overset{(**)}{\Rightarrow} a^3 - 9a^3 > 27 \Rightarrow a^3 < -\frac{27}{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow a < -\frac{3}{2}$.

Dakle, rješenja zadatka su:

$(a,b) \in \{(a > 3; 0), (a < -\frac{3}{2}; \pm a\sqrt{3})\} \subset R^2$.

4)



Uz oznake kao na slici imamo:

$$\left.\begin{array}{lll} a+b+c+d+e+f+g+h & = 100 & /\cdot(-2) \\ a+b \quad +d+e & = 80 & \\ a+b+c \quad\quad +f & = 75 & \\ a \quad +c+d \quad\quad +g & = 85 & \end{array}\right| \overset{+}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow a - (e + f + g + 2h) = 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = a_{min} = 40 \Rightarrow e + f + g + 2h = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e = f = g = h = 0$ (zbog $e,f,g,h \in N_0$) $\Rightarrow$

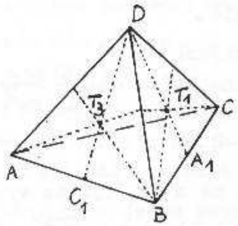
$$\Rightarrow \begin{cases} b + c + d = 60 \\ b \quad + d = 40 \\ b + c \quad = 35 \\ \quad c + d = 45 \end{cases} \Rightarrow b = 15, c = 20, d = 25 .$$

Dakle, 15 učenika uči engleski i francuski, a pri tome ne uči njemački jezik.

5) Neka je u prvom koraku u $k_1 \leq k$ kutija stavljeno po k manjih kutija, u drugom u $k_2 \leq k_1 k$ manjih kutija po k još manjih kutija,..., u n-tom koraku u $k_n \leq k_{n-1}k$ kutija po k najmanjih kutija. Tada je broj nepraznih kutija $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, pa je ukupan broj kutija: $k + k_1 k + k_2 k + \ldots + k_n k =$
$= k + k(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) = k + km = k(m + 1)$ (zašto ?) .

<u>III razred</u>:

1)



Neka je ABCD zadani tetraedar, a težišta T_1, T_2, T_3, T_4 strana BCD , CDA, DAB, ABC neka su dirališta tetraedra sa upisanom mu sferom. Tada izlazi:

$\triangle BDT_3 \cong \triangle DBT_1$ ($|BD| = |BD|$, $|DT_3| = |DT_1|$ i $|BT_3| = |BT_1|$ (odsječci tangenata na sferu)) $\Rightarrow \sphericalangle BDT_3 = \sphericalangle T_1DB \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BDC_1 \cong \triangle A_1DB$ ($|BD| = |BD|$, $\sphericalangle BDC_1 = \sphericalangle A_1DB$, $|DC_1| = |DA_1|$(zbog $|DC_1| =$
$= \frac{3}{2}|DT_3| = \frac{3}{2}|DT_1| = |DA_1|$)) $\Rightarrow |BC_1| = |BA_1| \Rightarrow |AB| = |BC|$ (jer su $\overline{DC_1}$ i $\overline{DA_1}$ težišnice trokuta DAB i DBC). Odatle zamjenom proizlaze jednakosti u parovima svaka dva brida, pa po tranzitivnosti, na osnovu jednakosti svih bridova, slijedi da je tetraedar pravilan.

2) Zadani homogeni sustav jednadžbi će imati samo trivijalno rješenje akko je glavna determinanta sustava $\Delta \neq 0$, odnosno beskonačno mnogo rješenja (neodredjen sustav) akko je $\Delta = 0$. Kako je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \overset{I+II+III}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \\ c & a-c & b-c \end{vmatrix} =$$

II-I III-I

$$= (a+b+c).1.\begin{vmatrix} c-b & a-b \\ a-c & b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)((c-b)(b-c) -$$

$$- (a-c)(a-b)) = (a+b+c)(-b^2-c^2+2bc-a^2+ab+ac-bc) =$$

$$= -\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) =$$

$$= -\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \neq 0 \text{ (zašto ?)},$$

tada zadani sustav ima samo trivijalno rješenje $(0,0,0)$.

3) Neka je d razlika zadanog aritmetičkog niza, a m^2 jedan njegov član. Tada su svi potpuni kvadrati $(m+nd)^2 = m^2 + 2mnd + n^2d^2 = m^2 + n(2m+nd)d$, $n \in N$, takodjer članovi toga niza (zašto ?), što se i tvrdilo.

4) Dokaz provodimo matematičkom indukcijom:

a) Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi jer je $\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}2\alpha = \mathrm{tg}\alpha.\frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} =$

$$= \frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} - 2 = \frac{\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}{\mathrm{tg}\alpha} - 2 = \frac{\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - 2.$$

b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi: $\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}2\alpha.\mathrm{tg}3\alpha + \ldots + \mathrm{tg}(k-1)\alpha.\mathrm{tg}k\alpha = \frac{\mathrm{tg}k\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - k$.

c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi: $\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}2\alpha.\mathrm{tg}3\alpha + \ldots + \mathrm{tg}k\alpha.\mathrm{tg}(k+1)\alpha = \frac{\mathrm{tg}(k+1)\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - (k+1)$.

Dokaz:

$$\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}2\alpha.\mathrm{tg}3\alpha + \ldots + \mathrm{tg}(k-1)\alpha.\mathrm{tg}k\alpha + \mathrm{tg}k\alpha.\mathrm{tg}(k+1)\alpha \overset{(b)}{=}$$

$$\overset{(b)}{=} \left(\frac{\mathrm{tg}k\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - k\right) + \mathrm{tg}k\alpha.\mathrm{tg}(k+1)\alpha = \mathrm{tg}k\alpha.\frac{1+\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}(k+1)\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - k =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}(k+1)\alpha - \mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}(k+1)\alpha}.\frac{1+\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}(k+1)\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - k \text{ (jer iz } \mathrm{tg}k\alpha =$$

$$= \mathrm{tg}((k+1)\alpha-\alpha) \Rightarrow \mathrm{tg}k\alpha = \frac{\mathrm{tg}(k+1)\alpha - \mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}(k+1)\alpha}) = \frac{\mathrm{tg}(k+1)\alpha - \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} -$$

$$- k = \frac{\mathrm{tg}(k+1)\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - (k+1).$$

5) Vidi rješenje 5. zadatka II razreda.

<u>IV razred</u>:

1) Neka je konveksan poligon podijeljen dijagonalama na n

trokuta. Tada očito vrijedi: $\sum_{i=1}^{n} P_i = P$ $(*)$ i

$O_i \leq O$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ $(**)$, gdje su P_i i O_i $(i=1,2,\ldots,n)$ površine i opsezi tih trokuta. Primjenom formula $P_i = O_i.r_i/2$, tj. $r_i = 2P_i/O_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $(***)$, gdje su su r_i $(i=1,2,\ldots,n)$ polumjeri trokutima upisanim kružnicama, izlazi:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \overset{(***)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{2P_i}{O_i} \overset{(**)}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \frac{2P_i}{O} = \frac{2}{O}\sum_{i=1}^{n} P_i \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{2P}{O}, \text{ tj. } \sum_{i=1}^{n} r_i \geq \frac{2P}{O}, \text{ što se i tvrdilo.}$$

2) $a-b, a-c, b-c$ geometrijski niz $\Leftrightarrow (a-c)^2 = (a-b)(b-c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \,/\, .2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-b=0 \ \& \ b-c=0 \ \& \ c-a=0 \Leftrightarrow a=b=c$.

Uzmemo li u obzir da $(a-b, b-c, c-a) = (0,0,0)$ ne čine geometrijski niz, zadatak nema rješenja.

3) Dokažimo prvo jednu pomoćnu lemu:

$$\cos x < \pi/2 - \sin x, \quad \forall x \in R \quad (*).$$

Dokaz leme: Iz $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(\pi/2 - x) =$

$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = 2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos(x-\frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$ (zbog $\cos(x-\frac{\pi}{4}) \leq 1$) $< \frac{\pi}{2}$, odmah proizlazi $(*)$.

Sada ćemo pokazati matematičkom indukcijom da tvrdnja vrijedi za bilo koji paran prirodan broj $2n$ (zbog čega će onda vrijediti i za $2n = 1988$):

a) Za $n = 2$ je $\cos(\cos x) \overset{(*)}{>} \cos(\pi/2 - \sin x)$ (jer je u I kvadrantu kosinus opadajuća funkcija) $= \sin(\sin x)$, tj. $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$.

b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2k$, tj. da vrijedi: $\underbrace{\cos(\cos\ldots(\cos x)\ldots)}_{2k} > \underbrace{\sin(\sin\ldots(\sin x)\ldots)}_{2k}$.

c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = 2(k+1) = 2k+2$, tj. da vrijedi: $\underbrace{\cos(\cos\ldots(\cos x)\ldots)}_{2k+2} > \underbrace{\sin(\sin\ldots(\sin x)\ldots)}_{2k+2}$.

Dokaz:

$$\underbrace{\cos(\cos\ldots(\cos x)\ldots)}_{2k+2} = \underbrace{\cos(\cos(}_{2}\ \underbrace{\cos(\cos\ldots(\cos x)\ldots))}_{2k})$$

$$\overset{(a)}{>} \underbrace{\sin(\sin(}_{2}\ \underbrace{\cos(\cos\ldots(\cos x)\ldots))}_{2k}) \overset{(b)}{>}$$

$$\overset{(b)}{>} \underbrace{\sin(\sin(}_{2}\ \underbrace{\sin(\sin\ldots(\sin x)\ldots))}_{2k})$$ (jer je sinus u I kvadrantu rastuća funkcija) $= \underbrace{\sin(\sin\ldots(\sin x)\ldots)}_{2k+2}$.

4) $p(x) = x^2 - 1988x + 1 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 1988 \ \&\ x_1x_2 = 1 \quad (*)$.

Tvrdnju zadatka dokazujemo matematičkom indukcijom:

a) Za $n = 1$ je $x_1 + x_2 = 1988 \in N$.

b) Pretpostavimo da tvrdnja zadatka vrijedi sve do $n = k$, tj. da je $x_1^m + x_2^m \in N, \forall m \leq k$.

c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da je $x_1^{k+1} + x_2^{k+1} \in N$.

Dokaz:

$x_1^{k+1} + x_2^{k+1} = (x_1 + x_2)(x_1^k + x_2^k) - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) \overset{(*)}{=}$

$\overset{(*)}{=} 1988(x_1^k + x_2^k) - (x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) \in Z$, jer su prema (b) $x_1^k + x_2^k \in N$ i $x_1^{k-1} + x_2^{k-1} \in N$. Zato dobivamo:

$(*) \Rightarrow x_1, x_2 > 0 \Rightarrow x_1^{k+1} + x_2^{k+1} > 0 \Rightarrow x_1^{k+1} + x_2^{k+1} \in N$.

5) Od 7 ljudi 5 komisija možemo formirati tako da bude jedna tročlana i 4 jednočlane, odnosno 2 dvočlane i 3 jednočlane komisije.

U prvom slučaju izmedju 7 ljudi tročlanu komisiju možemo formirati na $\binom{7}{3}$ načina, pa je broj mogućih izbora 5 komisija u ovom slučaju $\binom{7}{3}\cdot 5!$ (zašto ?).

U drugom slučaju 2 dvočlane komisije (bez poretka tih komisija) možemo formirati na $\frac{1}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}$ načina, pa je broj

mogućih izbora 5 komisija u ovom slučaju $\frac{1}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 5!$ (obrazložite tvrdnju !).

Ukupan broj različitih načina formiranja komisija je dakle $\binom{7}{3}\cdot 5! + \frac{1}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 5! = 16800$.

Ako poredak komisija nije važan, tada je broj načina $\binom{7}{3} + \frac{1}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2} = 175$.

S F R   J U G O S L A V I J A

SAVEZNO NATJECANJE
Sinj, 23. 04. 1988.

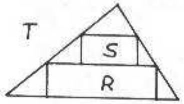
Zadaci:

I razred:

1) Ako je n prirodan broj veći od 1 za koga vrijedi:
$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$ onda je n prost broj. Dokazati. ($[x]$ je najveći cio broj koji nije veći od x).

2) Izračunati kuteve trokuta ABC, ako težišnica, simetrala kuta i visina iz vrha C dijele kut ACB na četiri jednaka dijela.

3) U dani šiljastokutan trokut T upisana su dva pravokutnika R i S, kao na slici. Odredi najveću moguću vrijednost izraza:



$$\frac{P_R+P_S}{P_T},$$ gdje P označava površinu.

4) Medjunarodnoj konferenciji prisustvuju po dva predstavnika iz 27 zemalja. Dokazati da se učesnici konferencije ne mogu poredati za okruglim stolom, tako da izmedju svaka dva učesnika, koji su predstavnici iste zemlje, sjedi točno 9 drugih učesnika konferencije.

II razred:

1) Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC. Označimo sa P,Q,R redom središta lukova $\widehat{AB},\widehat{BC},\widehat{CA}$, koji ne sadrže redom točke C,A,B. Ako za točku X vrijedi: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$, dokazati da je X središte upisane kružnice trokuta ABC.

2) Odrediti za koje neparne prirodne brojeve $n\geq 3$ je funkcija $F:Q\to Q$, $f(x)=x^n-2x$, injektivna. (Q je skup racionalnih brojeva; funkcija je injektivna ako različite brojeve preslikava u različite brojeve).

3) Za skup $A\subset N$ kažemo da je "dobar" ako za neki prirodan broj n jednadžba $x-y=n$ ima beskonačno mnogo rješenja (x,y), gdje je $x\in A$, $y\in A$.
Ako je $N=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_{1988}$, onda je bar jedan od skupova $A_1,A_2,\dots,A_{1988}$ "dobar". Dokazati. (N je skup prirodnih brojeva).

4) Dokazati da unutar konveksnog $2n$-terokuta ne postoje dvije različite točke kroz koje prolazi po n dijagonala tog $2n$-terokuta.

III i IV razred:

1) Neka su $a,b,c,d\in N_0$ i $d\neq 0$. Funkcija $f:N_0\to N_0$ odredjena je uvjetom: $f(x)=\left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]$. Dokazati da je f injektivna ako i samo ako je $c=0$ i $a\geq d$. ($N_0=\{0,1,\dots\}$, $[x]$ je najveći cio broj koji nije veći od x).

2) U n-terostranu piramidu može se upisati sfera. Svaku od pobočnih strana piramide zarotiramo oko odgovarajućeg brida baze do poklapanja s ravninom baze, tako da slika pobočne strane ima zajedničkih unutarnjih točaka sa bazom. Na taj način dobiveno je n slika vrha piramide. Dokazati da tih n slika pripadaju jednoj kružnici.

3) Dan je strogo rastući niz $a_1,a_2,a_3,\dots$ prirodnih brojeva, tako da je $a_1=1$, $a_2=2$ i da za sve relativno proste brojeve m i n vrijedi $a_m\cdot a_n=a_{mn}$. Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi: $a_n=n$.

4) U jednoj državi ima više od 7 gradova. Dokazati da ne postoji mreža jednosmjernih puteva sa slijedećim svojstvima:
(a) Izmedju svaka dva grada postoji točno jedan direktan put.
(b) Za svaka dva grada A i B postoji točno jedan grad u koji se direktno može stići i iz A i iz B.
(c) Za svaka dva grada A i B postoji točno jedan grad iz kojeg se direktno može stići i u A i u B.

R j e š e n j a :

<u>I razred</u>:

1) Dokažimo prvo jednu pomoćnu lemu: Ako su $n,k \in N$, tada je $\left[\frac{n}{k}\right]$ jednako broju svih višekratnika $v \in \{1,2,\ldots,n\}$ broja k.

Dokaz leme: Neka je $n = kq + r$, $q,r \in N_0$, $0 \leq r < k$. Tada su višekratnici broja k: $k, 2k, \ldots, qk$, tj. ukupno ih je q. S druge strane je $\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{kq+r}{k}\right] = \left[q + \frac{r}{k}\right] = q + \left[\frac{r}{k}\right]$ (zbog $q \in N_0$) $= q + 0 = q$, čime je tvrdnja leme dokazana.

Iz leme neposredno proizlazi da je

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 0, & \text{za } k \nmid n \\ 1, & \text{za } k \mid n \end{cases} \quad (*) .$$

Dokažimo sada tvrdnju zadatka:

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n-1}\right] + \left[\frac{n}{n}\right] =$$

$$= 2 + \left[\frac{n-1}{1}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n-1}\right] + 1 =$$

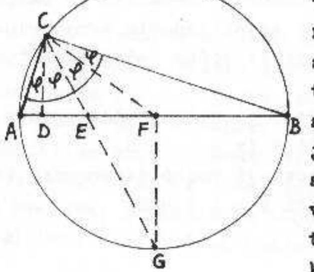
$$= 2 + (n-1) + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right]\right) + \ldots + \left(\left[\frac{n}{n-1}\right] - \left[\frac{n-1}{n-1}\right]\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = 0, \ \forall k \in \{2,3,\ldots,n-1\} \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

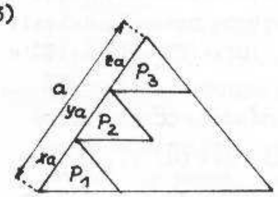
$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} k \nmid n, \ \forall k \in \{2,3,\ldots,n-1\} \Leftrightarrow n \text{ je prost broj.}$$

2)



Uz oznake na slici, neka simetrala kuta siječe opisanu kružnicu u G. Iz $\sphericalangle ACG = 2\varphi = \sphericalangle BCG$ slijedi $\widehat{AG} = \widehat{BG}$, pa je FG simetrala stranice $\overline{AB}$. Iz $CD \parallel FG$ slijedi $\sphericalangle CGF = \sphericalangle DEC = \varphi = \sphericalangle GCF$, pa je trokut CFG jednakokračan i simetrala baze $\overline{CG}$ prolazi kroz vrh F. Zato je F sjecište simetrala dviju tetiva $\overline{AB}$ i $\overline{CG}$ kružnice, tj. središte te kružnice. Dakle, $\overline{AB}$ je promjer te kružnice i po Talesovom teoremu je $4\varphi = \sphericalangle ACB = 90^\circ$. Dalje je $\sphericalangle BAC = 90^\circ - \sphericalangle ACD = 90^\circ - \varphi = 67^\circ 30'$, $\sphericalangle ABC = 90^\circ - 3\varphi = 22^\circ 30'$.

3)



Vučenjem paralela kao na slici, dobivaju se tri trokuta s površinama P_1, P_2, P_3, slična trokutu T, pa vrijedi

$$\frac{P_R + P_S}{P_T} = \frac{P_T - (P_1 + P_2 + P_3)}{P_T} =$$

$$= 1 - \left(\frac{P_1}{P_T} + \frac{P_2}{P_T} + \frac{P_3}{P_T}\right) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

gdje su xa, ya, za, a duljine odgovarajućih stranica.

Uz $x + y + z = 1$, treba odrediti najmanju vrijednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$. Medjutim, iz identiteta $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}\left((x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right)$ slijedi da se najmanja vrijednost postiže za $x = y = z = \frac{1}{3}$, a iznosi $\frac{1}{3}$.

Tražena najveća vrijednost od $\frac{P_R + P_S}{P_T}$ je $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

4) Pretpostavimo (suprotno tvrdnji zadatka) da je moguće ostvariti raspored učesnika konferencije, tako da izmedju svaka dva zemljaka sjedi točno 9 učesnika drugih zemalja. Neka su x_k i y_k, $x_k < y_k$, $k = 1,2,\ldots,27$, redni brojevi zemljaka. Tada je $y_k - x_k \in \{10, 44\}$, pa imamo:

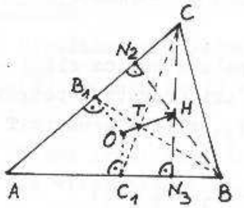
$$Y - X = \sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = 10a + 44b \text{ i } Y + X = 1 + 2 + \ldots + 54 = 1485 .$$

Odatle je $2Y = 10a + 44b + 1485$, što je očito kontradikcija (jer je lijeva strana paran broj, a desna neparan). Dakle, navedeni razmještaj je nemoguć.

<u>II razred</u>:

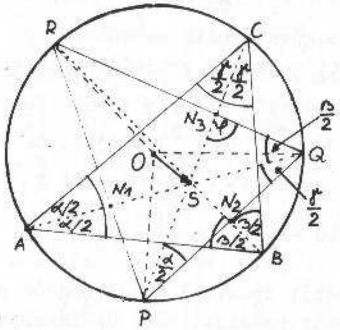
1) Dokažimo prvo jednu pomoćnu lemu: Ako je O središte opisane kružnice, a H ortocentar trokuta ABC, tada vrijedi: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Dokaz leme: Neka je T težište trokuta ABC. Tada (uz oznake kao na slici), na osnovu činjenice da su O,T,H kolinearne točke (leže na Eulerovom pravcu), izlazi:



$\Delta TOC_1 \sim \Delta THC \Rightarrow |OT| : |TH| = |TC_1| : |TC| = 1:2 \Rightarrow |TH| = 2.|OT| \Rightarrow \overrightarrow{TH} = 2.\overrightarrow{OT} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (dokažite da je $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$!).

Dokažimo sada tvrdnju zadatka: Prvo imamo da su C,S,P kolinearne točke ($\widehat{AP} = \widehat{PB}$, $\sphericalangle ACS = \sphericalangle SCB = \gamma/2$, S = središte upisane kružnice trokuta ABC) i analogno tome da su B,S,R, te A,S,Q kolinearne točke. Nadalje je $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle CAQ = \alpha/2$ (kutevi nad istim kružnim lukom $\widehat{QC}$) i analogno tome $\sphericalangle PQA = \gamma/2$ i $\sphericalangle AQR = \beta/2$, pa iz odnosa kuteva u trokutu SQN_3 izlazi $\beta/2 + (\alpha/2 + \gamma/2) + \varphi = 180^\circ$, tj. $\varphi = 90^\circ$, odnosno $\overline{PN_3} \perp \overline{QR}$.



Analogno izlazi da je $\overline{QN_1} \perp \overline{RP}$ i $\overline{RN_2} \perp \overline{PQ}$, pa je S ortocentar trokuta PQR. Prema prethodnoj lemi izlazi:

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS}$ (*).

Iz $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ i (*) slijedi da je $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OS}$, tj. $X \equiv S$, što se i tvrdilo.

2) Dokazat ćemo da je za svaki neparan prirodan broj $n \geq 3$ funkcija $f: Q \longrightarrow Q$, $f(x) = x^n - 2x$ injektivna.

Pretpostavimo (suprotno toj tvrdnji) da f nije injektivna, tj. da postoje $u, v \in Q$, $u \neq v$, $u = x/z$, $v = y/z$, $x,y,z \in Z$, $x \neq y$, $z \neq 0$, $M(x,y,z) = 1$, tako da je $f(u) = f(v)$. Tada izlazi: $f(u) = f(v) \Rightarrow f(x/z) = f(y/z) \Rightarrow (x/z)^n - 2.(x/z) = (y/z)^n - 2.(y/z) \Rightarrow (x^n - y^n)/z^n = 2.(x-y)/z \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^n - y^n)/(x-y) = 2z^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} = 2z^{n-1}$ (*).

Na lijevoj strani jednakosti (*) ima neparan broj n pribrojnika.

Ako su x,y neparni, tada su svi pribrojnici neparni, pa je cijela lijeva strana neparna, dok je desna strana parna. Ako je jedan od brojeva x,y paran, a drugi neparan, tada su svi pribrojnici osim jednog (prvog ili zadnjeg) parni, pa je opet lijeva strana neparna.

Ako su x,y parni, tada je lijeva strana od (*) djeljiva sa 2^{n-1}, pa slijedi: $2^{n-1} | 2z^{n-1} \Rightarrow 2^{n-2} | z^{n-1} \Rightarrow 2 | z \Rightarrow$ $\Rightarrow M(x,y,z) = 2$, što je opet kontradikcija.

3) Podijelimo skup N na disjunktne podskupove $S_0, S_1, S_2, \ldots$ oblika $S_k = \{1989k+1, 1989k+2, \ldots, 1989k+1989\}$, $k \in N_0$. Za svaki skup S_i postojat će bar jedan skup A_j, koji sadrži bar dva elementa skupa S_i (Dirichletov princip). Pošto skupova S_i ima beskonačno mnogo, bar jedan od skupova A_j, označimo ga sa A', sadrži beskonačno mnogo parova x,y, $x > y$, takvih da x i y pripadaju istom S_i. Očigledno je $x - y \in \{1, \ldots, 1989\}$, pa, pošto je parova (x,y) beskonačno mnogo, postoji bar jedan prirodan broj n za koji jednadžba $x - y = n$ ima beskonačno mnogo rješenja (x,y), $x,y \in A'$. Prema tome, skup A' je "dobar" skup.

4) Sjecište S od n dijagonala je unutrašnja točka našeg konveksnog 2n-terokuta. Uočimo bilo koju dijagonalu $\overline{AB}$ kroz S. Svaka od preostalih n-1 dijagonala kroz S ima jedan kraj s jedne, a drugi kraj s druge strane od $\overline{AB}$, tj. n-1 vrhova poligona nalazi se s jedne, a n-1 vrhova s druge strane od $\overline{AB}$. Zato su A,B suprotni vrhovi poligona. Dakle, u S se sijeku nužno sve "glavne" dijagonale (spojnice suprotnih vrhova). Jedinstvenost takvog sjecišta S je očita.

<u>III i IV razred:</u>

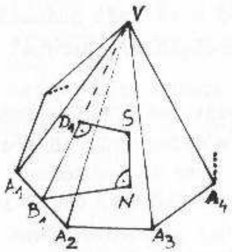
1) Nužnost: Neka je f injekcija. Ako je $c \neq 0$, tada imamo

$\left|\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}\right| = \left|\frac{bc-ad}{c(cx+d)}\right| = \frac{|bc-ad|}{c(cx+d)}$, pa za $n > \frac{1}{c}(\frac{|bc-ad|}{c} - d)$ imamo $\frac{|bc-ad|}{c} < cn+d$, tj. $\frac{|bc-ad|}{c(cn+d)} < 1$, odnosno $\left|\frac{an+b}{cn+d}-\frac{a}{c}\right| < 1$. Dakle beskonačno mnogo vrijednosti $\frac{an+b}{cn+d}$ $(n \in N_o)$ nalazi se u intervalu $(\frac{a}{c}-1, \frac{a}{c}+1)$, a onda se za sve takve vrijednosti n vrijednosti $f(n) = \left[\frac{an+b}{cn+d}\right]$ nalazi u intervalu $(\frac{a}{c}-2, \frac{a}{c}+2)$ (jer se $\frac{an+b}{cn+d}$ i $\left[\frac{an+b}{cn+d}\right]$ razlikuju za manje od 1), što nije moguće zbog injektivnosti. Zato je $c = 0$, pa onda i $f(x) = \left[\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}\right]$. To je rastuća funkcija i nužno je $\frac{a}{d} \geq 1$.

Dovoljnost: Neka je $f(x) = \left[\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}\right]$, $a \geq d$, tj. neka je $f(x) = \left[kx + \frac{b}{d}\right]$, $k = \frac{a}{d} \geq 1$. Neka su nadalje $x_1, x_2 \in N_o$, $x_1 < x_2$, tj. neka je $x_2 = x_1 + y$, $y \in N$, $x_1 \in N_o$, $x_2 \in N$. Tada je

$f(x_2) = \left[kx_2 + \frac{b}{d}\right] = \left[(kx_1 + \frac{b}{d}) + ky\right] \geq \left[(kx_1 + \frac{b}{d}) + [ky]\right] = \left[kx_1 + \frac{b}{d}\right] + [ky] = f(x_1) + [ky] \geq f(x_1) + 1$ (jer iz $k \geq 1$ & $y \geq 1 \Rightarrow ky \geq 1 \Rightarrow [ky] \geq 1$) $> f(x_1)$, tj. $f(x_2) > f(x_1)$, što znači da je f injekcija.

2)



Neka je $A_1A_2 \ldots A_n$ baza piramide, S središte sfere, $D_1, D_2, \ldots, D_n$ dirališta sfere sa pobočnim stranama, a N diralište sfere sa bazom. Tada je $|VD_1| = |VD_2| = \ldots = |VD_n|$ i $|B_iD_i| = |B_iN|$, $i = 1,2,\ldots,n$, pa se sve točke D_i, $i = 1,2,\ldots,n$, danim preslikavanjem preslikaju u N. Odatle, zbog $|VD_i| = \text{const}$, proizlazi tvrdnja zadatka.

3) a) Po pretpostavci je $a_1 = 1, a_2 = 2$. Neka je $a_3 = k \geq 3$. Tada je:

$a_6 = a_{2 \cdot 3} = a_2 \cdot a_3 = 2a_3 = 2k$,

$k + 2 \leq a_5 \leq 2k - 1$ (zbog $a_3 < a_4 < a_5 < a_6$),

$a_{10} = a_2 \cdot a_5 = 2a_5 \leq 4k - 2$,

$a_9 \leq 4k - 3$ (zbog $a_9 < a_{10}$),

$a_{18} = a_2 \cdot a_9 = 2a_9 \leq 8k - 6$, $k^2 + 2k = k(k+2) \leq a_3 \cdot a_5 = a_{15}$,

$k^2 + 2k + 3 \leq a_{15} + 3 \leq a_{18} \leq 8k - 6$, $k^2 + 2k + 3 \leq 8k - 6$,

$k^2 - 6k + 9 \leq 0$, $(k-3)^2 \leq 0$, $k = 3$, $a_3 = 3$ (a odatle $a_6 = 6$, $a_5 = 5$, $a_4 = 4; \ldots$).

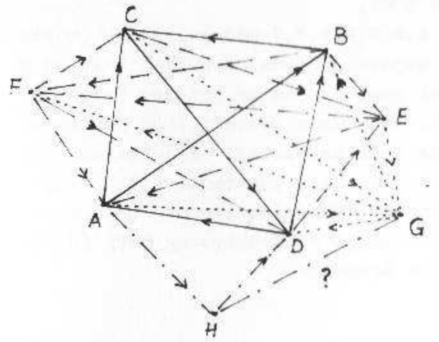
b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi sve do $n = k$, tj. da vrijedi $a_n = n$, $n = 1,2,\ldots,k$.

c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi $a_{k+1} = k + 1$.

Dokaz:

Neka je najveća zajednička mjera $M(k, k-1) = d$. Tada $d \mid k-(k-1)$, tj. $d \mid 1$, pa je $d = 1$. To znači da su k i k-1 relativno prosti brojevi, pa po definiciji niza izlazi: $a_{k^2-k} = a_{k(k-1)} = a_k \cdot a_{k-1} = k(k-1) = k^2-k$, zbog čega je $a_t = t$, $t \leq k^2-k$, pa onda i $a_{k+1} = k + 1$ (zbog $k+1 < k^2-k$, $k \geq 3$).

4)



Shvatimo gradove kao čvorove, a jednosmjerne puteve kao orijentirane grane grafa. Točku C nazovimo točkom I vrste točaka A i B ako ona zadovoljava uvjet (b), odnosno točkom II vrste ako zadovoljava uvjet (c). Neka su sada A i B proizvoljna 2 grada (čvora) i neka je C točka I, a D točka II vrste za A i B. Prema (a) postoji put (grana) koji povezuje A i B. Neka na primjer postoji orijentirani put (A,B) od A prema B (zbog simetrije slično bi bilo i za (B,A)). Tada postoji i orijentirani put (C,D) (prema (a) postoji put između C i D, a kada bi to bio (D,C), tada bi točke A i D imale 2 točke B i C I vrste, što je kontradikcija

sa (b)).
Neka je nadalje točka E točka I, a F točka II vrste za točke C i D (prema (b) i (c) te točke moraju postojati, a prema (a) to ne mogu biti ni A ni B). Točke E i F su spojene orijentiranim putevima sa A,B,C i D. Kako ne postoji put (A,E) (jer bi A i D imali 2 točke E i B I vrste), ostaje da postoji put (E,A). Analogno se pokazuje da postoje putevi: (B,E) (jer bi u protivnom D i E bile 2 točke II vrste za točke A i B, što je kontradikcija sa (c)), te (E,F), (F,A) i (B,F) (jer bi u protivnom redom točke E i C, C i F, B i C bile 2 točke I vrste redom za točke B i C, A i B, A i F).
Ni jedna od točaka B,C,D,F nije točka I vrste za točke A i E (zašto ?). Neka je to točka G, tj. neka postoje putevi (A,G) i (E,G). Tada postoje putevi: (G,D),(G,F),(C,G),(G,B) (jer bi u protivnom redom točke B i G, C i G, B i G, E i G bile redom točke I,I,II,I vrste redom za točke A i D, A i F, C i F, B i C).
Na taj način 7 točaka A,B,C,D,E,F,G zadovoljavaju uvjete (a),(b),(c). No prema uvjetu zadatka mora biti više od 7 gradova. Neka je H osmi grad i neka na primjer postoji orijentirani put (A,H). Tada mora postojati orijentirani put (H,D) (zašto ?), pa onda ne postoji orijentirani put izmedju G i H (zašto ?), što je u kontradikciji sa (a).
Na sličan način dolazimo do kontradikcije ako umjesto (A,H) pretpostavimo postojanje orijentiranog puta (H,A).
S tim je tvrdnja zadatka dokazana.