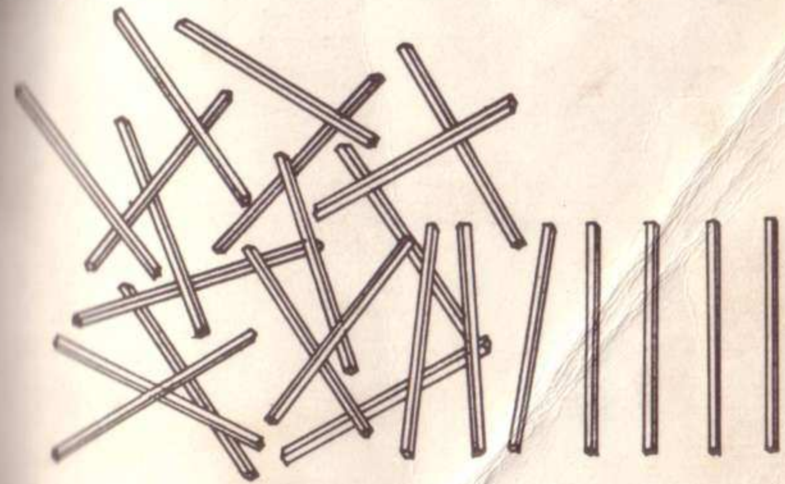
Najtoplije zahvaljujem **prof. Milanu Šariću** na poticaju i dozvoli da knjižicu
"Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola"
skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

MILAN ŠARIĆ

# MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1987. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA



DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

Recenzent
Luka Čeliković, prof.

Grafički crteži i prilozi
Radanović Marija

Tekst otipkao
Peran Josip, dipl. ecc.

TISAK GRO »SLOVO« BELI MANASTIR 465/88.

# SADRŽAJ

# SR HRVATSKA

POKRET "NAUKU MLADIMA" SR HRVATSKE

# M A T E M A T I K A

## PITANJA I ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

28. veljače 1987. godine

## V RAZRED

### PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. Izračunaj: $17806 : 58 \cdot 14 - 307 \cdot 13$.

2. Odredi skup $S$ onih prirodnih brojeva koji su djelitelji broja 18.

3. Zadani su skupovi $A = \{3, 6, 9\}$ i $B = \{2, 5\}$
   Odredi: a) $A \cup B$
   b) $A \cap B$.

4. Promotri sliku i odredi:
   a) $\overline{AC} \cup \overline{BD}$
   b) $\overline{AC} \cap \overline{BD}$.


5. Riješi jednadžbu: $(12 - 4 : 2) \cdot x = 30 - 6 \cdot 2 + 4 : 2$.

6. Odredi: a) $D(36, 60, 84)$
   b) $V(36, 60, 84)$.

7. Opseg pravokutnika u kojem je duljina jedna stranice dva puta veća od duljine druge, iznosi 42 cm. Kolike su duljine stranica tog pravokutnika?

### DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Da li postoji pet uzastopnih prirodnih brojeva čiji zbroj je prost broj?

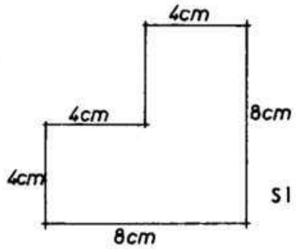
2. U izvodjenju jedne sletske vježbe sudjelovali su dječaci i djevojčice. Svako dijete imalo je ili crvenu ili plavu majicu. Dječaka je bilo 16, a djece koja su imala crvenu majicu ukupno 24. Djevojčica s plavom majicom je bilo onoliko, koliko i dječaka koji su nosili crvenu majicu.

Koliko je ukupno djece sudjelovalo u toj vježbi?

3. Škola je za odlazak svojih 708 učenika na jednodnevni izlet osigurala 15 autobusa, od kojih nekoliko imaju po 52 sjedala, a ostali imaju po 43 sjedala.

Koliko je bilo autobusa svake vrste, ako se zna da su prije kretanja sva mjesta u autobusima bila popunjena?

4. Zadani lik podijeli na četiri lika jednaka po obliku i izračunaj opseg i površinu tih dijelova!




Sl. 1

## VI RAZRED

### PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. Zbroj brojeva 345.09 i 16.017 pomnoži sa 0.01.

2. Izračunaj: $(2.7 - \frac{3}{7}) : 3$.

3. Izračunaj: $2 - (4 + 12 : 4) + 4 - 3 \cdot (5 - 9) : (-2)$.

4. Izračunaj: $\frac{5 - 8}{6 - 10} : \frac{-1 - 2}{6 + 2}$.

5. Zadana je funkcija $f(x) = -3x + 1$. Izračunaj:
a) $f(-2)$
b) $f(\frac{2}{7})$.



6. Riješi jednadžbu: $\frac{-6}{x} = (-6) : (-2)$.

7. Riješi jednadžbu: $2x - \frac{3}{7} = \frac{1}{2}$.

8. Koliki je opseg vrta pravokutnog oblika ako mu je duljina 36 metara, a širina $\frac{5}{6}$ duljine?

9. Zbroj kutova $\angle\alpha$ i $\angle\beta$ iznosi $72^\circ$. Koliki su $\angle\alpha$ i $\angle\beta$ ako je $\angle\alpha$ sedam puta veći od $\angle\beta$?

### DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Riješi jednadžbu

$$((6\frac{3}{7} - \frac{0.75x - 2}{0.35}) \cdot 2.8 + 1.75) : 0.05 = 235$$

10. Zbroj tri broja jednak je 1365. Ako prvi broj pomnožimo sa 8, drugi sa 4, a treći sa 6, tada će dobiveni umnošci biti jednaki.
Nadji te brojeve.

11. Učenici jednog odjeljenja 6. razreda pisali su kontrolni rad iz matematike. Trećina učenika nije pravilno riješila jedan zadatak, četvrtina dva zadatka, šestina tri zadatka, a osmina učenika je pogrešno riješila sva četiri zadatka.

Koliko je učenika riješilo pravilno sve zadatke, ako u odjeljenju nema više od 30 učenika?

4. Da bi se obojali svi zidovi sobe oblika kvadra potrebno je dvostruko više boje nego za bojenje stropa. Koliki je volumen te sobe, ako njezina duljina iznosi 7 metara, a širina 5 metara?

## VII RAZRED

### PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. Izračunaj: $\frac{1}{2} - 2 : \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2}$.

2. Riješi jednadžbu: $0.5 - \frac{1}{4}x = 0.25 : \frac{1}{8}$.

3. Riješi nejednadžbu: $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} > - \frac{5}{4}$.

4. Koji broj je za $\frac{2}{3}$ veći od razlike brojeva $\frac{7}{5}$ i $\frac{3}{4}$ ?

5. Koji od uredjenih parova $(-1, -\frac{3}{2})$, $(0, -\frac{1}{2})$, $(10, -11)$, zadovoljava jednadžbu $x + y = -\frac{1}{2}$ ?

6. 1 $cm^3$ leda ima masu 0.92 grama. Kolika je masa 1 $dm^3$ leda?

7. Ako se od nekog broja oduzme 6.2% dobije se 4.69. Koji je to broj?

8. Opseg jednakokračnog trokuta je 42 cm. Kolike su duljine stranica trokuta ako je krak tri puta veći od osnovice?

9. Zajam od 24000 dinara posudjen uz kamatnu stopu od 8% bit će vraćen u roku od 6 mjeseci.

Koliku ukupnu svotu treba vratiti?

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Izračunaj: $\dfrac{(1.75 : \frac{2}{3} - 1.75 \cdot 1\frac{1}{8}) : \frac{7}{12}}{(\frac{17}{80} - 0.0325) : 400} : (6.79 : 0.7 + 0.3)$.

2. Brojnik nekog razlomka poveća se za 32%, a nazivnik se poveća za 54%. Da li se vrijednost razlomka povećala ili smanjila i koliko posto?

3. Simetrala $\angle BAD$ paralelograma ABCD presijeca produžetak stranice $\overline{DC}$ u točki M, koja je udaljena od točke C 5 cm.

Odredi duljine stranica paralelograma, ako je opseg paralelograma 48 cm.

4. Broj godina koje otac ima sada jednak je broju mjeseci koji je imao njegov sin, kada je otac bio 9 puta stariji od sina. Koliko godina ima otac ako je poznato da je on stariji od sina za 26 godina i 8 mjeseci?

## VIII RAZRED

PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. Izračunaj: $8 - (18 - 6 : 3) + 4 + 3 \cdot (4 - 8) : 2$.



2. Izračunaj: $(1\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}) : 2$.

3. Kvadriraj: $(1 - \frac{1}{2}a)^2$.

4. Funkcija $f: R \to R$ je zadana formulom $f(x) = -\frac{1}{2}x - 5$. Izračunaj $f(-2)$.

5. Zadana je funkcija $f(x) = -2x + 3$.
   a) Koje od točaka $A(1,5)$ $B(-1,5)$ $C(0,3)$ pripadaju grafu funkcije f?
   b) U kojoj točki graf funkcije f siječe os x?

6. Riješi sustav jednadžbi: $3x - 2y = 1$
   $2x + y = 3$.

7. Podijeli polinome:
   $(x^3 - 27) : (x - 3)$.

8. Opseg pravokutnika, u kojem je duljina jedne stranice tri puta veća od duljine druge, iznosi 32 cm. Kolike su duljine stranica tog pravokutnika?

9. Koliki je opseg trokuta $\Delta ABC$ kojemu su koordinate vrhova $A(-4,0)$ $B(0, 0)$ $C(0, 3)$ ?

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Kada su prije nekoliko dana upitali jednu učenicu koliko godina ima njen tata, ona je odgovorila: "Moj tata je 1969. godine navršio onoliko godina koliko iznosi zbroj znamenaka njegove godine rodjenja".

Koje godine je rodjen tata ove učenice i koliko godina ima?

2. Zadan je pravac p jednadžbom $2x - 3y - 18 = 0$ i njegova točka $B(6, -2)$.
   a) Napiši jednadžbu pravca q koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava i okomit je na pravac p.
   b) Odredi koordinate sjecišta A pravaca p i q.
   c) Odredi koordinate četvrtog vrha C paralelograma OABC.

3. Središte upisane kružnice jednakokračnog trokuta ABC dijeli visinu spuštenu na osnovicu $\overline{AB}$, na dijelove 5 cm i 3 cm, računajući od vrha C. Odredi duljine stranica trokuta ABC.

4. U ravnini je zadano 6 točaka od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Dokaži, da tri točke iz te šestorke čine trokut s kutom ne manjim od $120^\circ$.

## PITANJA I ZADACI ZA REPUBLIČKI SUSRET UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

Pula, 28. 03. 1987.

### VII RAZRED

1. Ako izmedju znamenaka dvoznamenkastog broja upišemo taj dvoznamenkasti broj, tada je novi četveroznamenkasti broj 77 puta veći od danog dvoznamenkastog broja.
Koji je to dvoznamenkasti broj?

2. Neka matematička zadaća sastojala se od tri zadatka. Prvi zadatak riješilo je ukupno 82% svih učenika, drugi 78%, treći 78%. Prvi i drugi zadatak riješilo je 62%, prvi i treći 66%, a drugi i treći 60%, dok je sva tri zadatka riješilo 25 učenika.
Koliko je učenika rješavalo zadaću?

3. Za koju vrijednost parametra m sustav
$mx - y = 2$
$2x + y = 3m$
ima cjelobrojno rješenje?

4. Koliki je zbroj pet kutova u šiljcima bilo koje petokrake zvijezde?

5. Na simetrali vanjskog kuta $\measuredangle$ trokuta ABC odredi točku D tako, da zbroj udaljenosti $|CD| + |BD|$ bude što manji.

### VIII RAZRED

1. Odredi četiri uzastopna prirodna broja, ako je umnožak prvog i drugog za 38 manji od umnoška trećeg i četvrtog.

2. Nadji jednadžbe dvaju pravaca koji prolaze točkom T (3,4), ako jedan od njih prolazi ishodištem, a s osi x zatvaraju trokut površine P = 14.

3. Tri jednaka traktora obradjuju dva polja različitih površina. Ako sva tri traktora najprije preoru prvo polje, a zatim dva od njih preoru i drugo, posao ukupno traje 12 sati. Ako sva tri traktora završe polovicu ukupnog posla, a drugu polovicu obavi jedan traktor, ukupno je potrebno 20 sati.
Za koliko vremena mogu dva traktora preorati prvo polje?



4. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC ($\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 6$) odabrane su točke D, odnosno E, tako da bude $\overline{AD} = \overline{CE} = 2$. Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki S.
Izračunaj površinu trokuta ABS.

5. U prve razrede jednog srednjoškolskog centra upisalo se ukupno 110 učenika. Svaki od njih poznaje otprije barem jedanaestoricu. Dokaži da svaki učenik prvog razreda ima dva poznanika kojima on nije jedini zajednički poznanik.

# R J E Š E N J A

## V R A Z R E D

### PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. 307. 2. $S = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. 3. a) $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 9\}$ b) $A \cap B = \emptyset$. 4. a) $\overline{AC} \cup \overline{BD} = \overline{AD}$. b) $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \overline{BC}$. 5. $x = 2$. 6. a) $D(36,60,84) = 12$ b) $V(36,60,84) = 1260$. 7. Duljine stranica su 7 cm i 14 cm.

### DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Pet uzastopnih prirodnih brojeva su $n$, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$. Njihov zbroj je $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10$. Dobiveni zbroj djeljiv je sa 5. Dakle, ne postoji pet uzastopnih prirodnih brojeva čiji je zbroj prost broj.

2. Skupovi dječaka i djevojčica nemaju zajedničkih elemenata isto kao i skupovi djece scrvenom i plavom majicom. Ako pretpostavimo da dječaka sa crvenom majicom ima $x$, onda dječaka s plavom majicom ima $16 - x$

   Kako djece sa crvenom majicom ima 24, to djevojčica sa crvenom majicom ima $24 - x$.
   Prema uvjetu zadatka, djevojčica s plavom majicom ima kao i dječaka sa crvenom majicom, tj. $x$.

   Prema tome broj djevojčica jednak je broju djece sa crvenom majicom. U vježbi je, dakle, sudjelovalo $16 + 24 = 40$ djece.

3. Neka je $x$ broj autobusa sa 52 sjedala, tada je $15 - x$ broj autobusa sa 43 sjedala.
   U autobusima prve vrste sjedi $52x$ učenika, a u autobusima druge vrste $43 \cdot (15 - x)$ učenika.

   Sada imamo

$$\begin{aligned} 52x + 43(15 - x) &= 708 \\ 52x + 645 - 43x &= 708 \\ 9x &= 63 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

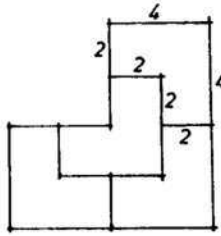
   Dakle, bilo je 7 autobusa sa 52 sjedala i 8 autobusa sa 43 sjedala.



II način:

Pretpostavimo da je svih 15 autobusa sa 43 sjedala. Tada bi se moglo smjestiti $43 \cdot 15 = 645$ učenika. Ostatak, $708 - 645 = 63$ učenika morao bi, dakle, biti smješten u veće autobuse, i to $52 - 43 = 9$ učenika u svaki autobus. Kako je $63 : 9 = 7$, to je bilo 7 autobusa sa 52 sjedala i 8 autobusa sa 43 sjedala.

4.




Sl. 2

$P = (4 \cdot 4 - 2 \cdot 2)\ cm^2$
$P = 12\ cm^2$.
$O = (2 \cdot 4 + 4 \cdot 2)\ cm$
$O = 16\ cm$.

## VI R A Z R E D

### PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. 3.61107. 2. $\frac{53}{70}$. 3. $-7$. 4. $-2$. 5. a) 7 b) $\frac{1}{7}$.
6. $x = -2$. 7. $x = \frac{13}{28}$. 8. 132 metra. 9. $\alpha = 63^\circ$ $\beta = 9^\circ$.

### DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. $(6\frac{3}{7} - \frac{0.75x - 2}{0.35})\ 2.8 + 1.75 = 235 \cdot 0.05 = 11.75$

$$(6\frac{3}{7} - \frac{0.75x - 2}{0.35})\ 2.8 = 11.75 - 1.75 = 10$$

$$6\frac{3}{7} - \frac{0.75x - 2}{0.35} = 10 : 2.8 = \frac{25}{7}$$

$$\frac{0.75x - 2}{0.35} = 6\frac{3}{7} - \frac{25}{7} = 20/7$$

$$0.75x - 2 = \frac{20}{7} \cdot 0,35 = 1$$

$$0.75x = 2 + 1 = 3$$

$$x = 4.$$

2. Neka su traženi brojevi $a$, $b$, $c$. Tada je $a + b + c = 1365$
   Označimo sa $x$ jednake umnoške, tj. $8a = 4b = 6c = x$.
   Odavde je očito $a = \frac{x}{8}$, $b = \frac{x}{4}$, $c = \frac{x}{6}$

Na temelju ovog, polazni zbroj poprima oblik

$\frac{x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 1365$

odnosno $x \cdot (\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}) = 1365$

tj. $x \frac{13}{24} = 1365$

Nepoznati umnožak je $x = 1365 : \frac{13}{24}$, $x = 2520$

Traženi brojevi su: a = 315, b = 630, c = 420.

3. Neka je x broj učenika u razredu. Broj učenika x mora biti djeljiv sa 3, 4, 6 i 8. Imamo V(3,4,6,8) = 24. Slijedeći višekratnik brojeva je 48 > 30, dakle je x = 24.
$\frac{1}{3}\cdot 24 = 8$, $\frac{1}{4}\cdot 24 = 6$, $\frac{1}{6}\cdot 24 = 4$, $\frac{1}{8}\cdot 24 = 3$.
Prema tome, broj učenika koji su pravilno riješili sve zadatke je 24 - (8 + 6 + 4 + 3) = 3.

4. Prema uvjetu zadatka imamo $2\cdot ab = 2\cdot(ac + bc)$, a odavde je $c = \frac{ab}{a+b} = \frac{35}{12}$ m.

$$V = a\cdot b\cdot c = 7\cdot 5\cdot \frac{35}{12} = \frac{1225}{12} = 102\frac{1}{12}\ m^3$$

## VII RAZRED

### PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. $-7\frac{1}{2}$. 2. $x = -6$. 3. $x > -3$. 4. $\frac{79}{60}$ 5. $(0, -\frac{1}{2})$

6. 920 grama. 7. 5. 8. $42 = a + 2\cdot 3a$
$a = 6$ cm $b = 18$ cm 9. 24960 dinara

### DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. $$\frac{(1.75 : \frac{2}{3} - 1.75\cdot 1\frac{1}{8}) : \frac{7}{12}}{(\frac{17}{80} - 0.0325) : 400} : (6.79 : 0.7 + 0.3) =$$

$$= \frac{(\frac{21}{8} - \frac{63}{32})\cdot \frac{12}{7}}{\frac{18}{100} : 400} : 10 = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{20000}} : 10 = 2500 : 10 = 250$$

2. Neka je $\frac{a}{b}$ zadani razlomak. Tako će nakon povećanja brojni i nazivnik poprimiti vrijednosti $1.32a$, $1.54b$.

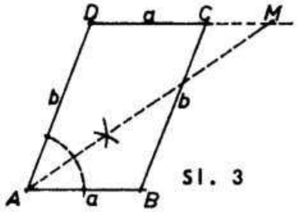


Novi razlomak imat će vrijednost

$$\frac{1.32a}{1.54b} = \frac{132a}{154b} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 11\cdot a}{2\cdot 7\cdot 11\cdot b} = \frac{6}{7}\cdot\frac{a}{b}.$$

Vrijednost razlomka se smanjila za $\frac{1}{7}$ što u postocima iznosi 14.28%.

3.




Sl. 3

Najprije je $\measuredangle BAM = \measuredangle DMA$ (kutovi su transverzalni)

Dalje, zbog $\measuredangle BAM = \measuredangle DAM$ proizlazi $\measuredangle DAM = \measuredangle DMA$, pa je trokut ADM jednakokračan, tj. $|AD| = |DM|$

Odavde slijedi da je $b = a + 5$

Za opseg imamo $O = 2a + 2b = 2a + 2(a + 5) = 4a + 10$

Dakle je $4a + 10 = 48$, tj. $a = \frac{19}{2} = 9.5$ cm

Konačno iz $b = a + 5$ dobivamo $b = 14.5$ cm

4. Neka otac ima sada x godina, tj. sin je imao x mjeseci kad je otac bio 9 puta stariji od njega. Kada je sin imao x mjeseci, otac je imao 9 x mjeseci

Kako je otac stariji od sina 26 godina i 8 mjeseci, tj. 320 mjeseci, dobivamo $9x - x = 320$ odnosno $8x = 320$
Konačno je $x = 40$. Otac sada ima 40 godina.

## VIII RAZRED

### PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. -10. 2. -5/8. 3. $1-a+1/4a^2$. 4. -4.
5. a) Bi C, b) (3/2,0). 6. x=1, y=1. 7. $x^2+3x+9$.
8. a=12, b=4. 9. 0=12.

### DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Očito da otac nije rodjen $\overline{18xy}$. godine jer bi tada zbroj znamenaka godine rodjenja bio maksimalno 27 (za godinu 1899), a 1969. godine bi otac imao najmanje 70 godina. Neka je $\overline{19xy}$ godina rodjenja oca. Tada imamo:

$$1969-\overline{19xy}=1+9+x+y, \text{ odakle je}$$
$$11x+2y=59,\quad x,y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$y=\frac{59-11x}{2},\quad x=5,\quad y=2.$$

Otac je rodjen 1952. godine i sada ima 35 godina.

2. a) $y=-\frac{3}{2}x$.

b) $p\cap q = A\ (36/13,\ -54/13)$.

c) $D\ (42/13,\ 28/13)$.

3. Iz trokuta SCD lako izračunamo stranicu $\overline{CD}$

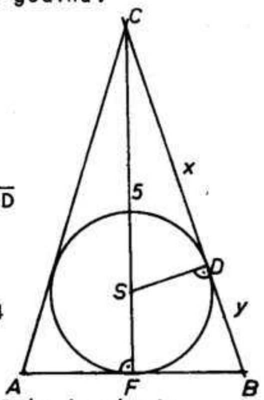
$\overline{CD}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

Trokutu CFB i CSD su slični (sva tri kuta su jednaka).

y:8=3:4

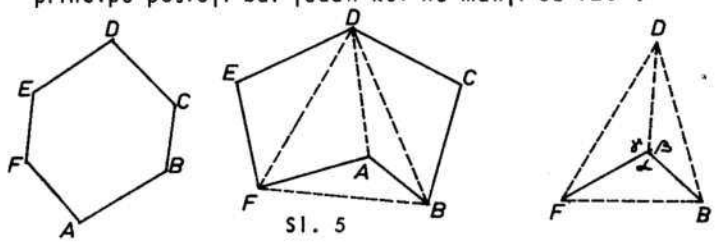
y = 6 cm.

$\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=\overline{AC}=16$.



Sl. 4

4. Neka su A, B, C, D, E i F šest zadanih točaka i neka je šesterokut konveksan. Kako je zbroj kutova u tom šesterokutu jednak $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$ tada po Dirichletovom principu postoji bar jedan kut ne manji od $120^\circ$.



Sl. 5



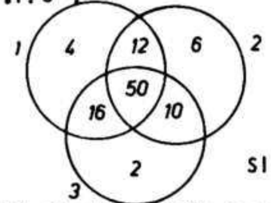
Neka je šesterokut ABCD konkavan. Tada postoji trokut čiji su vrhovi 3 od tih šest zadanih točaka i u čijoj se unutrašnjosti nalazi jedna od tri preostale točke. Neka je točka A u unutrašnjosti trokuta FBD. Točka A se ne nalazi na stranicama tog trokuta jer su svake tri zadane točke nekolinearne. Kako je $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$, tada po Dirichletovom principu mora biti bar jedan od kutova $\alpha,\beta,\gamma$ ne manji od $120^\circ$.

## REPUBLIČKO NATJECANJE

## VII RAZRED

1. Neka je $10a+b$ dati broj. Prema uvjetu je: $1000a+100a+10b+b=77\ (10a+b)$. Sredjivanjem ovog izraza dobijemo: $5a=b$. Kako su a i b znamenke i $a\neq 0$, izlazi da je $a=1$ i $b=5$. Dvoznamenkasti broj je 15.

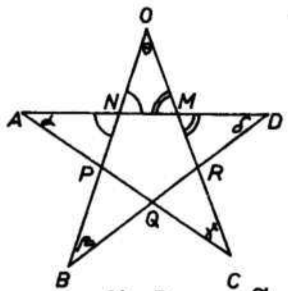
2. Zbrajanjem postotaka (82 + 78 + 78) utvrdimo da je zadatke rješavalo 238 postotaka učenika. Kako učenika ima točno 100%, višak od 138% označava koliko ima učenika koji su izradili više od jednog zadatka. Zbrajanjem datih postotaka učenika koji su riješili po dva zadatka, utvrdimo da ih ima 188% ili 50% više od nadjenih 138%. Tih 50% viška su učenici koji su riješili sva tri zadatka. Kako je poznato da takvih učenika ima 25, slijedi da je zadatke rješavalo ukupno 50 učenika, sl. 6.



Sl. 6

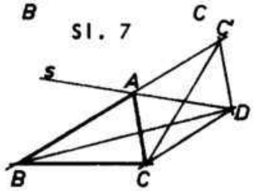
3. Zbrajanjem datih jednadžbi dobijamo: $(m+2)x = 3m+2$, koja ima rješenje $x=\frac{3m+2}{m+2}$. Na osnovu prve jednadžbe zaključujemo, ako je vrijednost x cijeli broj, onda je y cijeli broj. Medjutim: $x=\frac{3m+6-4}{m+2}=\frac{3(m+2)-4}{m+2}=3-\frac{4}{m+2}$. Ovaj izraz je cijeli broj ako se $(m+2)$ sadrži u 4, a to je za $m\in\{-6,-4,-3,-1,\ 0,2\}$.

4. Uočimo petokraku zvjezdu na sl.7 i na njoj trokut OMN. Vidimo da je $\measuredangle OMN = \measuredangle DMR = \alpha + \gamma$ (jer je $\measuredangle DMR$ vanjski u trokutu ACM). Slično dokazujemo da je $\measuredangle ONM = \beta + \delta$. Kako je zbroj kutova u trokutu 180°, odakle zamjenom dobijamo zbir traženih kutova: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \theta = 180°$.



Sl. 7

5. Neka je D bilo koja točka date simetrale s vanjskog kuta i neka je C′ točka simetrična sa C u odnosu na s. Točka C′ pripada pravcu $\overline{AB}$, sl. 8. Tada je $\overline{DC'} = \overline{DC}$, pa je: $\overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BD}+\overline{DC'}$, a na osnovu nejednakosti trokuta biće: $\overline{BD}+\overline{DC'} \geq BC$, gdje je dužina $\overline{BC'}$ fiksirana. Znak jednakosti važi samo ako $D \in \overline{BC'}$, a to će biti kada je D = A. Tražena točka je D = A.



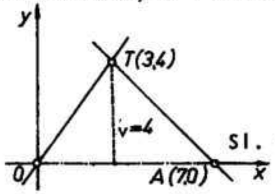
Sl. 8

## VIII RAZRED

1. Neka su a, a+1, a+2, a+3 traženi brojevi. Tada je $a(a+1)+38 = (a+2)(a+3)$. Odavde je a=8, pa su traženi brojevi: 8,9,10,11.

2. Jedan pravac je $\overline{OT}$, a drugi ćemo značiti sa $\overline{AT}$, sl.9. Prema uvjetu, površina trokuta OAT je 14, pa kako je visina $v=4$, imamo: $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \overline{OA}=14$, odakle je $\overline{OA}=7$.

Sada nije teško odrediti jednadžbe ovih pravaca, jer su im poznate koordinate po dvije točke. Traženi pravci su: $\overline{OT}: 4x-3y=0$ i $\overline{AT}: x+y=0$.



Sl. 9

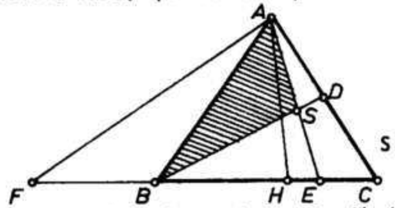
3. Pretpostavimo da bi jedan traktor obradio prvo polje za a sati i drugo polje za b sati. Tada dobijamo jednadžbe:

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=12 \text{ i } \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}\right)+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=20.$$

Odavde dobijamo: a=18, b=12. Dakle, dva traktora mogu preorati prvo polje za 9 sati.

4. Površinu trokuta ABE lako izračunamo. Pomoću Pitagorinog teorema, iz trokuta ABH izračunamo dužinu visine $\overline{AH}$: $d(A,H)=4$, $P=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$.

Dokazaćemo da je točka S središte dužine $\overline{AE}$. Neka je na produžetku stranice $\overline{BC}$ točka F, takva da je $\overline{AF} \parallel \overline{BD}$, sl.10. Tada je $\overline{CD}:\overline{DA}=\overline{CB}:\overline{BF}$, odakle izlazi da je $\overline{BF}=4$. Dakle, točka B je središte dužine $\overline{EF}$, pa je $\overline{BS}$ srednja linija trokuta AEF, što znači da je S središte dužine $\overline{AE}$. Prema tome, površina trokuta ABS, to je tražena površina, jednaka je polovini površine trokuta ABE, tj. tražena površina je 4.



Sl. 10

5. Pretpostavimo da postoji učenik A koji ima 11 poznanika i da medju njima ne postoje dva koji imaju još jednog zajedničkog poznanika, osim učenika A. Tada svaki od njih poznaje po 11 različitih učenika. Medjutim to nije moguće, jer bi tada bilo $1+11\cdot 11=122$, odnosno 122 učenika.

# SR SRBIJA

DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE

REPUBLIČKA KOMISIJA ZA MLADE MATEMATIČARE IZ OSNOVNIH ŠKOLA

# OPĆINSKO NATJECANJE

07. 03. 1987.

## IV RAZRED

1. Mira, Vesna i Nada potroše na pijaci 5280 dinara. Mira je potrošila 340 dinara više od Vesne, a tri puta manje od ukupne sume koju su potrošile Vesna i Nada. Koliko je potrošila svaka domaćica?

2. Na rijeci je bilo 12 čamaca od kojih veći imaju po 8, a manji po 5 sjedišta. Koliko je bilo većih, a koliko manjih čamaca, ako je ukupan broj sjedišta 75?

3. Ako se stranica datog kvadrata uveća za 10 cm, njegova površina se uveća za 200 $cm^2$. Odrediti opseg i površinu datog kvadrata.

4. Koliko peteroznamenkastih brojeva se završava znamenkom 4? Koliko peteroznamenkastih brojeva počinje i završava se znamenkom 7?

5. Prvih devet parnih prirodnih brojeva rasporedi u kvadratnu tablicu (3x3) tako da se dobije magični kvadrat.

## V RAZRED

1. Umjesto zvjezdica u broju 523*** napiši odgovarajuće znamenke tako da dobijeni broj pri dijeljenju sa 7, 8 i 9 daje ostatak 6.

2. Povlačeći 4 pravca podijeliti zadani krug na najveći mogući broj dijelova.

3. Odrediti sve proste brojeva p za koje je točna nejednakost:
$$8/63 < 1/p < 2/5.$$

4. Odrediti sve prirodne brojeve čiji je produkt znamenki jednak 528.

5. Kut x veći je od svog suplementnog kuta y za toliko za koliko je kut y veći od svog komplementnog kuta z. Odredi kutove x, y i z.

## VI RAZRED

1. Racionalan broj $-4/7$ nastao je skraćivanjem racionalnog broja čiji brojnik i nazivnik imaju zbroj 885. Odrediti prvobitan racionalan broj.

2. Kada se iz jednog punog bureta prelije u drugo prazno bure 1/6 tekućine, a zatim 2/3 preostale tekućine, tada u drugo bure ne bi moglo da stane 48 litara. Koliko litara sadrži svako bure ako u prvo stane dva puta više tekućine nego u drugo.

3. U trokutu ABC točka M je središte dužine $\overline{AB}$. Pravac p koji prolazi kroz M paralelan je sa simetralom kuta ACB, i presijeca pravac $\overline{BC}$ u točki D, a pravac $\overline{AC}$ u točki E. Dokazati da je trokut CDE jednakokračan.

4. Dat je trokut ABC. U vrhu A konstruirana je dužina $\overline{AD}$ okomita na $\overline{AC}$, tako da je $\overline{AD}=\overline{AC}$ i dužina $\overline{AE}$ okomita na dužinu $\overline{AB}$, tako da je $\overline{AE}=\overline{AB}$. Pri tom su D i B sa raznih strana $\overline{AC}$, a C i E sa raznih strana pravca $\overline{AB}$. Dokazati da je $\overline{BD}=\overline{CE}$.

5. U jednoj školi uči 1111 učenika. Dokazati da u toj školi postoje bar dva učenika koji imaju identične inicijale i da bar četiri učenika slave rodjendan istoga dana.

## VII RAZRED

1. Težište T trokuta ABC pripada krugu konstruiranom nad stranicom $\overline{AB}=8$ cm kao nad polumjerom, pri čemu je kut $TAB = 30^\circ$. Izračunati površinu tog trokuta.

2. Stranica trokuta je 10 cm, a kut nasuprot je $150^\circ$. Izračunati površinu kruga opisanog oko tog trokuta.

3. Dokazati da je $\sqrt{5}$ iracionalan broj.

4. Ako je p prost broj veći od 2, onda je broj $p^{1987} + 1987^p$ složen. Dokzati.

5. U kvadratu stranice 5 cm na proizvoljan način je razmješteno 51 točaka. Dokazati da se može konstruirati kvadrat površine 1 $cm^2$ unutar kojeg se nalaze bar tri date točke.



## VIII RAZRED

1. U krug polumjera $r = 12$ cm upisan je jednakokračan trokut čiji je kut pri vrhu $30^\circ$. Odrediti opseg i površinu datog jednakokračnog trokuta.

2. Konstruirati krug k koji sadrži datu točku A i dodiruje dati krug $k_1$ (O, r=2 cm) u datoj točki B.

3. Data je funkcija $f(x) = 2x - 1$. Odrediti funkciju $g(x)$ ako je $f(g(x)) = 6x + 3$.

4. Ako je p prost broj veći od 3 onda je $p^2 + 11$ djeljiv sa 11. Dokazati.

5. Odrediti sve cijele brojeve x i y za koje važi jednakost:

$$x^2 + y^2 = 2x .$$

## MEDJUOPĆINSKO NATJECANJE

## IV RAZRED

1. Oplošje kocke je 96 $cm^2$. Koliki je njen volumen?

2. Dešifriraj množenje:

```
 ** · **
 -------
     **
   97
 -------
  1***
```

3. Dva sata navijena su 4. aprila 1987. godine u 9 sati ujutro. Jedan od njih radi točno, a drugi žuri 3 minute svakoga sata. Kojeg dana i u koliko sati će oba sata ponovo pokazivati isto vrijeme?

4. Odrediti onaj dvoznamenkast broj koji se poveća 26 puta, ako mu se s lijeve strane dopiše broj 7.

5. Rasporedi 12 točaka na 6 pravaca tako da na svakom pravcu bude po 4 točke. Rješenje obrazloži crtežom.

## V RAZRED

1. Dat je broj 444...444, gdje se znamenka 4 ponavlja 1987 puta. Da li je dati broj djeljiv sa 8?

2. Iva može neki posao da završi za 18 dana. Ako bi taj posao s njim radio i Laza, onda bi posao završili za 12dana. Za koje bi vrijeme Laza sam uradio taj posao?

3. Za ispisivanje četveroznamenkastog broja koriste se samo znamenke 1,2 i 3. Koliko ima takvih brojeva koji su djeljivi sa 9?

4. Pravci a i b sijeku se u točki O pod šiljastim kutom. Na pravcu a data je točka A tako da je $\overline{OA}$ = 4 cm. Konstruirati krug koji prolazi kroz datu točku A i dodiruje pravce a i b. Koliko takvih krugova ima?

5. Zbroj dva razlomka s jednoznamenkastim nazivnicima je 11/18. Odrediti o kojim razlomcima je riječ. Koliko rješenja ima?

## VI RAZRED

1. Jedan radnik uradi jedan posao za 30 minuta, drugi za 60 minuta, a treći za 180 minuta. Za koliko minuta će uraditi taj posao sva tri radnika zajedno?

2. U tri cisterne bilo je ukupno 1560 litara mlijeka. U slučaju da iz prve odlijemo 3/7, iz druge 1/4, a iz treće 1/5 mlijeka u sve tri cisterne biće jednake količine mlijeka. Koliko je mlijeka u svakoj od cisterni?

3. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je vrijednost razlomka $\frac{24}{3n-4}$ takodjer prirodan broj.

4. Dat je pravokutni trokut ABC sa pravim kutom kod vrha C. Izvan trokuta konstruirani su kvadrati ABMN i ACPQ. Dokazati da su centri ovih kvadrata podjednako udaljeni od središta A katete $\overline{BC}$.

5. U paralelogramu ABCD na stranici $\overline{AB}$ data je točka K tako da je $\measuredangle AKD = \measuredangle DKC$. Ako je S središte dužine $\overline{KD}$, dokazati da je dužina okomita $\overline{CS}$ okomita na dužinu $\overline{DK}$.



## VII RAZRED

1. U pravokutnom trokutu jedna kateta je 24 cm, a hipotenuza je za 16 cm veća od druge katete. Kolika je površina tog trokuta, a kolika površina kruga opisanog oko trokuta?

2. Dat je pravokutnik čije su stranice a i b. Ako se a produži za b i b produži za a dobije se četverokut čija je površina 100 cm$^2$. Koliki je opseg četverokuta. Ako su dužine stranica pravokutnika cjelobrojne odrediti pravokutnik najmanje površine.

3. Gumica je za 20% jevtinija od bilježnice, a 25% skuplja od olovke. Koliko košta svaki od ovih predmeta, ako je za sve njih plaćeno 610 dinara?

4. Data je pravilna i uspravna jednakoivična šestostrana prizma ABCDEFA'B'C'D'E'F' čija je osnovna ivica a = 6 cm. Izračunati oplošje i volumen trostrane prizme ABDA'B'D'.

5. Na koliko različitih načina mogu za okrugli stol sjesti 3 dječaka i 3 djevojčice, tako da nikoje dvije osobe istog pola ne sjede jedna pored druge.

## VIII RAZRED

1. Opseg romba je 68 cm, a dijagonale se odnose kao 15:8. Odrediti površinu njemu sličnog romba, čija je stranica 34 cm.

2. Dokazati da je za svaki prirodan broj n izraz $n^3 - 1987n$ djeljiv sa 6.

3. U trokutu čije su stranice a=20 cm, b=13 cm i c= 21 cm točka M je podnožje najmanje visine. Neka su N,P,Q središta stranica $\overline{AB}$,$\overline{BC}$,$\overline{CA}$ trokuta ABC. Dokazati da je četverokut MNPQ jednakokračni trapez. Izračunati površinu trapeza MNPQ.

4. Zbroj dva razlomka sa jednoznamenkastim nazivnicima je 73/15. Odrediti sve razlomke sa datom osobinom.

5. Ako je a+b = 3 i a·b = 2 dokazati da je vrijednost izraza $a^4 + b^4 = 17$.

REPUBLIČKO NATJECANJE MLADIH MATEMATIČARA SR SRBIJE

Čačak, 09. 05. 1987.

## VI RAZRED

1. Odrediti brojeve a,b,c ako se zna da je njihov zbroj veći od broja a za 5/2, od broja b za 59/6 i od broja c za 5/3.

2. Iz punog balona čistog alkohola odlije se 1/4 i dolije voda. Zatim se ponovo iz balona odlije 1/3 tekućine i dolije voda. Čega trenutno u balonu ima više: vode ili alkohola?

3. U ravnini je dat pravac i točke A' i B' sa iste strane van pravca p. Konstruirati trokut ABC ako se vrhovi A i B nalaze na pravcu p i ako su $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ visine traženog trokuta ABC.

4. Dijagonale trapeza ABCD sijeku srednjicu trapeza $\overline{EF}$ u točkama $M \in \overline{AC}$ i $N \in \overline{DB}$ tako da je $\overline{MN} = \overline{EM} + \overline{NF}$. Ako je manja baza trapeza 10 cm, kolika je njegova veća baza?

5. Produkt dva troznamenkasta broja zapisuje se samo pomoću nekoliko znamenki 3. O kojim troznamenkastim brojevima je riječ?

## VII RAZRED

1. Dat je trokut ABC čije su stranice a=15, b=13 i c=14 cm. Na stranici $\overline{AB}$ date su točke D i E tako da je $\overline{CD}$ visina, a $\overline{CE}$ težišnica datog kuta. Odrediti površinu kruga opisanog oko trokuta CDE.

2. U trokutu ABC kut $\measuredangle BAC = 70^\circ$, a kut $\measuredangle ABC = 50^\circ$. Točka M se nalazi unutar trokuta ABC pri čemu je $\measuredangle MAC = \measuredangle MCA = 40^\circ$. Odrediti kutove $\measuredangle AMB$ i $\measuredangle BMC$.

3. Dijagonalni presjek pravilne i uspravne četverostrane piramide je istostranični trokut čija je površina $14\sqrt{3}$ cm$^2$. Izračunati oplošje i volumen piramide.

4. Dat je konveksan deseterokut. Koliko je ukupno trokutova odredjeno vrhovima datog desetokuta.

5. Produkt dva troznamenkasta broja zapisuje se samo pomoću nekoliko znamenki 7. O kojim troznamenkastim brojevima je riječ?

## VIII RAZRED

1. Za koju vrijednost brojeva x i y je izraz $4x^2 + 9x^2 - 12x + 30y + 1987$ najmanji? Koliko iznosi najmanja vrijednost datog izraza?

2. Nacrtati graf funkcije: $y = |x - |x||$.

3. Dijagonale stranica kvadra su 15 cm, $\sqrt{481}$ cm i $\sqrt{544}$ cm. Odrediti oplošje i volumen kugle opisane oko datog kvadra.

4. U trokutu ABC date su visine $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$. Dokazati da je $\measuredangle ADE = \measuredangle ACE + \measuredangle CBD$.

5. Četrdeset krava popase jednu livadu za 50 dana. Koliko dana će datu livadu pasti 20 krava? Koliko krava može pasti na livadi 75 dana?

# R J E Š E N J A

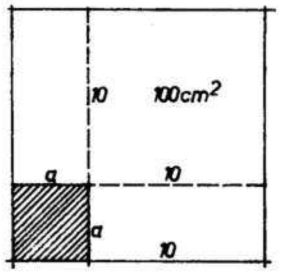
## OPĆINSKO NATJECANJE

### IV RAZRED

1. Mira je potrošila jedan dio, a Vesna i Nada tri puta više. Prema tome Mira je potrošila 5280:4 = 1320 dinara. Vesna je potrošila 340 dinara manje, dakle 980 dinara. Nada je potrošila 5280-(1320+980) = 5280 - 2300 = = 2980 dinara.

2. Neka je broj čamaca sa 8 sjedišta x. Tada je malih čamaca sa 5 sjedišta 12-x, pa je 8 x + 5(12-x) = 75. Dakle 8x + 60 - 5x = 75, odnosno 3x = 75 - 60 = 15, pa je x=5. Znači da velikih čamaca ima 5(40 sjedišta), a malih 7 (35 sjedišta).

3. Ako je stranica datog kvadrata dužine a, tada njenim uvećavanjem za 10 cm dobijamo dva pravokutnika čije su stranice a i 10 i kvadrat stranice 10 cm. Kako je površina




Sl. 1



kvadrata poznata i iznosi 10 · 10 = 100, to je zbroj površina pravokutnika 200-100 = 100, a površina jednog pravokutnika 50. Nepoznata stranica kvadrata je a = 50:10 = 5 cm. Prema tome opseg kvadrata je 20 cm, a površina 25 cm$^2$.

4. U broju ****4 umjesto zvjezdica može stajati bilo koji četveroznamenkasti broj, pa kako četveroznamenkastih brojeva ima točno 9000, to se i 9000 peteroznamenkastih brojeva završava znamenkom 4.
U broju 7***7 umjesto zvjezdica može stajati bilo koji broj počevši od broja 000 do 999, a takvih brojeva ima točno 1000, pa točno 1000 brojeva počinje i završava sa znamenkom 7.

5. Traženi magični kvadrat dat je na slijedećoj slici, ali je moguć i drugačiji raspored brojeva.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 18 | 4 |
| 6 | 10 | 14 |
| 16 | 2 | 12 |

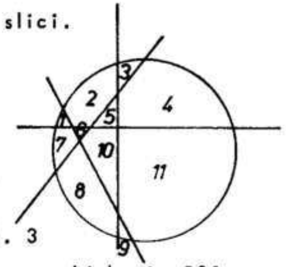
Sl. 2

### V RAZRED

1. Kako je ostatak pri dijeljenju broja 523000 brojem 504 = = NZD(7,89) jednak 352 to su traženi brojevi jednaki: 523000-352+504+6 = 523000+510-352 = 523158 i 523158+ +504 = 523662.

2. Rješenje zadatka dato je na narednoj slici. Najveći mogući broj dijelova je 11.

3. Kako je $8/64 < 8/63 < 1/p < 2/5 <$ $< 1/2$ to je $1/8 < 1/p < 1/2$. Iz dobijene jednakosti je očigledno $2 < p < 8$. Kako je p prost broj to datu nejednakost zadovoljavaju samo brojevi 3.5 i 7.




Sl. 3

4. Kako je $528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$, to jedna od znamenki broja 528 mora biti 11. Očigledno je 11 dvoznamenkast broj i ne može biti znamenka, pa prirodan broj čiji je produkt znamenki 528 ne postoji.

5. Očigledno je z najmanji od traženih kutova. Njegov

komplementni kut $y = 90 - z$, a kut koji je suplementan sa $y$ je $x = 90+z$. Kako je zbog uvjeta zadatka $90+z-(90-z) = 90-z-z$, to je $2z = 90-2z$, odakle je $4z = 90$, a samo $z = 22{,}5$ stupnjeva. Dakle $y=90-z=67.5$ i $x=90+z=112.5$ stupnjeva.

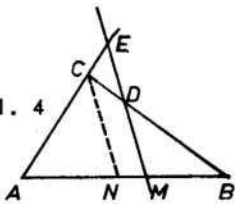
## VI RAZRED

1. Prije skraćivanja racionalan broj $-4/7$ je imao oblik $-4k/7k$ ($k$ je cijeli broj). Kako je $-4k + 7k = 885$, to broj $k$ izračunavamo iz jednadžbe $3k = 885$ ili $k=295$. Prema tome naš traženi razlomak je $-4 \cdot 295/ 7 \cdot 295 = -1180/2065$.

2. Kada se iz punog bureta prelije 1/6 tekućine buretu ostane 5/6 tekućine. Ako odlijemo još 2/3 ostatka odlili smo još 5/9 tekućine, što zajedno sa 1/6 koja je već odlivena iznosi 13/18 tekućine. Kako u drugo bure stane upola manje tekućine to se iz prvog prelilo 48 litara ili 4/18 ukupne količine tekućine. Dakle 1/8 tekućine iznosi 12 litara. Volumen velikog bureta je $18 \cdot 12 = 216$ litara, a u manjem buretu je upola manje 108 litara.

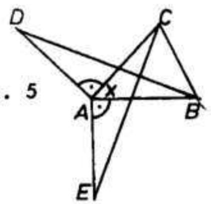
3. Kut ACN jednak je kutu CED, kao kutovi sa paralelnim kracima ($\overline{CN} \parallel \overline{DE}$). Kut CDE jednak je kutu MDB kao kutovi sa zajedničkim i okomitim kracima, a kut MDB jednak je kutu NCB kao kutovi s paralelnim kracima. Kako je kut NCB jednak kutu ACN to je i kut CDE jednak sa ACN. Dakle kut CED jednak je kutu CDE, pa je trokut CDE jednakokračan.

Sl. 4




4. Trokutovi ABD i ACE su sukladni: $\overline{AB} = \overline{AE}$, $\overline{AD} = \overline{AC}$ i $\measuredangle BAD = 90^\circ + x = \measuredangle CAE$. Iz sukladnosti zaključujemo jednakost $\overline{BD} = \overline{CE}$.

Sl. 5

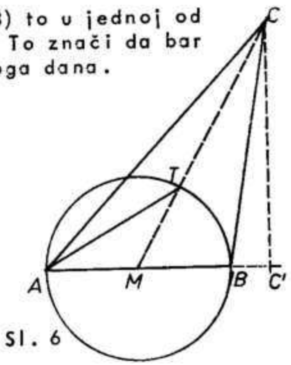



5. Ukupan broj mogućih inicijala je $30 \cdot 30=900$, jer 30 početnih slova imena kombiniramo sa 30 početnih slova prezimena. Sve učenike podijelimo u 900 klasa tako da se u istoj klasi nadju oni koji imaju jednake inicijale.

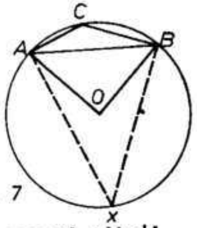


Kako je broj učenika 1111, a broj klasa 900, to se bar u jednoj klasi nalaze dva učenika.
Kako je $1111:366=3(13)$ (ostatak je 13) to u jednoj od uočenih 366 klasa ima bar 4 učenika. To znači da bar 4 učenika u školi slave rodjendan istoga dana.

## VII RAZRED




1. Kako je trokut ABT pravokutan i kut $TAB=30^\circ$ to je $\overline{AM}=\overline{MB}=\overline{MT}=4$ cm. Tada je $\overline{MC}=3 \cdot \overline{MT}=12$ cm. Kut CMC' $60^\circ$, pa je iz pravokutnog trokuta CMC' visina $\overline{CC'}$ jednaka $12\sqrt{3}/2 = 6\sqrt{3}$ cm. Prema tome površina trokuta ABC je $8 \cdot 6\sqrt{3}/2 = 24\sqrt{3}$. Sl. 6




2. Ako je kut ACB jednak $150^\circ$, onda je obodni kut AXB jednak $30^\circ$, pa je središnji kut AOB jednak $60^\circ$. Kako je trokut AOB istostraničan to je $\overline{AB} = \overline{AO} = \overline{BO} = 10$ cm. Površina kruga opisanog oko trokuta je $P = 100\pi \text{ cm}^2$.

Sl. 7

3. Neka je $\sqrt{5} = p/q$ gdje su $p$ i $q$ uzajamno prosti cijeli brojevi. Kvadriranjem se dobija da je: $p^2/q^2 = 5$, pa je $p^2 = 5q^2$. Dakle $p^2$ je djeljivo sa 5, pa je djeljivo sa 5 i $p$. Kako je $p=5k$, to se zamjenom u prethodnu jednakost dobija

$$(5k)^2 = 5q^2 \text{ ili } 25k^2 = 5q^2.$$

Odavde je $q^2 = 5k^2$, pa je $q^2$ djeljivo sa 5, što znači da je i $q$ djeljivo sa 5. Zaključujemo da je zajednički djelitelj za $p$ i $q$ broj 5 što je suprotno pretpostavci da su oni uzajamno prosti. Dakle i pretpostavka o racionalnosti broja $\sqrt{5}$ nije točna.

4. Ako je $p$ prost broj veći od 2 onda je $p$ neparan broj (ako bi bio paran bio bi djeljiv sa 2, pa ne bi bio prost). Ma koja potencija broja $p$ je takodje neparan broj, a isto važi i za ma koju potenciju broja 1987. Kako je zbroj dva neparna broja paran to je broj

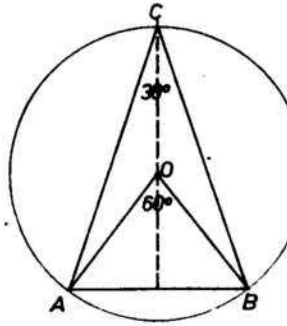
$$p^{1987} + 1987^p$$

takodje paran, dakle i složen. Kraj dokaza.

5. Ako dati kvadrat podijelimo na $5 \cdot 5 = 25$ kvadrata površine 1 cm, tada se zbog $57:25 = 2$ (7) u bar jednom od malih kvadrata nalaze bar 3 date točke.

## VIII RAZRED

1. Ako je kut pri vrhu jednakokračnog trokuta jednak $30^\circ$, onda je središnji kut $60^\circ$, pa je trokut AOB istostraničan. Dakle osnovica trokuta je jednaka polumjeru i iznosi 12 cm. Visina trokuta je jednaka zbroju visine istostraničnog trokuta $6\sqrt{3}$ i polumjera kruga 12 i iznosi $6(2+\sqrt{3})$ cm. Iz Pitagorinog teorema dobijamo $\overline{AC}=\overline{BC}= 12\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm. Prema tome opseg trokuta je $(24\sqrt{2+\sqrt{3}}+12)$ cm, a površina je $36(2+\sqrt{3})$ $cm^2$.



Sl. 8

2. Konstrukciju izvodimo primjenom metode presjeka skupova točaka. Kako su date točke A i B točke traženog kruga, to se središte kruga nalazi na simetrali dužine $\overline{AB}$. S druge strane traženi krug dodiruje dati krug u točki B pa se središte traženog kruga S nalazi u presjeku simetrale dužine $\overline{AB}$ i dužine $\overline{OB}$. Zadatak ima rješenje uvijek kada se pravci OB i simetrala dužine sijeku, a to je uvijek osim u slučaju da je točka A na tangenti datog kruga kroz B, jer bi tada pravac OB i simetrala dužine $\overline{AB}$ bili paralelni.

3. Ako je $f(x)=2x-1$, tada je $f(g(x))=2g(x)-1=6x+3$. Dakle $2g(x)=6x+4$, pa je $g(x)=3x+2$.

4. Ako je p prost broj veći od 3 onda je p oblika $6k+1$ ili $6k-1$, pa je
$$p^2+11=(6k\pm1)^2 + 11 = 36k^2\pm12k+1 + 11 =$$
$= 36k^2\pm12k + 12$, a to je očigledno djeljivo sa 12.

II RJEŠENJE: Poznato je da je $p^2 - 1$ djeljivo sa 24. Kako je $p^2 + 11 = p^2 - 1 + 12$ tvrdjenje je očigledno.



5. Kako je $x^2 + y^2 = 2x$, to je $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$, to je $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Zbroj dva kvadrata cijelih brojeva jednak je jedan, ako je jedan od njih 0, a drugi 1 ili obrnuto. Prema tome razlikujemo slijedeće mogućnosti:

$(x-1)^2 = 0$ i $y^2 = 1$, pa je $(x,y) = (1,1)$ ili $(x,y)=(1,-1)$;

$(x-1)^2 = 1$ i $y^2 = 0$, pa je $(x,y) = (2,0)$ ili $(x,y)=(0,0)$.

# MEDJUOPĆINSKO NATJECANJE

## IV RAZRED

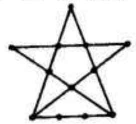
1. Kako je oplošje kocke 96 $cm^2$, to je površina jedne njene strane $96:6 = 16$. Očigledno je stranica kocke 4 cm, pa je njen volumen $V = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ $cm^3$.

2.
$$\begin{array}{r} 97 \cdot 11 = \quad 97 \\ 97\phantom{0} \\ \hline 1067 \end{array}$$

3. Satovi će pokazivati isto vrijeme kada se obje kazaljke ponovo poklope, a to je kada onaj koji napreduje dostigne "napredak" od 12 sati. Kako je 12 sati = 720 minuta, za to će mu trebati $720:3 = 240$ sati = 10 dana. Prema tome satovi će ponovo pokazivati isto vrijeme tek 14. aprila 1987.

4. Ako se dvoznamenkastom broju x sa lijeve strane dopiše znamenka 7 tada se taj broj uveća za 700 i iznosi $700+x$. Kako je novodobijeni broj za 26 puta veći od polaznog dobijamo jednadžbu $26 \cdot x = 700 + x$ ili $25x = 700$. Odavde traženi broj $x = 700:25 = 28$.

5. Raspored točaka dat je na slijedećoj slici.


Sl. 9

## V RAZRED

1. Kako je 1000 djeljivo sa 8 to će neki broj biti djeljiv sa 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv sa 8. U našem slučaju troznamenkasti završetak broja 444...4444 je 444. Kako 444 očigledno nije djeljivo sa 8, to ni broj 444...444 nije djeljiv sa 8.

2. Iva za jedan dan završi 1/18 posla, a Iva i Laza zajedno 1/12 posla. Znači da Laza za jedan dan završi posao koji je jednak 1/12 - 1/18 = 1/36. Dakle Laza bi taj posao završio za 36 dana.

3. Da bi broj bio djeljiv sa 9 mora mu zbroj znamenaka biti djeljiv sa 9. Očigledno je to moguće samo u slučajevima kada su znamenke traženog četveroznamenkastog broja: (1,2,3,3) i (2,2,2,3). Traženi brojevi su dakle 1233, 1323, 1332, 2133, 2313, 2331, 3123, 3132, 3213, 3231, 3312, 3321, 2223, 2232, 2322 i 3222 i ima ih ukupno 16.

4. Središte traženog kruga S leži na simetrali s kuta aOb i na okomici n iz točke A na pravac a. Prema tome S se dobija u presjeku pravaca n i s.
Postoje dva rješenja, jer postoje dvije simetrale kuta aOb (simetrala šiljastog i simetrala tupog kuta).

5. Kako su nazivnici razlomaka jednoznamenkasti u obzir dolaze samo kombinacije: $x/2 + y/9 = 11/18$ ili $9x/18 + 2y/18 = 11/18$, tako da su traženi razlomci 1/2 + 1/9. Druga mogućnost je $x/3 + y/6 = 6x/18 + 3y/18 = 11/18$, ali je ona očigledno nemoguća jer $6x + 3y$ nikada nije 11. Treća mogućnost je $x/6 + y/9 = 3x/18 + 2y/18 = 11/18$, a ona je moguća za $x=1$ i $y=4$ pa je drugo rješenje $1/6 + 4/9 = 11/18$.

## VI RAZRED

1. Prvi radnik za 1 minut uradi 1/30 posla, drugi 1/60 posla, a treći 1/180 posla. Ako rade svi zajedno za 1 minut će uraditi 1/30 + 1/60 + 1/180 = 10/180 = 1/18 posla. Prema tome cijeli posao će biti urađen za 18 min.

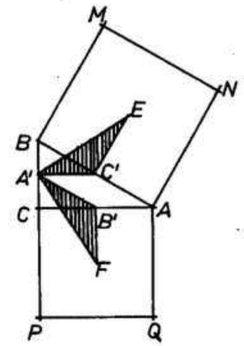
2. Očigledno da 4/7 prve, 3/4 druge i 4/5 treće cisterne predstavljaju jednake volumene. Neka je taj volumen jednak x. Tada je volumen prve cisterne $x + 3/4x$, volumen druge je $x + x/3$, a volumen treće je $x + x/4$. Ukupni volumen svih cisterni je $4x + x/3 = 13x/3 = 1560$ litara. Dakle $x = 360$ litara, pa je u prvoj cisterni bilo 630 litara, u drugoj 480 litara, a u trećoj 450 litara.

3. Razlomak $24/(3n-4)$ je prirodan broj samo kada se $3n-4$ sadrži u 24, odnosno ako $3n-4$ uzima jednu od vrijednosti:



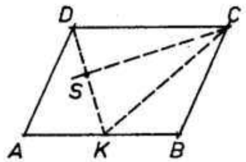
1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Tada je 3n jednako 5, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 28. Očigledno da 3n može biti samo 6 ili 12, pa je n=2 ili n=4.

4. Neka su A', B', C' središta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, i neka su E i F centri kvadrata ABMN i ACPQ, a ∢CAB = x. Tada je $\overline{A'C'} = 1/2\ \overline{AC}$ (kao srednja linija), a $\overline{B'F} = 1/2\ \overline{AC}$, pa iz dobijenih relacija slijedi da je $\overline{A'C'} = \overline{B'F}$. Slično je $\overline{A'B'} = 1/2\ \overline{AB} = \overline{C'E}$.
∢A'B'F = 90°+x = ∢A'C'E. Očigledno je da su trokuti A'B'F i A'C'E sukladni, pa iz sukladnosti zaključujemo da je $\overline{A'E} = \overline{A'F}$.



Sl. 10

5. Kako je ∢AKD = ∢DKC i kako je ∢AKD = ∢KDC (kao kutovi sa paralelnim kracima) to je ∢DKC = ∢KDC, pa je trokut CDK jednakokračan. Ako je S središte dužine $\overline{KD}$, onda je $\overline{CS}$ simetrala osnovice $\overline{KD}$, pa je očigledno $\overline{CS}$ okomit na $\overline{KD}$.

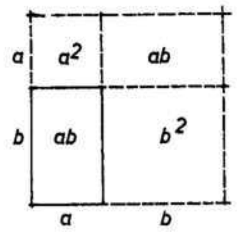


Sl. 11

## VII RAZRED

1. Ako je nepoznata kateta b, onda je nepoznata hipotenuza b+16 pa zbog Pitagorinog teorema važi jednakost:
$24^2 + b^2 = (b+16)^2$ odakle se poslije kvadriranja dobija da je $32b + 256 = 576$ ili $32b = 320$, a samo b = 10 cm. Površina trokuta je 120 $cm^2$, a površina kruga $169\pi\ cm^2$.

2. Površina novodobijenog kvadrata jednaka je:
$ab + a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 = 100$.
Odavde je očigledno a+b = 10 cm, pa je opseg dobijenog četverokuta 4(a+b) = 40 cm. Ako su stranice pravokuta a i b cjelobrojne najmanju površinu ima pravokutnik sa stranicama 1 i 9 i ta površina iznosi 9 $cm^2$.

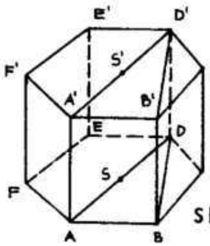


Sl. 12

3. Ako je cijena bilježnice s onda cijena gumice g jednaka 4/5s. Ako je cijena olovke o onda je g=5/4o. Kako iz dobijenih relacija slijedi da je s= 5/4g i o= 4/5g, to olovka, gumica i bilježnica koštaju 4/5 + 1 + 5/4 = 61/20 gumice ili 1/20 cijene gumice je 610:61 = 10 dinara, a gumica košta 200 dinara. Tada je olovka 160 dinara, a bilježnica 250 dinara.

4. Očigledno je $\overline{AB}$= 6cm, $\overline{AD}$=12 cm, a $\overline{BD}$=6 $\sqrt{3}$ cm. Kako je trokut ABD pravokutan to je površina baze B= 6·6 $\sqrt{3}$ /2 a to je B= 18 $\sqrt{3}$ cm$^2$. Volumen prizme je V = 18·$\sqrt{3}$ · 6 = 108·$\sqrt{3}$.

Oplošje prizme je P = 2·B+M = 36 (3+ 2·$\sqrt{3}$ ) cm$^2$.



Sl. 13

5. Ako 6 mjesta za stolom redom obilježimo slovima A,B,C, D,E,F onda na mjestima A,C,E sjede dječaci, a na mjestima B,D,F djevojčice. Dječaci se mogu rasporediti na ukupno 3·2·1 = 6 načina, a djevojčice takodjer na 6 načina. Ukupan broj mogućih rasporeda je 6·6 = 36. Ako djevojčice sjede na mjestima A,C,E, a dječaci na mjestima B,D,F onda imamo još 36 načina pa je ukupan broj mogućnosti 36 + 36 = 72.

## VIII RAZRED

1. Ako je opseg romba 68 cm, onda je jedna njegova stranica 68:4=17 cm. Kako se dijagonale odnose kao 15:8 to se i njihove polovine odnose kao 15:8. Iz Pitagorinog teorema je

$$(15x)^2+ (8x)^2 = 225x^2+ 64x^2= 289x^2 = 289,$$

što znači da je x=1, pa su dijagonale m=16 i v=30. Sličan mnogokut ima 2 puta veću stranicu, pa i dva puta veće dijagonale. Znači da je njegova površina 32·60/2 = 960 cm$^2$.

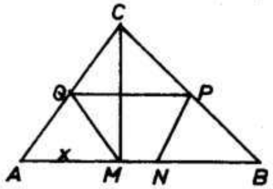
2. Kako je $n^3$ - 1987n = $n^3$ - n - 1986n i kako je 1986n djeljivo sa 6, to je dovoljno dokazati da je izraz

$$n^3 - n$$

= n(n-1)(n+1) djeljiv sa 6. Kako su n-1, n i n+1 tri uzastopna prirodna broja to je njihov produkt djeljiv sa 6.



3. Neka je $\overline{AM}$ = x, tada je $\overline{MB}$=21-x. Primjenom Pitagorinog teorema na trokutove AMC i BMC dobija se da je x=5 cm a visina $\overline{CM}$=12 cm. Kako je $\overline{MN}$ =$\overline{AN}$-$\overline{AM}$ dobija se $\overline{MN}$ = 5.5 cm. Dužina $\overline{PQ}$=1/2 $\overline{AB}$ = 10.5 cm. Površina trapeza je (10.5 + 5.5) 6/2 ili P = 48 cm$^2$.



Sl. 14

Kako je $\overline{PQ}$ll$\overline{AB}$ i kako je $\overline{AB}\perp\overline{CM}$, to je i $\overline{PO}$ okomita i raspolavlja dužinu $\overline{CM}$, pa je trokut CMQ jednakokračan. Zaključujemo da je $\overline{MQ}$ = $\overline{CQ}$ = 1/2·$\overline{AC}$ = $\overline{PN}$, pa je četverokut MNPQ jednakokračan trapez.

4. Neka su brojnici traženih razlomaka x i y. Tada je očigledno x/3 + y/5 = 73/15 ili 5x/15 + 3x/15 = 73/15. Odavde je 5x + 3y = 73. Kako x i y moraju biti prirodni brojevi rješavamo dobijenu Diofantsku jednadžbu. Jedno njeno rješenje (x,y) = (14,1), a sva rješenja su tada data formulama: x = 14 - 3t i y = 1+5t, gdje je t ma koji cijeli broj. Kako x i y moraju biti veći od 0, to u obzir dolaze parovi: (14,1), (11,6), (8,11), (5,16) i (2,21), pa takvih razlomaka ima točno 5. 14/3+1/5, 11/3+6/5, 8/3+11/5, 5/3+16/5 i 2/3+21/5.

5. Ako je a+b=3 i a·b=2, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 9$, pa je $a^2 + b^2 = 5$. Tada je $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 = 25$, pa je $a^4 + b^4 = 25 - 2a^2 \cdot b^2 = 25 - 2 \cdot 4 = 25 - 8 = 17$.

## REPUBLIČKO NATJECANJE

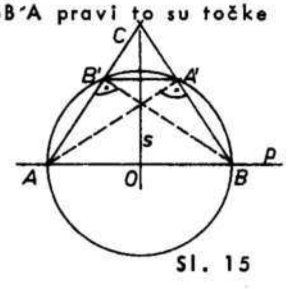
## VI RAZRED

1. Ako je zbroj brojeva a,b,c od broja a veći za 5/2 to znači da je b+c = 5/2. Slično zaključujemo da je a+c= = 59/6 i a+b = 5/3. Tada je očigledno (b+c)+(a+c)+ +(a+b) = 5/2 +59/6 + 5/3 = 14, a to znači da je a+b+c = 7. Dakle a = 7 - 5/2 = 9/2, b = 7 - 59/6 = - 17/6 i c = 7 - 5/3 = 16/3.

2. Ako se iz balona odlije 1/4 alkohola i dolije voda u balonu se trenutno nalazi 1/4 vode i 3/4 alkohola. Kada iz balona odlijemo 1/3 tekućine odlili smo 1/12

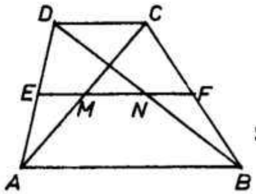
vode, a bolonu su ostale 2/12 = 1/6 vode. Dolijevanjem 1/3 vode u balonu ćemo imati 1/6 + 1/3 = 1/2 vode, pa vode i alkohola ima podjednako.

3. Analiza: Kako su kutovi AA'B i BB'A pravi to su točke A' i B' nalaze na krugu čije je središte polovište dužine $\overline{AB}$. Kako je $\overline{A'B'}$ tetiva traženog kruga središte O se nalazi i na simetrali dužine $\overline{A'B'}$.
Konstrukcija: Najprije se konstruira pravac s - simetrala dužine $\overline{A'B'}$. Presjek pravaca p i s je traženo središte kruga O. Sjecišta kruga k(O,r=OA'=OB') i datog pravca p odredjuju vrhove A i B.




Sl. 15

4. Očigledno je $\overline{EM} = b/2$ (kao srednjica trokuta ACD). Isto tako je i $\overline{NF} = b/2$ (kao srednjica trokuta BCD). Dakle $\overline{MN} = \overline{EM}+\overline{NF} = b/2 + b/2 = b$. Zaključujemo da je srednjica trapeza-dužina $\overline{EF} = \overline{EM} + \overline{MN}+\overline{NF} = 2\overline{MN} = 2b$. Kako je $\overline{EF} = 1/2(\overline{AB} + \overline{CD})$ dobijamo da je $2b = 1/2(\overline{AB}+b)$ ili $4b = \overline{AB} + b$. Odavde je očigledno $\overline{AB} = 3b = 30$ cm.




Sl. 16

5. Produkt dva troznamenkasta broja veći je ili jednak od 100·100 = 10 000, a manji od 1000·1000 = 1 000 000, pa je očigledno ili peteroznamenkast ili šesteroznamenkast. Ako je produkt peteroznamenkast onda je on 33333 = 3·11111 = 3·41·271 = 123·271 .
Ako je produkt šesteroznamenkast onda je on 333333 = 3·111111 = 3·111·1001 = 3·3·37·7·11·13 = = 3·3·7·11·13·37. Moguće su slijedeće kombinacije: (3·3·7·11)·(3·11·13) = 777·429.

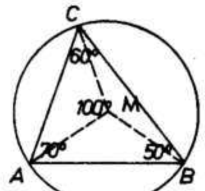
## VII RAZRED

1. Iz trokutova ACD i BCD primjenom Pitagorinog teorema dobija se da je $\overline{AD} = 5$ cm i $\overline{BD} = 9$ cm, a visina $\overline{CD}=12$ cm. Kako je $\overline{AE} = \overline{BE} = 7$ cm, to je $\overline{DE} = 7-5 = 2$cm, pa je iz trokuta CDE dužina $\overline{CE}^2 = 144+4 = 148$, odnosno $\overline{CE} = 2\sqrt{37}$ cm. Kako je trokut CDE pravokutan to je



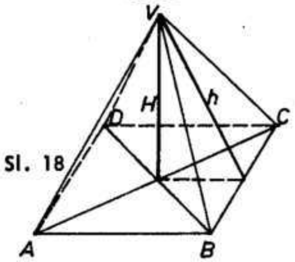
polumjer opisanog kruga polovina hipotenuze, a površina kruga je data $P = 37\pi$ cm$^2$.

2. Očigledno je kut $\measuredangle ACB = 60°$, a $\measuredangle AMC = 100°$. Kako je $\overline{AM}=\overline{MC}$ i kako je $\measuredangle ABC = 1/2\measuredangle AMC$ to je tačka M očigledno središte kruga opisanog oko trokuta ABC pa su traženi kutovi $\measuredangle AMB = 2\measuredangle ACB = 120°$ i $\measuredangle BMC = 2\measuredangle BAC = 140°$.




Sl. 17

3. Kako je površina istostraničnog trokuta ACV $14\sqrt{3}$ cm$^2$, to je $\overline{AC} = \overline{CV} = \overline{AV} = 2\sqrt{14}$ cm. Tada je visina piramide $H = 2\sqrt{14}\,\sqrt{3}/2 = \sqrt{42}$ cm. Osnovna ivica a piramide se dobija iz jednakosti $a\sqrt{2} = 2\sqrt{14} = 2\sqrt{7}$ cm. Bočna visina piramide $h^2 = (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{42})^2 = 7+42 = 49$, pa je $h = 7$ cm.
Površina baze je $B = (2\sqrt{7})^2 = 28$ cm$^2$, a površina omotača $M = 4\cdot 2\sqrt{7}\cdot 7/2 = 28\sqrt{7}$ cm$^2$. Dakle oplošje piramide je $P = 28(1+\sqrt{7})$ cm$^2$, a volumen $V = B\cdot H/3 = 28\sqrt{42}/3$ cm$^3$.




Sl. 18

4. Deset točaka odredjuju 10·9/2 = 45 različitih dužina. Fiksirajmo proizvoljnu dužinu $\overline{AB}$ i uočimo da ona predstavlja bazu za 8 raznih trokutova. Dakle ukupan broj trokutova je 45·8 = 360. Kako je svaki trokut računat 3 puta (naprimjer trokut ABC računat je prvi put sa bazom $\overline{AB}$, drugi put sa bazom $\overline{AC}$ i treći put sa bazom $\overline{BC}$), ukupan broj trokutova odredjenih vrhovima desetokuta 360:3 = 120.

5. Produkt dva troznamenkasta broja veći je ili jednak od 100·100 = 10 000, a manji od 1000·1000 = 1 000 000, pa je očigledno ili peteroznamenkast ili šesteroznamenkast.
Ako je produkt 77777 = 7·11111 = 7·41·271 = 287·271, jer su svi brojevi (7,41,271) prosti.
Ako je produkt 777777 = 7·111111 = 7·111 1001 = = 7·7·11·13·3·37 onda očigledno nema rješenja. Najmanji troznamenkast broj koji se može formirati od datih faktora je broj 111, a najveći 777. Kako je u oba slučaja drugi faktor (7007 odnosno 1001) četveroznamenkast to ne postoje troznamenkasti brojevi čiji je produkt 777777.

1. Kako je $4x^2 + 9y^2 - 12x + 30y + 1987 = (2x-3)^2 + (3x+5)^2 + 1987 - 9 - 25$ to je najmanja moguća vrijednost datog izraza 1953, jer je najmanja vrijednost izraza $(2x-3)^2$ i $(3y-5)^2$ jednaka nuli. Dati izraz ima najmanju vrijednost 1953 ako je $2x-3 = 0$ i $3y+5 = 0$, a to je za $x = 3/2$ i $y = -5/3$.

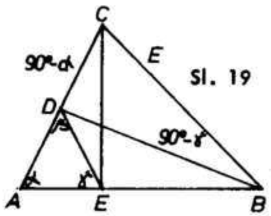
2.
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{za } x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0 \\ x & \text{za } x > 0 \end{cases} \quad x - |x| = \begin{cases} x-(-x) = 2x & \text{za } x < 0 \\ 0-0 = 0 & \text{za } x = 0 \\ x-x = 0 & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

Dakle

$$y = |x - |x|| = \begin{cases} |2x| = -2x & \text{za } x < 0 \\ |0| = 0 & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

3. Neka su ivice kvadra a,b,c. Tada je $a^2 + b^2 = 15$, $b^2 + c^2 = 481$ i $c^2 + a^2 = 544$. Zbrajanjem dobijenih jednakosti dobijamo da je $2(a^2 + b^2 + c^2) = 1250$. Odavde je očigledno $a^2 + b^2 + c^2 = D^2 = 625$, pa je velika dijagonala kvadra $D = 25$ cm. Polumjer kugle je $R = D/2 = 25/2$, pa je površina kugle $P = 625\pi \text{ cm}^2$, a volumen $V = 15625/6\,\pi \text{ cm}^3$.

4. Trokutovi ACE i ABD su slični (jer imaju sva tri kuta jednaka: kut kod A zajednički, kut kod D i kut kod E pravi). Iz sličnosti zaključujemo da je $\overline{AB}:\overline{AC} = \overline{AD}:\overline{AE}$. To znači i da su trokutovi ABC i AED slični (kut A zajednički i stranice proporcionalne $\overline{AB}:\overline{AC} = \overline{AD}:\overline{AE}$). Iz sličnosti je $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC = \beta$ i $\measuredangle AED = \measuredangle ACB = \gamma$. Kako je $\measuredangle ACE = 90° - \alpha$ i $\measuredangle CBD = 90° - \gamma$ to je njihov zbroj $\measuredangle ACE + \measuredangle CBD = 90° - \alpha + 90° - \gamma = 180° - (\alpha + \gamma) = \beta = \measuredangle ADE$.



Sl. 19

5. Ako 40 krava na jednoj livadi pase 50 dana onda popase 2000 porcija trave. Na istoj livadi 60 krava za 30 dana popase 1800 porcija trave. Znači da je za 20 dana na livade narasla trava za 2000-1800=200 porcija ili da svakog dana naraste 200:20 = 10 porcija trave. Kako je poslije 30 dana na livadi bilo 1800 porcija trave to znači da je na početku paše na livadi bilo $1800-30\cdot10 = 1500$ porcija.
Neka je 20 krava livadu paslo x dana. Tada je popaslo 20 x porcija. Za x dana na livadi će biti 1500+ +10x porcija trave, pa je očigledno $10x = 1500$, a samo $x = 10$ dana.
Neka je y krava paslo na livadi 75 dana. Ukupan broj porcija je 75y, a količina trave $1500+75\cdot10 = 2250$ porcija. Dakle $y = 2250:75 = 30$ krava.

## KLUB MLADIH MATEMATIČARA "ARHIMEDES"
## XIII MATEMATIČKI TURNIR

23. 05. 1987.

### V RAZRED

1. Koje od slijedećih rečenica (formula) su točne, a koje netočne? Iza točne rečenice (formule) napiši na odgovarajućoj crti riječ "točno", a iza netočne - riječ "netočno".

a) $\{1,2\} \subset \{1,3,4\}$
b) $\{2\} \in \{1,2\}$
c) $2 \subset \{1,2\}$
d) $2 \in \{1,2\}$
e) $\{1,2\} \cap \{2\} = 2$
f) $\{1,2\} \setminus \{1,3,4\} = \{1\}$

2. a) Napiši najmanji troznamenkasti broj koji je djeljiv sa 3, a prva znamenka s lijeva mu je 7.

b) Napiši najveći peteroznamenkast broj koji je djeljiv sa 9, tako da mu prva znamenka (s lijeva) bude 3, a sve znamenke da su različite.

3. Šta je veće: $\frac{1985}{1986}$ ili $\frac{1986}{1987}$ ? Utvrdi to na što jednostavniji način!
Objašnjenje:

4. Odredi razlomak s nazivnikom 6 koji je veći od $\frac{2}{3}$ i manji od $\frac{8}{9}$.

5. Izračunaj:
a) $0.43 + 0.6 =$
b) $31.8 - 1.76 =$
c) $0.45 : 9 =$
d) $0.45 \cdot 40 =$
e) $3.8 + 1.2 \cdot 5 =$
f) $\frac{5}{12} - \frac{1}{6} =$

6. Izvrši tražena preračunavanja (pretvaranja) navedenih imenovanih brojeva.



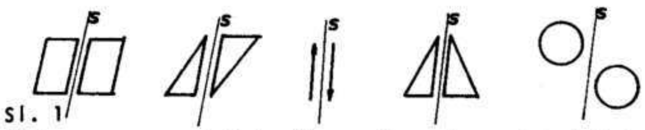
a) 13.6 m = ............cm
b) 5 ha 7a= ............ha
c) 48 minuta =..........sati

7. Napiši izostavljene brojeve tako da se dobiju točne rečenice:

a) Ako je $x+5 = 5$, onda je $x =$ ............
b) ako je $y-6 = 2$, onda je $y =$ ..............
c) Ako je $2 = 6z$, onda je $z =$ ..............
d) Ako je $u:0.3 = 100$, onda je $u =$ ..........
e) Ako je $\frac{t+2}{5} = \frac{12}{10}$, onda je $t =$ ............

8. Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$ tako da je $|\overline{AB}| = 5$ cm. Naznači odnosno napiši skup svih točaka dužine $\overline{AB}$ čija udaljenost od točke B:
a) iznosi 2 cm ili 3 cm;
b) nije veća od 3 cm;
c) nije manja od 2 cm.

9. Na kojim od slijedećih crteža su figure simetrične u odnosu na pravac s, a na kojim nisu simetrične?



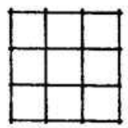

Sl. 1

10. Koje sve geometrijske figure (kao skupovi točaka) mogu biti presjek:
a) pravca i konveksnog kuta,
b) pravca i nekonveksnog kuta.
Svaki odgovor(rješenje) prikaži (ilustriraj) crtežom!

11. a) Na koliko se načina u razredu od 30 učenika mogu izabrati predsjednik razredne zajednice i sekretar razredne zajednice?

b) Na koliko načina se u razredu od 30 učenika mogu izabrati 2 delegata za razrednu zajednicu?

12. Koliko na ovom crtežu ima kvadrata, a koliko pravokutnika (računajući i kvadrate)?



Sl. 2

13. Na nekom natjecanju sudjeluje n ekipa. Igra se "na ispadanje", tj. svaka ekipa ispada iz daljeg natjecanja poslije prvog poraza. Neriješenih rezultata nema. Koliko utakmica treba da se odigra na tom natjecanju da bi se dobio pobjednik?

Objašnjenje:

14. a) Koja je 100. i koja 1987. znamenka poslije točke u decimalnom zapisu broja $\frac{1}{7}$ ?

b) Naći neki šesteroznamenkasti broj koji pri množenju brojevima 2,3,4,5,6 daje šesteroznamenkaste brojeve koji se razlikuju samo redoslijedom znamenki.

15. Jedna rijeka čiji je tok pravocrtan u promatranom dijelu, protiče izmedju dva mjesta (A i B), nejednako udaljena od nje. Odredi konstrukcijom gdje na rijeci treba sagraditi most, okomito na tok rijeke, tako da oba mjesta budu jednako udaljena od mosta?

## VI RAZRED

1. Koje od slijedećih rečenica (formula) su točne?

(1) $|a| = \begin{cases} a, \text{ ako je } a \geq 0 \\ -a, \text{ ako je } a < 0 \end{cases}$

(2) $|a| = \begin{cases} a, \text{ ako je } a > 0 \\ -a, \text{ ako je } a \leq 0 \end{cases}$

(3) $|a| = \begin{cases} a, \text{ ako je } a \leq 0 \\ -a, \text{ ako je } a \geq 0 \end{cases}$

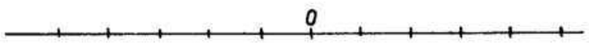
(4) $|a| = \begin{cases} a, \text{ ako je } a > 0 \\ 0, \text{ ako je } a = 0 \\ -a, \text{ ako je } a < 0 \end{cases}$

(5) $|a|+a = \begin{cases} 2a, \text{ ako je } a \geq 0 \\ 0, \text{ ako je } a < 0 \end{cases}$

(6) $|a|-a = \begin{cases} 0, \text{ ako je } a \geq 0 \\ -2, \text{ ako je } a < 0 \end{cases}$

(7) $\left|\frac{a}{a}\right| = \begin{cases} +1, \text{ ako je } a \geq 0 \\ \text{nema smisla, ako je } a = 0 \\ -1, \text{ ako je } a < 0 \end{cases}$

2. Napiši redom (od najmanjeg do najvećeg) sve cijele brojeve koji su veći od −3 a nisu veći od 2. Prikaži ih i na brojevnom pravcu (kružićima).






3. Koje od slijedećih formula (jednakosti) su točne, a koje netočne: Iza točne formule napiši na odgovarajućoj crti riječ "točno", a iza netočne - riječ "netočno"

a) $0.43 + 0.6 = 0.49$

b) $21.6 - 1.74 = 6.2$

c) $0.35 \cdot 40 = 14$

d) $1.8 + 1.2 \cdot 5 = 7.8$

e) $0.35 : 7 = 0.5$

4. Dati su razlomci: $-0,5;\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{2}{5};\ -1\frac{1}{4}$ .

a) poredaj ove razlomke po veličini (od najmanjeg do najvećeg)

b) Odredi zbir svih pet datih razlomaka.

5. Cijena neke robe povećana je za 20% i sada iznosi 420 dinara. Kolika je bila cijena te robe prije poskupljenja?

6. Odredi cijele brojeva x,y,z tako da budu točne slijedeće formule (jednadžbe, nejednadžbe):

a) $x-8 = -5$

b) $0.2 \cdot y = -1$

c) $113 < z + \frac{z}{2} < 115$

7. a) U kojim slučajevima tri dužine, čije su duljine ovdje navedene, mogu obrazovati trokut? Medju ponudjenim odgovorima, zaokruži samo te slučajeve.

(1) 3 cm; 3 cm; 3 cm;

(2) 1.2 m; 1 m; 2.2 m;

(3) 5 m; 5 m; 10 m;

(4) 1 cm; 3 cm; 4.5 cm;

(5) 5 cm; 45 cm; 45 cm;

b) Nadji opseg jednakokračnog trokuta čije su stranice 17 cm i 7 cm.

8. Koje od slijedećih rečenica su točne? Zaokruži brojeve ispred takvih rečenica.

(1) Visina trokuta je pravac koji raspolavlja osnovicu trokuta.

(2) Visina trokuta je okomica povučena kroz vrh trokuta.

(3) Težišnica nije manja od visine trokuta povučene iz istog vrha trokuta.

(4) Svaki paralelogram je centralno-simetrična figura.

(5) Svaki deltoid ima dvije osi simetrije.

(6) Oko tupokutnog trokuta ne može se opisati kružnica.

9. Površina paralelograma ABCD (za koji su podaci ubilježeni na priloženoj slici) iznosi (zaokruži točan odgovor ili ubilježi svoj rezultat):

(1) 400 $cm^2$

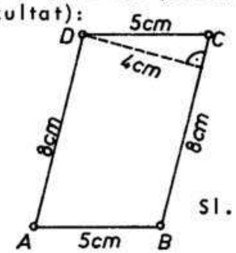
(2) 40 $cm^2$

(3) 26 $cm^2$

(4) 32 $cm^2$

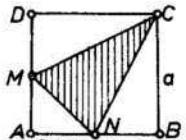
(5) 20 $cm^2$

(6) $cm^2$




Sl. 3

10. Odredi površinu trokuta ABC na ovoj slici ako stranica kvadrata ABCD iznosi $a = 4$ cm ($\overline{MD}=\overline{MA}$ i $\overline{AN}=\overline{NB}$).




Sl. 4

11. Šta je veće: $\frac{222221}{222223}$ ili $\frac{333331}{333334}$ ? Utvrdi to na što jednostavniji način.

12. Put od mjesta A do mjesta B biciklista je prešao brzinom 15 km na sat, a u povratku od B do A išao je brzinom 10 km na sat. Kolika je srednja brzina bicikliste na putu ABA?

13. a) Ako je trokut ABC pravokutan, onda je središte hipotenuze centar kružnice opisane oko tog trokuta. Dokazati.



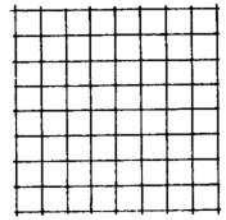
b) Ako je u trokutu ABC težišnica, koja odgovara osnovici $\overline{AB}$ (najdužoj stranici), jednaka njenoj polovici, onda je kut ACB pri vrhu (tj. kut nasuprot te stranice) pravi. Dokazati.

c) Konstruirati pravokutni trokut ABC ako je data njegova najduža stranica-hipotenuza (c) i visina koja joj odgovara (h). Sami zadajte dužine c i h.

14. Dat je pravac p i ravnalo s razmacima od 1 cm. Koristeći samo to ravnalo konstruirati neki pravac n okomit na dati pravac.

p

15. Koliko na ovom crtežu (obična šahovska tabla: 8x8) ima ukupno: a) kvadrata, b) pravokutnika (računajući i kvadrate)?



Sl. 5

## VII RAZRED

1. Koje od slijedećih formula (jednakosti) su točne za sve vrijednosti x i y? Zaokruži odgovarajući broj ispred jednakosti!

(1) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

(2) $(x+y)^2 = x^2+y^2$

(3) $(x+y)^2 = x^2+xy+y^2$

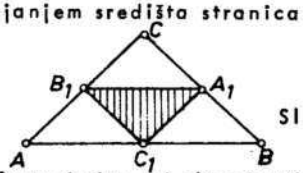
(4) $(x-y)^2 = x^2-xy+y^2$

(5) $(x-y)^2 = x^2-y^2$

(6) $(x-y)^2 = x^2-xy+y^2$

2. Na kontrolnom zadatku iz matematike 30% učenika dobilo je "5", 40% učenika dobilo je "4", 8 učenika je dobilo "3", a ostali učenici su dobili "2". Za sve koji su radili ovaj kontrolni zadatak srednja ocjena je bila 3.9. Koliko je ukupno učenika radilo taj kontrolni zadatak i koliki je broj učenika koji su dobili pojedine ocjene.

3. Stranice jednakokračnog trokuta ABC su: $\overline{AB}=16$ cm i $\overline{AC}=\overline{BC}=10$ cm. Kolika je površina trokuta $A_1B_1C_1$ dobijenog spajanjem središta stranica datog trokuta ABC?

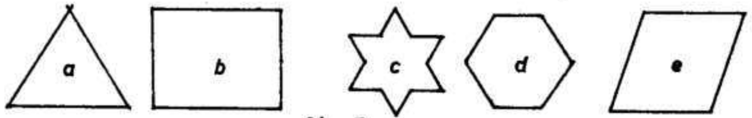


Sl. 6

4. a) Samo jedan od slijedećih iskaza je točan. Koji. Zaokruži ga! Mnogokut je pravilan:

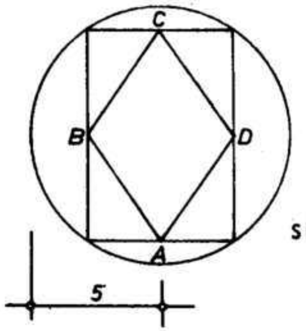
1) ako se oko njega može opisati kružnica;
2) ako su mu sve stranice medjusobno jednake;
3) ako su mu svi unutrašnji kutevi medjusobno jednaki;
4) ako su istovremeno ispunjeni uvjeti 2) i 3), tj. ako su mu sve stranice medjusobno jednake i svi unutrašnji kutovi medjusobno jednaki.

b) Koji od ovdje nacrtanih mnogokutova su pravilni?



Sl. 7

5. Koliki je opseg četverokuta ABCD na slici? (Točke A, B, C, D su središta stranica u kružnicu upisanog pravokutnika).



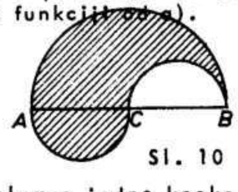
Sl. 8



6. Kolika je dužina kružnice opisane oko pravilnog šesterokuta čija je stranica 7 cm? (Uzmi $\pi = 22/7$)

Sl. 9

7. Dužina $\overline{AB} = 2a$ podijeljena je točkom C na dva jednaka dijela, pa su nad dužinama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, kao nad polumjerima, konstruirani polukrugovi. Tako je dobijena figura koja podsjeća na uvećani "zarez" (na slici osjenčena). Odrediti opseg i površinu te figure (u funkciji od a).

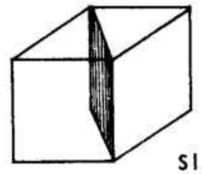


Sl. 10

8. Volumen jedne kocke je 1 $m^3$.

a) Kolika je površina te kocke?

b) Kolika je površina dijagonalnog presjeka te kocke?

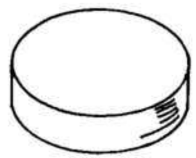


Sl. 11

9. Ravnina presjeca ivice AB, BC i CD trostrane piramide - tetraedra ABCD (ali ne u vrhovima - tjemenima). Koju će još ivicu sjeći ta ravnina? Zaokruži točan odgovor medju ponudjenim odgovorima/

(1) AC, (2) AD, (3) BD, (4) nijednu, (5) još dvije ivice.

10. Promjer jednog kazana je 2 m, a dubina 1 m (vidi sliku!). Možemo li u njega usuti 3000 litara vode? Obrazloži!



Sl. 12

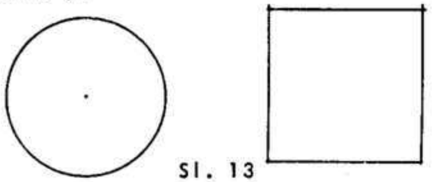
11. U kupeu vlaka (vagonskom odjeljenju) ima 6 sjedišta. Na koliko se načina na tim sjedištima mogu razmjestiti:

a) 6 putnika,
b) 4 putnika,
c) 8 putnika (dva putnika će uvijek stojati)?

12. Koliko na "šahovskoj" ploči (odnosno kvadratnoj mreži) sa n x n polja ima ukupno:
a) kvadrata,
b) pravokutnika (računajući i kvadrate)?
Napiši odgovarajuće izraze (u funkciji od n). Provjeri za n = 8.

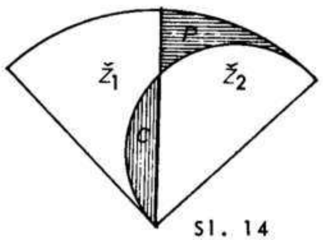
13. Postoji li pravokutni kvadar kod kojeg su mjerni brojevi dužina ivica (dimenzija) prirodni brojevi, a mjerni broj površine cijelog tijela prost broj? Obrazloži!

14. Pored zida okrugle sobe promjera 3 m na podu se nalazi cvrčak. On počinje da skače. Svaki njegov skok ima dužinu 2 m. Naznačite na crtežu (sjenčenjem) u koje sve točke poda sobe on može pri tome dospjeti? Isto pitanje, ako je pod sobe oblika kvadrata stranice 2 m, a cvrčak se u početku nalazi u samom "kutu" sobe (u "ćošku").



Sl. 13

15. Kralj Artur ("Vetezovi okruglog stola"!) je tražio da mu slikar oboji štit, koji je imao oblik četvrtine kruga, s tim da budu tri boje: žuta - boja dobrote (na crtežu je taj dio označen sa "Ž"), crvena - boja hrabrosti ("C") i plava - boja mudrosti ("P"). Kada je bojenje bilo gotovo, kraljev štitonoša u šali reče da na crtežu ima više hrabrosti nego li mudrosti (C P). Medjutim, slikar je lako dokazao da i jednog i drugog ima jednako (C = P). Kako? Učinite to i vi!




Sl. 14



# VIII RAZRED

1. Koje od slijedećih rečenica (formula) su točne, a koje netočne? Iza točne rečenice napiši na crti zdesne riječ "točno" ili znak T, a iza netočne - riječ "netočno" ili znak $\perp$.

(1) $x < x^2$ za svako $x \in R$

(2) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ za svako $x, y \in R$

(3) $(x-y)^2 > 0$ za svako $x, y \in R$

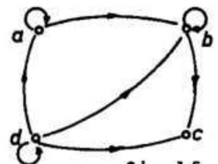
(4) Ako je p prost broj, onda je $p^{1986} + p^{1987}$ složen broj

(5) $\neg(t < 5) \Leftrightarrow (t > 5)$

(6) $23 \nless 23$

2. Relacija R zadata je pomoću grafa (vidi sliku). Utvrdite i onda odgovorite, koje od slijedećih rečenica su točne: ( zaokružite točne odgovore):

(1) Relacija R je refleksivna
(2) Relacija R je tranzitivna
(3) Relacija R je antirefleksivna
(4) Relacija R je antisimetrična




Sl. 15

3. Napiši kraće - jednostavnije ("izračunaj") slijedeće izraze:

(1) $x+x+x+x =$

(2) $2x^2 + 2x^2 =$

(3) $(-2x^3) \cdot (-2x) =$

(4) $(-2x^2)^3 =$

(5) $x \cdot x \cdot x \cdot x =$

(6) $2x^2 : (-2x) =$

4. a) Dokazati da je $888889^2 - 111112^2 = 777777777777$.

b) Rastaviti na faktore broj 249999

5. a) Odredi dopunu broja $\frac{x-1}{x}$ do 1.

b) Kako se mijenja vrijednost razlomka $\frac{x-1}{x}$ kada x raste?

c) Koliko treba da bude x, da bi se brojevi 1 i $\frac{x-1}{x}$ razlikovali sa manje od 0.001?

6. Dali su date jednadžbe ekvivalentne na skupu R? Odgovori sa"da" ili "ne" za svaki od datih parova jednadžbi.

(1) $x = y$ i $x^3 = y^3$

(2) $\frac{(x^2+1)(x^2-2x-3)}{x^2+1} = 0$ i $x^2=2x+3$

(3) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{5-x}{x-2}$ i $x-3 = 5-x$

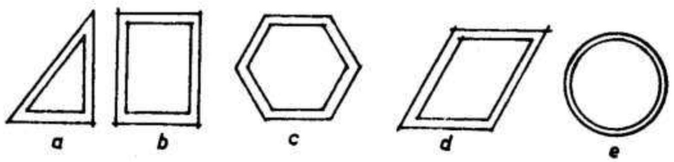
(4) $(x+3)(x-3) = 0$ i $x+3 = 0$

(5) $x^2 = 0$ i $|x| = 0$.

7. Koji od nacrtanih pravaca na ovoj slici predstavlja graf koji odgovara jednadžbi $2x + 3y + 1 = 0$?


Sl. 16

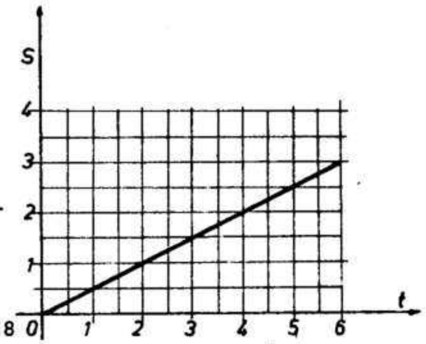
8. Na donjim slikama unutrašnju i vanjsku konturu čine redom:
a) pravokutni trokut, b) pravokutnik, c) pravilni šesterokut, d) romb, e) kružnica,
Zaokruži slova ispod onih slika na kojima je figura koju čini unutrašnja kontura slična figuri koju čini vanjska kontura.




Sl. 17



9. Na slici prikazano je grafički kako se mijenja put s (u metrima) koji prelazi neko tijelo pri jednolikom gibanju u zavisnosti od vremena t (u sekundama).
Pročitaj sa grafa i upiši što je izostavljeno u slijedećim rečenicama:




Sl. 18

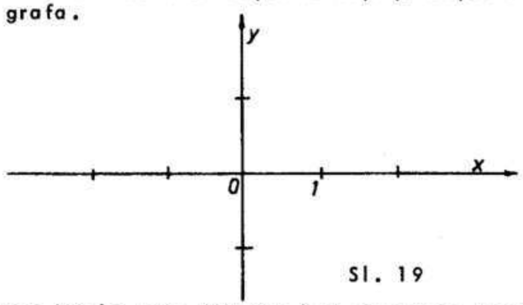
a) za 1 sekundu tijelo je prešlo......metara, za $4\frac{1}{2}$ sekunde prešlo je.....metara. Za t sekundi .... metara.

b) Put od 1 metra tijelo je prešlo za....sekunde, a put od $2\frac{1}{2}$ metra za ....sekundi. Put od s metara tijelo prijeđe za......sekundi.

10. Ako učenik kupi 11 olovaka, ostaće mu 50 dinara od sume koju ima, a da bi kupio 15 olovaka nedostaje mu 70 dinara. Koliko je dinara učenik imao i kolika je cijena jedne olovke?

11. Riješi jednadžbu: $x^3+x^2+x+1 = 0$.

12. Nacrtaj grafove funkcija $y = |x-2|$ i $y = -|x| + 2$. Zatim odredi dužinu odsječka koji je zajednički za oba grafa.




Sl. 19

13. Jednom Marko reče Mariji: "Ja sam imao 3 puta više godina nego što ste vi imali onda kada je meni bilo onoliko godina koliko je vama sada".



Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj

A Marija doda: "Kada ja budem imala toliko godina koliko je vama sada, onda ćemo zajedno imati 77 godina".
Koliko godina sada ima Marko, a koliko Marija?

14. a) Dokazati da za svako x i y važi nejednakost:
$x^2 + y^2 \geqslant 0.$

b) Ako je $p \leqslant C$, gdje je C konstanta, koliko je max p?

c) Koji od svih pravokutnika, čija je dijagonala d = 10 cm, ima najveću površinu i kolika je ta najveća površina?

15. Koliko na "šahovskoj" ploči (odnosno kvadratnoj mreži) sa m x n polja (kvadratića) ima ukupno:

a) kvadrata, b, pravokutnika (računajući i kvadrate)?
Napiši odgovarajuće izraze (u funkciji od m i n).
Provjeri za m=4 i n = 3.



# R J E Š E N J A

## V RAZRED

Prva grupa zadataka

1. d. 2. a) 702, b) 39870.

3. Prvom razlomku do 1 nedostaje $1 - \frac{1985}{1986} = \frac{1}{1986}$, a drugom do 1 nedostaje $1 - \frac{1986}{1987} = \frac{1}{1987}$.
Ali $\frac{1}{1986} > \frac{1}{1987}$, pa je $\frac{1985}{1986} < \frac{1986}{1987}$.

4. $\frac{2}{3} < \frac{x}{6} < \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{12}{18} < \frac{3x}{18} < \frac{16}{18} \Rightarrow 12 < 3x < 16 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5.$
Traženi razlomak je $\frac{5}{6}$.

5. a) 1.03, b) 30.04, c) 0.05, d) 18, e) 9.8, f) $\frac{1}{4}$.

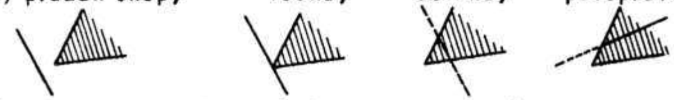
6) a) 1360 cm, b) 5.07 ha, c) 0.8 h.

7) a) x=0, b) y=8, c) $z = \frac{1}{3}$, d) u=30, e) t = 4.

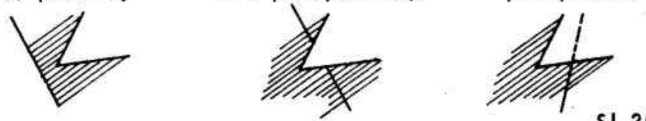
8) a) Par točaka: $\{M,N\}$ , b) $\overline{BM}$, c) $\overline{AN}$.

9. Nijedna.

10. a) prazan skup, točka, dužina, polupravac



b) pravac, dva polupravca, polupravac



Sl. 20

Druga grupa zadataka

11. a) 30·29 = 870, b) $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435.$

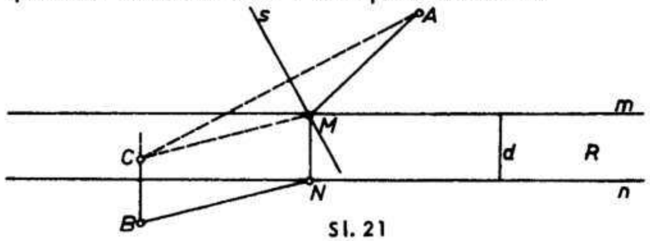
12. a) 14 kvadrata, b) 36 pravokutnika.

13. Poslije svake utakmice ispada jedna ekipa. Da bi se dobio pobjednik treba ispasti n-1 ekipa, što znači da je odigrano n-1 utakmica.

14. a) 1) $1:7 = 0.1428571428571\ldots$
2) $100 = 6\cdot 16 + 4$
3) $1987 = 6\cdot 331 + 1$
Sada se lako uvidja da je 100-ta znamenka 8, a 1987-ma 1.

b) 142857.

15. Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je AMNB takva izlomljena linija da je $\overline{AM}=\overline{BN}$. Ako povučemo $\overline{BC}\parallel\overline{MN}$ i $\overline{BC}=\overline{MN}$, točka M ležati će na simetrali dužine $\overline{AC}$. A kako je MCBN paralelogram to je $\overline{CM}=\overline{BN}$ odnosno $\overline{AM}=\overline{BN}$.
Opis konstrukcije:
Kroz B se povuče okomica na obalu rijeke i prenese njena širina $d=\overline{BC}$. Zatim konstruiramo simetralu dužine $\overline{AC}$ i u njenom presjeku sa m dobije se točka M. Iz točke M sada spustimo okomicu na n i dobijemo točku N.




Sl. 21

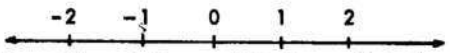
## VI RAZRED

Prva grupa zadataka

1. Sve su točne.

2. a) -2, -1, 0, 1, 2

b)




3. a) netočno, b) netočno, c) točno, d) točno e) netočno.

4. a) $-1\frac{1}{4} < -0.5 < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$,
b) 0.



5. $x+0.2x = 420$
$1.2x = 420$
$x = 350.$

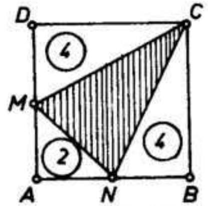
6. a) $x=3$, b) $y=6$, c) $z = 76$.

7. a) (1) i (5).
Zbroj dvije stranice mora biti veći od treće stranice. Zato treća stranica mora biti 17 cm. Opseg iznosi 17+17+7= 41 cm.

8. Točne su (3) i (4).

9. $8\cdot 4 = 32$, $P = 32\text{ cm}^2$.

10. $P_{\square} = 16\text{ cm}^2$.
$P_{\triangle} = 16 - (8+2) = 6$.
$P = 6\text{ cm}^2$.




Sl. 22

Druga grupa zadataka

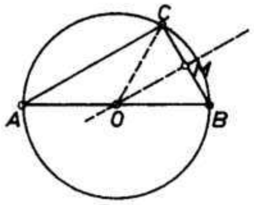
11. $$\left.\begin{array}{l} 1 - \frac{222221}{222223} = \frac{2}{222223} = \frac{6}{666669} \\ 1 - \frac{333331}{333334} = \frac{3}{333334} = \frac{6}{666668} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6}{666669} < \frac{6}{666668}$$
Prvi razlomak je veći, jer mu manje nedostaje do 1.

12. Put od A do B biciklista je prešao za $t_1 = \frac{s}{15}$ h, a od B do A za $t_2 = \frac{10}{s}$ h. Ukupno je putovao $t = \frac{s}{10} + \frac{s}{15} = \frac{s}{6}$ h. Prema tome, njegova srednja brzina je $V_s = 2s : \frac{s}{6} = 12$ km/h.

13. a) Neka je ABC zadani trokut u kojem je C - vrh pravog kuta, O - središte hipotenuze $\overline{AB}$, M - središte katete $\overline{BC}$. Tada je $\overline{OM}$ srednjica $\triangle ABC$, s druge strane $\overline{AC}\perp\overline{BC} \Rightarrow \overline{OM}\perp\overline{BC}$. Dakle, $\overline{OM}$ je simetrala dužine $\overline{BC}$, a kako i simetrala stranice $\overline{AB}$ prolazi kroz točku O, to je O centar trokutu opisane kružnice.

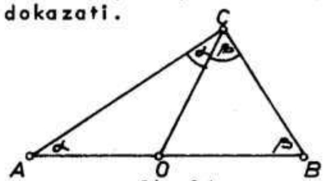


Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj



Sl. 23

b) Pošto je $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC}$, to su trokuti AOC i BOC jednakokračni, te je $\measuredangle ACO = \measuredangle OAC = \alpha$ i $\measuredangle OCB = \measuredangle CBO = \beta$. Tada $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$ što je i trebalo dokazati.

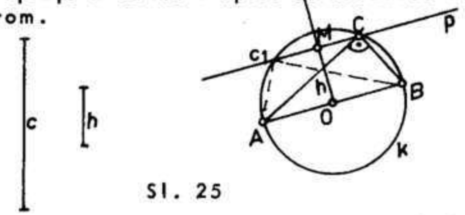


Sl. 24

c) Točka C mora zadovoljavati dva uvjeta:
1) biti na rastojanju h od dužine $\overline{AB}$.
2) pripadati kružnici opisanoj oko pravokutnog trokuta ABC.

Opis konstrukcije:

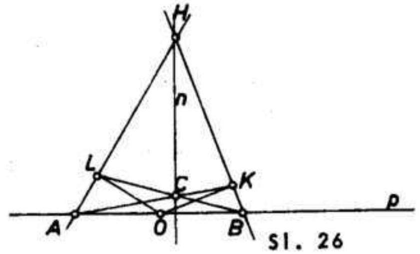
Nacrta se dužina $\overline{AB} = c$, konstruira se pravac p$\parallel \overline{AB}$ na rastojanju h od $\overline{AB}$ i opiše se kružnica nad $\overline{AB}$ kao promjerom.



Sl. 25

14. Na zadanom pravcu p odredimo dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ duljine 1 cm. Proizvoljno povučemo polupravce $\overline{OL}$ i $\overline{OK}$ i na njih nanesemo duljinu od 1 cm. Neka je točka C presjek dužina $\overline{AK}$ i $\overline{BL}$, a H presjek pravaca $\overline{AL}$ i $\overline{BK}$. Tada će pravac $\overline{CH}$ biti tražena okomica ($\overline{OK}$ i $\overline{OL}$ su visine trokuta ABH pa je i $\overline{CH}$ visina istog trokuta).





Sl. 26

15. a) Ukupan broj kvadrata je:
$8\cdot 8+7\cdot 7+6\cdot 6+5\cdot 5 \ldots\ldots\ldots\ldots + 2\cdot 2+1\cdot 1 = 204$ (zašto)

b) Ukupan broj pravokutnika je:

$\frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{9\cdot 8}{2} = 36\cdot 36 = 1296$ (zašto).

## VII RAZRED

### Prva grupa zadataka

1. Točne su (1) i (6).

2. $\frac{5\cdot 0.3x + 4\cdot 0.4x + 3\cdot 8 + 2(x-0.7x-8)}{x} = 3.9$

$\frac{3.7x + 8}{x} = 3.9.$

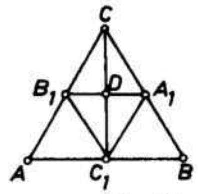
$x = 40.$

12 učenika je dobilo peticu, 16 učenika je dobilo četvorku, 8 učenika trojku i 4 učenika dvojku.

3. Stranice trokuta $A_1B_1C_1$ su: $\overline{A_1B_1} = 8$ cm, $\overline{A_1C_1} = \overline{B_1C_1} = 5$ cm.

1) $\overline{C_1D}^2 = \overline{A_1C_1}^2 - \overline{A_1D}^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \overline{C_1D} = 3.$

2) $P = \frac{1}{2}\,\overline{A_1B_1}\cdot\overline{C_1D} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 = 12\ \text{cm}^2.$



Sl. 27

4. a) (4)
b) Pravilni su a, d.

5. 1) R=5 (polumjer kružnice)

2) $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = \overline{BA} = 5$ ($\overline{AD}$ je srednjica)
3) $O = 4\cdot 5 = 20$

6. 1) r=a = 7 cm.

2) $O_k = 2r\pi = 14\pi = \frac{14\cdot 22}{7} = 44$ cm.

7. 1) Polukrugovi sa promjerima $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ su sukladni.

2) $O = \frac{2a\pi}{2} + \frac{a\pi}{2} + \frac{a\pi}{2} = 2a\pi$

3) $P = \frac{1}{2}(a^2\pi)$

8. $P = 6\ m^2$
$P_d = 1\cdot 41\ m^2$

9. (2) - AD

10. 1) r=1m, h=1m

2) $V = r^2\pi h = 1\cdot\pi\cdot 1 = \pi$

3) $V \approx 3.14\ m^3 = 3140$ lit. > 3000 lit.

Druga grupa zadataka

11. a) $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$
b) $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$
c) $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 20160$.

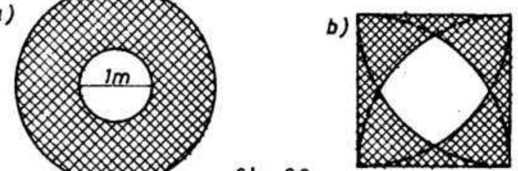
12. a) Kvadrata: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

b) Pravokutnika: $\frac{n(n+1)}{2}\ \frac{n(n+1)}{2}$.

Za n=8 imamo 204 kvadrata i 1296 pravokutnika.

13. Neka su dimenzije kvadra $a,b,c \in N$. Tada imamo:
$P = 2ab+2ac+2bc = 2(ab+ac+bc)$ - a to je djeljivo sa 2 i
$2(ab+bc+ac) > 2$.
Takav kvadar ne može postojati.

14. U sve osjenčene dijelove.




Sl. 28

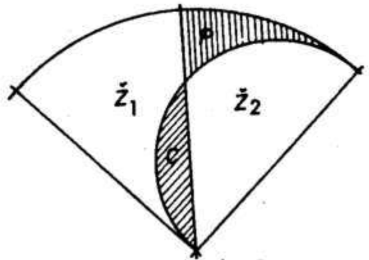


15. 1) $\check{Z}_1 + C = \check{Z}_2 + P = \frac{r^2\pi}{8}$

2) $\check{Z}_2 + C = \frac{1}{2}\ \frac{r^2\pi}{2} = \frac{r^2\pi}{8}$

3) $\check{Z}_2 + C = \check{Z}_1 + C = \quad \check{Z}_1 = \check{Z}_2$

4) $\check{Z}_1 + C = \check{Z}_1 + P = \quad C = P$




Sl. 29

VIII RAZRED

Prva grupa zadataka

1. Točne su (3), (4) i (6).

2. Točne su (2) i (4).

3. 1) $4x$, 2) $4x^2$, 3) $4x^4$, 4) $-8x^6$, 5) $x^4$, 6) $-x$.

4. a) $888889^2 - 111112^2 = 1000001\cdot 777777 = 777777777777$.
b) $249999 = 250000 - 1 = 500^2 - 1^2 = 499\cdot 501 = 3\cdot 167\cdot 499$.

5. a) $\frac{1}{x}$
b) raste
c) $x > 1000$

6. 1) da, 2) da, 3) ne, 4) ne, 5) da.

7. Pravac broj 1.

8. a, c, d, e.

9. a) 0.5,....2.25,......0.5 t.
b) 2,...5,....2 s.

10. $11x + 50 + 70 = 15x$
$x = 30$
Imao je 380 dinara a cijena olovke je 30 dinara.

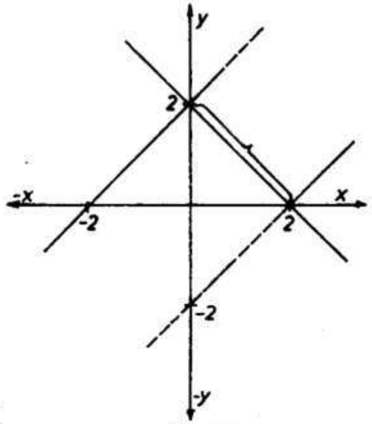
Druga grupa zadataka

11. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
$x^2(x+1) + (x+1) = 0$
$(x+1)(x^2+1) = 0$

Pošto je $x^2+1>0$, imamo
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$.

12. $y=|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \\ -x+2, & x<2 \end{cases}$

$y=-|x|+2=\begin{cases} -x+2, & x>0 \\ x+2, & x<0 \end{cases}$




Sl. 30

Dužina odsječka je $2\sqrt{2}$.

13. Neka je:
x - broj godina Marka
y - broj godina Marije (sada)

Rekao Marko: $x=3\left[y-(x-y)\right]$, odakle je $2x=3y$

Rekla Marija: $x+\left[x+(x-y)\right]=77$, odakle je $3x=y+77$

Supstitucijom dobivamo:

$2x=3(3x-77) \Rightarrow x=33$, pa je $y=22$.

14. a) Slijedi iz $(x-y)^2\geq 0$ za svako $x,y$.

b) $\max P = C$

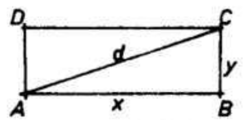
c) 1) $P=xy$

2) $x^2+y^2=100$

3) $x^2+y^2\geq 2xy$

4) $100\geq 2P \Rightarrow P\leq 50$

5) $\max P=50$ za $x=y=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.




Sl. 31

15. a) Kvadrata: $mn+(m-1)(n-1)+\ldots+2(n-m+2)+1\,(n-m+1)$

b) Pravokutnika:
$\frac{m\cdot(m+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

Za $m=4$ i $n=3$ imamo 20 kvadrata i 60 pravokutnika.



# SR BOSNA I HERCEGOVINA

DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I

ASTRONOMA BOSNE I HERCEGOVINE
PODRUŽNICA ZENICA

## OPĆINSKO NATJECANJE

### V RAZRED

1. Riješiti u skupu cijelih brojava

$$|2x-1| + 5 \leq 8.$$

2. Lift se sa VI kata podigao 5 katova, zatim spustio 8 katova, zatim podigao 7 katova, zatim spustio 4 kata i konačno se spustio u prizemlje (0 - kat). Sa kojeg kata?

3. Dat je kvadrat ABCD čiji je centar S. Dokazati da je:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{0}.$$

4. Simetrijom u odnosu na pravac p trokut ABC preslikan je na trokut BAC. Nacrtaj trokut i pravac.

### VI RAZRED

1. Od zbroja koji iznosi A dinara potrošeno je prvo $\frac{3}{4}$, zatim $\frac{1}{2}$ ostatka i konačno 20% novog ostatka. Ako je najnoviji (posljednji) ostatak 100 din, koliko je A?

2. Date su točke $A(-\frac{5}{2})$ i $B(\frac{6}{4})$ na brojevnom pravcu. Konstruktivnim putem naći točku C (1).

3. Od tri jednakostranična trokuta stranice a sačiniti trapez. Odredi: 1. kutove trapeza,
2. srednjicu trapeza.

4. Kutovi četverokuta u stupnjevima su: x, x + 10, x + 30, x + 40. Dokaži da je to trapez.

## VII RAZRED

1. Opseg pravokutnika, čije su stranice x i y, je 200, a površina mu je 634. Izračunati vrijednost izraza
$$x^2y + xy^2.$$

2. Krugovi $K_1$ i $K_2$ imaju opsege $2\pi$ i $10\pi$. Ako je $K_1 \cap K_2 = \{A\}$, odrediti opseg kruga $K_3$ čiji je promjer jednak dužini odredjenoj središtima krugova $K_1$ i $K_2$.

3. Krugu polumjera r upiši i opiši pravilni šesterokut. Izraziti opseg i površinu oba šesterokuta pomoću polumjera r.

4. Vanjski kut pravilnog n-terokuta iznosi $\frac{4}{15}$ pravog kuta. Koliko medjusobno po duljini jednakih dijagonala ima taj n-terokut?

## VIII RAZRED

1. Kako treba sastaviti 12 kocki ivice a da bismo dobili kvadar najmanjeg i kvadar najvećeg oplošja? Naći ta oplošja.

2. Naći oplošje jednog od stožaca čiji razvijeni plašt ima opseg $20 + 20\pi$.

3. Riješiti jednadžbu po x:
$$(a + b) / (a + 2b) + x/b = 1 + b(b-x)/(a(a + 2b))$$

4. U svakoj od tri kutije A, B i C nalazi se po jedna kuglica: ili bijela ili plava ili crna. Na kutijama redom piše: A - bijela, B - crna, C - bijela ili plava, ali nijedan natpis ne odgovara istini. Odrediti boju kuglice u svakoj kutiji.

# REGIONALNO NATJECANJE

## VI RAZRED

1. Naći broj x od kojeg 3.6% iznosi:
$$(3 + 4.2 : 0.1) : \left[(1 : 0.3 - 2\tfrac{1}{3}) \cdot 0.3125\right]$$



2. Odrediti sve peteroznamenkaste brojeve oblika 34A5B (A i B su znamenke) koji pri dijeljenju sa 36 imaju ostatak 2.

3. Dijeleći broj a brojem b dobijemo količnik jednak 1 i ostatak 200. Odrediti brojeve a i b ako im je zbroj 3774.

4. Mjere kutova četverokuta ABCD, u stupnjevima, su redom: $x + 20$, $x - 20$, $x + 100$ i $x + 60$. Dokaži da je četverokut ABCD trapez.

5. Konstruiraj trokut ABC ako je $a = 6$ cm, $h_a = 4$ cm i $h_b = 5$ cm.

## VII RAZRED

1. Duljine stranica pravokutnika su $\sqrt{1987} + \sqrt{1787}$ i $\sqrt{1987} - \sqrt{1787}$. Naći površinu i duljinu dijagonale tog pravokutnika.

2. Osnovice trapeza su 12 cm i 10 cm. Kutovi na većoj osnovici su 30° i 45°. Odrediti površinu trapeza.

3. Zbroj ma kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je sa 5 ali nije djeljiv sa 25. Dokaži!

4. Za linearnu funkciju $f(x) = ax + b$ znamo: $f(6) = 0$ i $f(x) = -3$ povlači $x = 3$. Nacrtati graf funkcije $g(x)$ ako je $g(x) = f(x) : 3 + 2$.

5. Djeljenik je $a^4 + b^4 + 12a^2b^2$, ostatak je $10a^2b^2$, a djelitelj je jednak količniku. Izračunati djelitelj (količnik).

## VIII RAZRED

1. U morskoj vodi nalazi se 3 % soli. Koliko kilograma slatke vode treba dodati u 40 kg morske vode da bi količina soli u mješavini bila 2 %?

2. Ako je $v = 1987$ i $k = 1787$, a
$$s = \left[(v^2 - k^2) : (\tfrac{1}{v} + \tfrac{1}{k})\right] : vk,$$
riješi jednadžbu
$$(200x + 800) : s + (x - 5):(s - 198) = x:(2s - 396) + 1$$

3. Odrediti uzastopne brojeve a i b oblika: $a = 2\cdot(n - 3)\cdot(n + 1)$, $b = (n - 2)\cdot(2n - 1)$, pri čemu je n prirodni broj.

4. Dat je kvadrat ABCD i točka E – sredina stranice $\overline{AB}$. Točka S je presjek dijagonale $\overline{AC}$ i dužine $\overline{DE}$. Odrediti površinu četverokuta BCSE ako je dužina stranice kvadrata 12 cm.

5. Jednakostranični trokut ABC čija je stranica a, zaklapa sa ravninom R kut od 45° pri čemu je jedna stranica trokuta ABC paralelna sa R. Nacrtati ortogonalnu projekciju trokuta ABC na ravninu R i naći joj površinu.

## REPUBLIČKO NATJECANJE

### VII RAZRED

1. Pokazati da je vrijednost polinoma:

   $P(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 7xy + 5x - 2$ jednaka 1 za $2x+y-1=0$

2. Data je funkcija: $y = (2m+1)\cdot x + 6$

   a) odrediti vrijednost parametra m tako da njen graf prolazi točkom (4,3)

   b) odrediti udaljenost koordinatnog ishodišta od tog pravca.

3. Naći posljednje četiri znamenke broja $x = 6\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot 28\cdot 29$

4. Izračunaj opseg trokuta ako je $a=10$, $\beta=60^\circ$ i $\gamma=75^\circ$

5. 2r kružnice je visina jednakostraničnog trokuta. U kojem su odnosu dijelovi stranica trokuta razdjeljeni presječnim točkama kružnice

### VIII RAZRED

1. Usporediti brojeve: $m = 202^{303}$ i $n = 303^{202}$.

2. Dokazati da je za sve vrijednosti a, $a \neq \pm\frac{1}{2}$ izraz:

   $$\left(\frac{4a^2}{2a+1} + \frac{1}{2a-1}\right)\cdot\left(\frac{8a^3}{2a-1} + \frac{1}{2a+1}\right)$$ negativan.

3. Od 65 % i 40 % rastvora kuhinjske soli treba pripremiti 15 litara 55% rastvora. Po koliko litara treba da se uzme od svakog rastvora.



4. U kvadrat stranice a upisan je luk sa centrom u vrhu kvadrata i polumjerom a. U preostali dio kvadrata upisana je kružnica polumjera r = 1. Izračunati a.

5. Kugla polumjera R je upisana u uspravni stožac visine H = = 4R. Dokazati da se oplošja tih tijela odnose kao njihovi volumeni.

# R J E Š E N J A

## OPĆINSKO NATJECANJE

### V RAZRED

1. $|2x-1| + 5 \leq 8 \Rightarrow |2x-1| \leq 8-5 \Rightarrow |2x-1| \leq 3$

   Mora biti: $2x-1 \leq 3$ i $2x-1 \geq -3$

   $2x-1 \leq 3 \qquad 2x-1 \geq -3$

   $2x \leq 4 \qquad 2x \geq -2$

   $x \leq 2 \qquad x \geq -1$

   Pošto je x cio broj $\Longrightarrow x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

2. $6+5-8+7-4-x = 0$

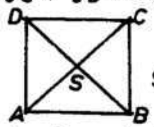
   $6-x = 0$

   $x = 6$

   Posljednji put se spustio sa 6. kata.

3. $\vec{SA} = -\vec{SC}$ i $\vec{SB} = -\vec{SD}$

   $\Longrightarrow \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = -\vec{SC} + \vec{SC} - \vec{SD} + \vec{SD} = \vec{0}.$



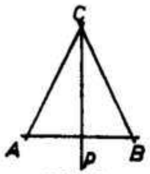

Sl. 1

4. Radi se o jednakokračnom trokutu, os simetrije sadrži visinu spuštenu iz vrha C na osnovicu AB.

   $s_p$: A - - - - - > B

   $s_p$: B - - - - - - > A

   $s_p$: C - - - - - - > C $\Longrightarrow s_p(\triangle ABC) = \triangle BAC$




Sl. 2

### VI RAZRED

1. $A - 3A/4 = A/4$

   $A/4 - 1/2 \cdot A/4 = 2A/8 - A/8 = A/8$

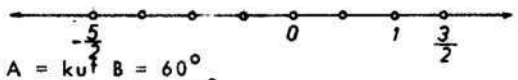
   $A/8 - 20/100 \cdot A/8 = A/8 - 1/5 \cdot A/8 = 5A/40 - A/40 = A/10$

   $A/10 = 100 \Longrightarrow A = 1000$



2. Točke $A(-5/2)$ i $B(6/4$ su medjusobno udaljene za $6/4 - (-5/2) = 3/2 + 5/2 = 8/2 = \underline{4}.$

   4 jedinice, koliko sadrži dužina $\overline{AB}$, podijelićemo na 8 dijelova. Točka $C(1)$ je od točke B udaljena za 1/2 (1 podiok) ulijevo




3. a) kut A = kut B = $60^\circ$

   kut C = kut D = $120^\circ$

   b) srednjica $EF = (a+a+a)/2 = 3a/2.$

4. Ukupan zbroj kutova je $360^\circ$, pa je

   $x + x + 10^\circ + x + 30^\circ + x + 40^\circ = 360^\circ$

   $4x = 280^\circ \Longrightarrow x = 70^\circ$

   Kutovi četverokuta: $70^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 110^\circ$

   Četverokut ima dva para suplementnih susjednih kutova, što znači da je to trapez.

### VII RAZRED

1. $O = 2x+2y = 2(x+y) = 200 \Longrightarrow x+y = 100$

   $P = x \cdot y = 634$

   $x^2y + xy^2 = xy(x+y) = 634 \cdot 100 = 63400$

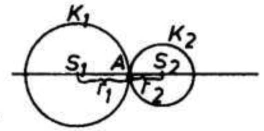
2. Pošto je $K_1 \cap K_2 = \{A\}$, to se krugovi $K_1$ i $K_2$ dodiruju, s vanjske ili nutarnje strane. S obzirom na to imamo dva slučaja:

   a) $\overline{S_1S_2} = r_1 + r_2$, $r_3 = (r_1+r_2)/2$

   $O_1 = 2\pi$, $2\pi = 2r_1\pi \Longrightarrow r_1 = 1$

   $O_2 = 10\pi$, $10\pi = 2r_2\pi \Longrightarrow r_2 = 5$

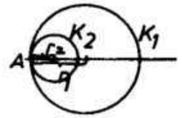
   $r_3 = (5+1)/2 = 3$, $O_3 = 2 \cdot 3\pi = 6\pi$




Sl. 3

   b) $\overline{S_1S_2} = r_1 - r_2 = 5 - 1 = 4$

   $r_3 = 4/2 = 2$, $O_3 = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$

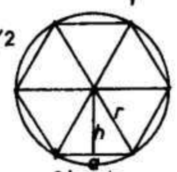



3. a) Upisani šesterokut:

   $a = r$, $h^2 = r^2 - (a/2)^2 = r^2 - r^2/4 = 3r^2/4 \Longrightarrow h = r\sqrt{3}/2$

   $O_u = 6r$

   $P_u = 6 \cdot a \cdot h/2 = 3ah = 3r \cdot r\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}\, r^2/2$




Sl. 4

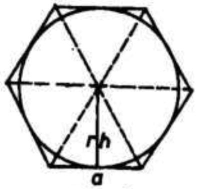
b) Opisani šesterokut:

$h = r$ i $h = a\sqrt{3}/2 \Longrightarrow a = 2h/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\cdot r/3$

$O_o = 6a = 6\cdot 2r/\sqrt{3} = 12r/\sqrt{3} = 12r\sqrt{3}/\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 4r\sqrt{3}$

$P_o = 6ah/2 = 6ra/2 = (6r/2)\cdot(2r/\sqrt{3}) = 6r^2\sqrt{3}/\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} =$

$= 6r^2\sqrt{3}/3 = 2r^2\sqrt{3}$




Sl. 5

4. $S_v = 360^\circ = n\cdot\alpha_v$

$\alpha_v = 360^\circ/n$ (1)

$\alpha_v = 4\cdot 90^\circ/15 = 24^\circ$ (2)

(1) i (2) : $360^\circ/n = 24^\circ$

$\Longrightarrow n = 360/24 = 15$ ----- pravilni petnaesterokut.

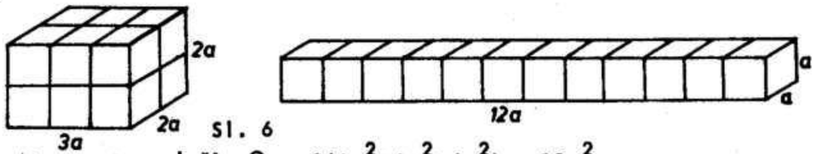
Iz svakog vrha polazi $15-3 = 12$ dijagonala, od kojih su po dvije medjusobno jednake. Imamo, dakle, šest grupa dijagonala iste duljine. Kako je ukupan broj dijagonala

$n\cdot(n-3)/2 = 15\cdot 12/2 = 90,$

to u svakoj grupi ima po 15 dijagonala iste duljine.

## VIII RAZRED

1.




Sl. 6

Najmanje oplošje $O = 2(6a^2+6a^2+4a^2) = 32a^2$

Najveće oplošje $O = 2(12a^2+12a^2+a^2) = 50a^2$

2. Opseg razvijenog stožca

$O = 2s + 2r\pi \Longrightarrow 20 + 12\pi = 2s + 2r\pi$

Uzmimo slučaj $2s = 20 \Longrightarrow 2r\pi = 12\pi \Longrightarrow r = 6,\ s = 10$

$O = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r+s) = 6\pi(6+10) = 96\pi$

3. $(a+b)/(a+2b)+x/b = 1+b(b-x)/(a(a+2b)) \quad /\cdot ab(a+2b),$



$ab(a+2b)$ mora biti različito od nule.

$a^2b+ab^2+xa(a+2b) = ab(a+2b)+b^2(b-x)$

$xa(a+2b)-b^2(b-x) = ab(a+2b)-ab(a+b)$

$x(a^2+2ab)-b^3+b^2x = ab(a+2b-a-b)$

$x(a^2+2ab+b^2) = ab^2+b^3$

$x = (b^3 + ab^2)/(a+b)^2$

$x = b^2(a+b)/a+b)^2 = b^2/(a+b)$

za $a+b \neq 0,\ a+2b \neq 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

Za $a+b = 0$, $a = -b = 0$ jednadžba nema rješenja.

Za $a = 0$ i $b = 0$ i $a = -2b$ jednadžba nije definirana.

4.

| | | |
|---|---|---|
| bijela | crna | bijela ili plava |
| A | B | C |

Prema uvjetima zadatka očito mora biti u C crna, u A plava i u B bijela kuglica

## VI RAZRED

1. $I = (3+4.2:0.1) : \left[(1:0.3 - 2\frac{1}{3})\ 0.3125\right] = (3+42):$

$: \ (1\cdot\frac{10}{3} - \frac{7}{3})\cdot\frac{5}{16} \ = 45 : \left[1\cdot\frac{5}{16}\right] = 45\cdot\frac{16}{5} = 144.$

$3.6\%$ od $x = 144 \Rightarrow x = 4000.$

2. Vidi rješenje SR Slovenija - općinsko natjecanje - VI razred.

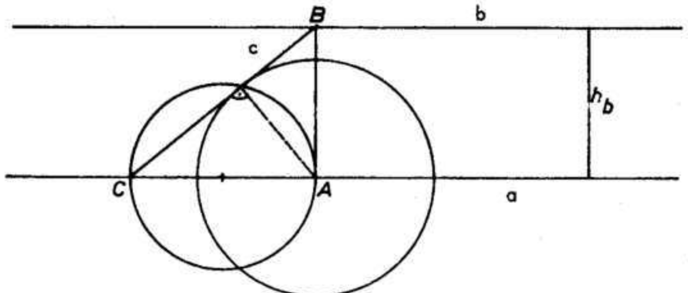
3. Imamo slijedeće jednadžbe:

$a + b = 3774$
$a - b = 200$
Rješavanjem sistema dobijemo $a = 1987$ i $b = 1787$.

4. 1) Iz $x + 20^\circ + x - 20^\circ + x + 100^\circ + x + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow$
$= 4x + 160^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 50^\circ.$

2) Kutovi tog četverokuta su: $70^\circ$, $30^\circ$, $150^\circ$, $110^\circ$. A kako je $70^\circ + 110^\circ = 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ četverokut je trapez.

5. Nacrtajmo dva paralelna pravca a i b čije je rastojanje $h_b = 5$ cm. Zatim nanesimo na pravac $\overline{AC} = a = 6$ cm.
Opišimo kružnicu sa središtem u A polumjera $h_a = 4$ cm, zatim konstruirajmo kružnicu $k_2$ nad promjerom $\overline{AC}$. Povucimo pravac c koji prolazi sjecištem kružnica $k_1$ i $k_2$ te točkom C. Sjecište pravaca b i c je točka B.




Sl. 7





1. Dužina dijagonale je:

$x^2 = (\sqrt{1987} + \sqrt{1787})^2 + (\sqrt{1987} - \sqrt{1787})^2$
$x^2 = 1987 + 2\cdot\sqrt{1987\cdot1787} + 1787 + 1987 - 2\sqrt{1987\cdot1787} + 1787$
$x = \sqrt{2\cdot(1987 + 1787)} \approx 86.8.$

Površina trokuta je:

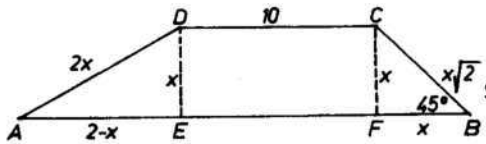
$P = (\sqrt{1987} + \sqrt{1787})\ (\sqrt{1987} - \sqrt{1787})$
$P = 1987 - 1787 = 200.$

2. Neka je ABCD zadani trapez. Povucimo visine trapeza $\overline{DE} = \overline{CF} = x$. $\triangle FBC$ je polovina kvadrata pa je $\overline{BC} = x\sqrt{2}$. $\triangle AED$ je polovina istostraničnog trokuta pa je $\overline{AD} = 2x$ i $\overline{AE} = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$. No, pošto je $\overline{AE} = 2 - x$ imamo:

$2 - x = x\sqrt{3}$
$x(1 + \sqrt{3}) = 2$
$x = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$

Prema tome površina trapeza je:

$P = \frac{10+12}{2}(\sqrt{3} - 1) = 11(\sqrt{3} - 1)\ cm^2.$




Sl. 8

3. Ako je n nepoznat broj imamo:
$n+n+1+n+2+n+3+n+4 = 5n + 10 = 5(n+2).$
Traženi zbroj je uvijek djeljiv sa 5, a sa 25 samo onda ako je n oblika $n = 5k+3$, gdje je $k \in Z$.

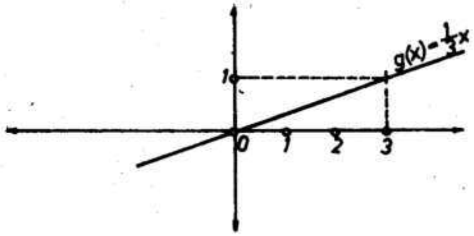
4. Iz zadanih uvjeta postavimo slijedeće jednadžbe:

$6a + b = 0$
$3a + b = -3$

Rješavanjem jednadžbi dobijemo da je $a = 1$ i $b = -6$. Prema tome, $f(x) = x - 6$, a $g(x) = \frac{x-6}{3} + 2 = \frac{x+0}{3} = \frac{1}{3}x$ ..



Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj




5. Iz zadanih uvjeta imamo:

$a^4 + b^4 + 12a^2b^2 = x \cdot x + 10a^2b^2$, gdje je x nepoznati količnik.

Transformiranjem izraza dobijemo:

$x^2 = (a^2 + b^2)^2$, odnosno

$x = \pm (a^2 + b^2)$.

## VIII RAZRED

1. Označimo sa x potrebnu količinu slatke vode. Imamo:

$40 \cdot 3\% + x \cdot 0\% = (40 + x) \cdot 2\%$.
Odavde sređivanjem dobivamo:
$120 = 80 + 2x \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20$.
Treba dodati 20 litara.

2. Ako izraz s transformiramo dobijemo:

$$s = \left[(v^2 - k^2) : \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{k}\right)\right] : vk = \left[(v-k)\cdot(v+k)\cdot\frac{v\,k}{v+k}\right]\cdot\frac{1}{v\cdot k} =$$

$$= \frac{(v-k)\cdot v\cdot k}{v\cdot k} = v - k$$

Uvrštavanjem $v = 1987$ odnosno $k = 1787$ imamo:
$s = v - k = 1987 - 1787 = 200$.
Zatim supstituiramo s u zadanu jednadžbu i imamo:

$(200x + 800) : 200 + (x-5) : 2 = x : 4 + 1$, ili

$$x + 4 + \frac{x-5}{2} = \frac{x+4}{4} \Rightarrow 4x + 16 + 2x - 10 = x + 4 \Rightarrow 5x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}.$$

3. Imamo dva slučaja da a i b budu uzastopni.

a) $a + 1 = b$, odnosno
$2\cdot(n-3)\cdot(n+1) + 1 = (n-2)\cdot(2n-1)$, odakle sređivanjem dobivamo:

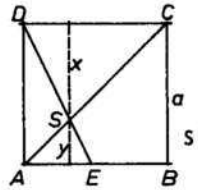
$2n^2 - 4n - 5 = 2n^2 - 5n + 2$ ili $-4n + 5n = 2 + 5 = \quad n = 7$.

b) $a = b + 1$
$2\cdot(n-3)\cdot(n+1) = (n-2)\cdot(2n-1) + 1$



$2n^2 - 4n - 6 = 2n^2 - 5n + 3$
$-4n + 5n = 3 + 6$
$n = 9$.
Za $n = 7$ imamo: $a = 2\cdot4\cdot8 = 64$, $b = 5\cdot13 = 65$.
Za $n = 9$ imamo: $a = 2\cdot6\cdot10 = 120$, $b = 7\cdot17 = 119$.

4. Neka je ABCD zadani kvadrat.

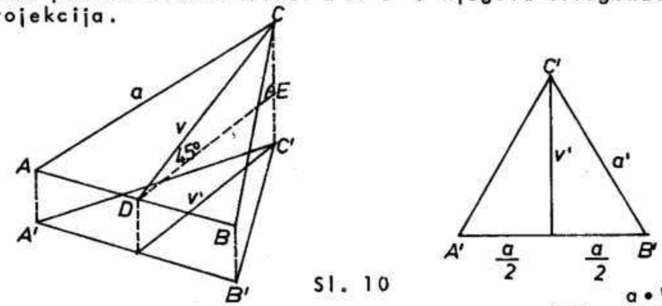



Sl. 9

1) $\triangle AES \sim \triangle DSC = a : \frac{a}{2} = x : y \Rightarrow x = 2y \Rightarrow x = 8,\ y = 4$.

2) $P_{\Pi}\ BCSE = P_{\triangle}\ ABC - P_{\triangle}\ AES = \frac{12\cdot12}{2} - \frac{6\cdot4}{2} = 72 - 12 =$
$= 60\ cm^2$.

5. Neka je ABC zadani trokut a A'B'C' njegova ortogonalna projekcija.




Sl. 10

1) $\triangle DEC$ je polovina kvadrata pa je $\overline{DE} = v' = \dfrac{\overline{DC}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} =$

$$= \frac{a\ \sqrt{3}}{2\ \sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a\ \sqrt{6}}{4}.$$

2) $P_{\triangle}\ A'B'C' = \dfrac{a\cdot v'}{2} = \dfrac{a^2\ \sqrt{6}}{8}$

## REPUBLIČKO NATJECANJE

### VII RAZRED

1. Dati polinom se može transformirati: $P(x,y)=(2x^2+xy-x)+(6xy+3y^2-3y)+(6x+3y-3)+1 = x(2x+y-1)+3y(2x+y-1)+3(2x+y-1)+1 = 1$, jer su svi izrazi u zagradama po pretpostavci jednaki 0.

2. a) U datoj formuli zamjenimo koordinate date točke: $x=4$, $y=3$ i dobijamo: $3=(2m+1)\cdot 4+6$, odakle je $m=-\frac{7}{8}$ i funkcija ima formulu: $y=-\frac{3}{4}x+6$.

   b) Stavljajući $x=0$, pa $y=0$, nalazimo koordinate točaka presjeka grafa sa koordinatnim osima. Pravac sa osima Ox i Oy odredjuje pravokutni trokut OAB sa katetama $\overline{OA}=8$ i $\overline{OB}=6$. Nije teško izračunati duljinu hipotenuze: $\overline{AB}=10$.

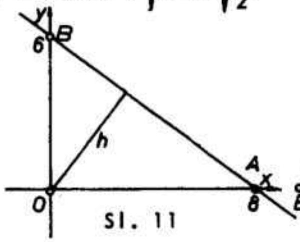
   Sada iz površine trokuta OAB dobijamo: $P=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h$, odnosno: $\frac{1}{2}\,8\cdot 6=\frac{1}{2}\,10\cdot h$. Odavde je tražena udaljenost $h=4.8$.

3. Medju faktorima datog produkta nalaze se i brojevi: 8,10,20,25, a njihov produkt je 40000, pa se produkt x sigurno završava sa četiri nule.

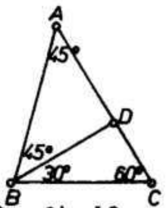
4. Treći kut našeg trokuta je: $\alpha=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$. Neka je $\overline{BD}$ visina. Tada je kut $\beta$ podijeljen na dijelove od $30^\circ$ i $45^\circ$, pa je trokut ABD pravokutan jednakostraničan, a trokut BCD je polovina jednakostraničnog trokuta sa stranicom $a=10$. Ostale stranice trokuta BCD znamo da izračunamo:

   $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=5$ i $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$. Kako je $\overline{AD}=\overline{BD}$, to je $\overline{AD}=5\sqrt{3}$. Traženi opseg je:

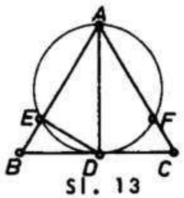
   $O=10+5+5\sqrt{3}+5\sqrt{\frac{6}{2}}$



Sl. 11



Sl. 12



Sl. 13



5. Neka je ABC jednakostraničan trokut stranice $\overline{BC}=a$ i neka su E i F presječne točke kruga sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Kut AED je pravi, kao kut nad promjerom, pa je $\measuredangle BED=90^\circ$. Trokut BED je polovina jednakostraničnog trokuta, pa je $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{a}{4}$. Zbog toga je $\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{BE}=\frac{3}{4}a$ i $\overline{AE}:\overline{EB}=\frac{3}{4}a:\frac{1}{4}a=3:1$. Točka F je simetrična sa E u odnosu na visinu $\overline{AD}$, pa je takodje $\overline{AF}:\overline{FC}=3:1$.

### VIII RAZRED

1. Vidi rješenje SAP Vojvodina - općinsko natjecanje - VII raz.

2. $A=\left(\frac{4a^2}{2a+1}-\frac{1}{2a+1}\right)+\left(\frac{1}{2a-1}-\frac{8a^3}{2a-1}\right)=\frac{4a^2-1}{2a+1}+\frac{1-8a^3}{2a-1}=$

   $=\frac{(2a-1)(2a+1)}{2a+1}+\frac{(1-2a)(1+2a+4a^2)}{-(1-2a)}=2a-1-(1+2a+4a^2)=$

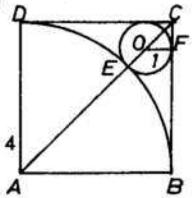
   $=-4a^2-2<0$ za svako $a$.

3. Pretpostavimo da je potrebno x litara 65 postotnog rastvora. Tada je pomiješano $(15-x)$ litara drugog rastvora. Ukupni sadržaj soli u tom miješanju, izražena u postocima, predstavljen je jednadžbom: $65x+40(15-x)=15\cdot 55$. Odavde je $x=9$. Znači uzimamo 9 litara prvog rastvora i 6 litara drugog.

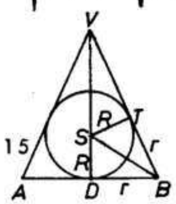
4. Neka je O centar manjeg kruga, a F dodirna točka sa stranicom $\overline{BC}$. Trokut OCF je jednakokračan pravokutni sa katetom dužine $r=1$, pa je $\overline{OC}=\sqrt{2}$. Dakle: $\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EO}+\overline{OC}=a+1+\sqrt{2}$, pa kako je $\overline{AC}=a\sqrt{2}$, imamo jednakost: $a\sqrt{2}=a+1+\sqrt{2}$, odakle je $a(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1$, tj.

   $a=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. Dalje imamo: $a=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=3+2\sqrt{2}$.

Sl. 14



Sl. 15



5. Na slici 15 je prikazan osni presjek datih tijela. Hipotenuza pravokutnog trokuta STV je $\overline{SV}=3R$, pa je, na osnovu Pitago-

rinog teorema: $\overline{TV}=\sqrt{8R^2}=2R\sqrt{2}$. Lako se dokazuje sukladnost pravokutnih trokuta BDS i BST, odakle je $r=\overline{BD}=\overline{BT}$. Sada primjenimo Pitagorin teorem na pravokutni trokut BDV: $\overline{BD}^2+\overline{DV}^2=\overline{BV}^2$, odnosno $r^2+16R^2=(r+2R\sqrt{2})^2$. Odavde dobijamo $r=R\sqrt{2}$. Zbog toga je $s=\overline{BV}=3R\sqrt{2}$. Izračunajmo oplošje i volumen datih tijela: $O=4R^2\pi$, $V=4/3\ R^3\pi$ (kugla) i

$O_1=r^2\pi+r\pi s=8R^2\pi$ i $V_1=\frac{1}{3}r^2\pi H=\frac{8}{3}R^3\pi$ (uspravni stožac).

Prema tome: $O:O_1=4R_1\pi : 8R^2\pi=1:2$ i $V:V_1=\frac{4}{3}R^3\pi : \frac{8}{3}R^3\pi=1:2$, pa je $O:O_1=V:V_1$.



# SR SLOVENIJA

ZAVOD SR SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO
I DMFA SR SLOVENIJE

OPĆINSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE ZA UČENIKE
OSNOVNIH ŠKOLA

18. april 1987.

VI RAZRED

1. Za koje vrijednosti varijable x ima razlomak:
   a) $\frac{x}{8}$ vrijednost $\frac{125}{1000}$
   b) $\frac{8}{5\cdot x}$ vrijednost $\frac{1}{5}$
   c) $\frac{100}{x}$ vrijednost 800
   č) $\frac{x-7}{4x}$ vrijednost 0.

2. Mojca potroši trećinu svog mjesečnog džeparca koji iznosi 1200 din u slastičarnici, a za ostali dio kupi knjige. U slastičarnici su povisili cijene za polovinu, a knjige su poskupile za 30%, pa su roditelji Mojci povisili džeparac za 500 din. Da li sada Mojca ima dovoljno novca?

3. U zapisu $\overline{34a5b}$ peteroznamenkastog broja zamijeni slova a i b sa takvim znamenkama, da taj peteroznemankasti broj bude djeljiv sa 36.
   Rješenje obrazloži! Potraži sva rješenja!

4. Nacrtaj trokut s podacima $v_b = 3$ cm, $v_c = 4$ cm i $\measuredangle A = 75^\circ$.
   Opiši postupak!

5. U jednakostraničnom trokutu ABC nacrtaj visinu kroz vrh C. Jedan kraj te visine je C a drugi D. Promatrajmo pravokutni trokut ACD. Simetrala kuta $\measuredangle CAD$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki E, simetrala kuta $\measuredangle DCA$ siječe dužinu $\overline{AD}$ u točki F. Obje simetrale imaju zajedničku točku S. Izračunaj unutrašnje kuteve četverokuta DESF!

## VII RAZRED

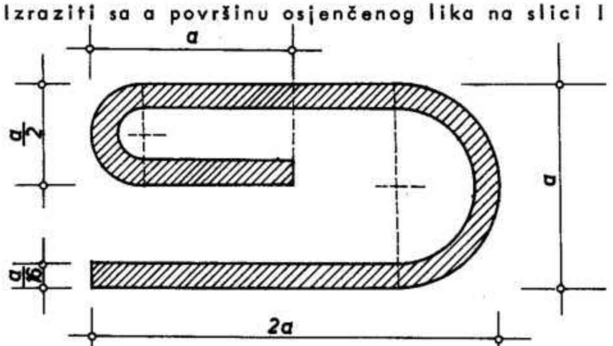
1. Za koje vrijednosti promjenljive x vrijedi:

   a) $\frac{1}{x} < 1$ b) $\frac{-5}{3-x} > 0$ c) $|x| = x$?

2. Dokazati da je $3^{16} + 3^{14}$ djeljivo sa 10.

3. Vrijednost varijable y je za 25% veća od vrijednosti varijable x. Za koliko % je vrijednost varijable x manja od vrijednosti varijable y?

4. Izraziti sa a površinu osjenčenog lika na slici 1




Sl. 1

5. Kroz vrh B paralelograma ABCD nacrtaj pravac p koji je paralelan dijagonali $\overline{AC}$ paralelograma. Pravac p siječe produžetak stranice $\overline{AD}$ u točki E, a produžetak stranice $\overline{CD}$ u točki F. Izračunati opseg trokuta DEF ako je poznat opseg paralelograma ABCD jednak 64 m i dijagonala $\overline{AC}$ = = 25 m.

## VIII RAZRED

1. Srednja znamenka troznamenkastog broja je nula. Ako tu nulu izostavimo dobijamo šest puta manji dvoznamenkasti broj. Potraži sve takve troznamenkaste brojeve.

2. Istovremeno su iz dva različita mjesta krenuli u susret dva biciklista. Poslije susreta je prvi biciklista vozio do startnog mjesta drugog bicikliste još 27 minuta, a drugi biciklista do startnog mjesta prvog bicikliste još 12 minuta. Koliko je vremena trebao za put prvi i koliko drugi biciklista ako su se kretali različitim konstantnim brzinama?



3. Dokazati da vrijedi jednakost:

   $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

   i poslije izračunati sumu

   $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{97\cdot 98} + \frac{1}{98\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 100}$$

4. Dat je pravokutnik ABCD ($\overline{AB}$ = 8 cm i $\overline{BC}$ = 5 cm) i točka M na stranici $\overline{CD}$, takva da je $\overline{CM} : \overline{MD} = 3 : 2$. Neka je E sjecište pravaca (A,M) i (B,C) i F sjecište simetrale kuta $\measuredangle$A i pravca (B,C). Izračunaj površinu trokuta AFE.

5. Dat je pravokutnik ABCD sa stranicama $\overline{AB}$ = 40 cm i $\overline{AD}$= = 30 cm. Neka je p normala na ravninu pravokutnika kroz točku D. Neka je T takva točka na pravcu p, za koju vrijedi $\overline{DT}$ = 10 cm. Koliko je točka T udaljena od dijagonale $\overline{AC}$?

## REPUBLIČKO NATJECANJE

16. 05. 1987.

## VII RAZRED

1. Svaki put kad pogriješi pri izradi domaćih zadataka, nemarni Janez istrgne list iz bilježnice. Tako mu se desilo da iz jedne bilježnice istrgne svaki treći, a iz druge iste takve, svaki četvrti list. Tako se nakupio 21 istrgnut list. Koliko je bilo prvobitno listova u svakoj bilježnici i za koliko posto je smanjen ukupan broj listova?

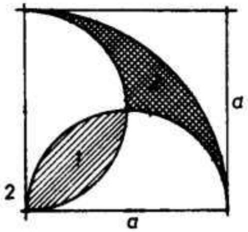
2. Trgovina je naprije povećala cijenu za 20%, a potom je novu cijenu snizila za 20%. Poslovodja je izračunao da se na taj način prvobitna cijena smanjila za 20 dinara. Koliki bi gubitak imala trgovina da je povećanje i smanjenje iznosilo 10%.

3. Nacrtati spiralu sastavljenu od 5 polukrugova. Njihova središta su na jednom pravcu, a polumjer svakog slijedećeg jednak je 3/4 polumjera prethodnog polukruga. Izračunaj dužinu spirale ako je polumjer prvog kruga jednak r.



Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj

4. Dva polukruga i četvrtina trećeg kruga u kvadratu, prema sl. 2, omedjuju dva lika različito osjenčena. Izračunaj površine ovih likova i uporedi ih.



Sl. 2

5. Na natjecanju izvidjača jedan natjecatelj ide najprije 4 km uzbrdo. Tamo skrene za 120° lijevo i prijedje još 3 km. Zatim ponovo skrene lijevo za 120° i prijedje još 2 km. Zatim skrene desno za 60° i ide pravo do cilja 2 km. Kolika je najkraća udaljenost od starta do cilja?

## VIII RAZRED

1. Veza izmedju varijabli x i y dana je jednadžbom

$$\frac{7y-3x}{2} = 2 - \frac{5}{6}x.$$

Odrediti sve cijele vrijednosti varijable x za koje je $1 < y < 2$.

2. Naći sve vrijednosti varijabli x i y za koje razlomak

$$\frac{8-(7+2x)^2}{11+(3x-y+1)^2} \text{ ima najveću vrijednost.}$$

3. Izračunaj koliko je ukupno zlata u dvije zlatarske legure, ako su dati podaci:
a) ukupna masa obje legure je s kg;
b) u prvoj leguri je a% zlata, a u drugoj b%;
c) u prvoj leguri je za r kg zlata više nego u drugoj.

4. U polukrugu promjera $\overline{AB}$ = 8 cm nacrtani su nad polumjerima $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$ dva polukruga sa promjerima $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$. Izračunati površinu kruga koji dodiruje iznutra veliki krug, a s vanjske strane dodiruje oba manja polukruga.

5. Od dijagonale kocke jedan vrh je udaljen 7 cm. Izračunati oplošje kocke.



# RJEŠENJA

## OPĆINSKO NATJECANJE

### VI RAZRED

1. a) $\frac{125}{1000} = \frac{1\cdot125}{8\cdot125} = \frac{1}{8}$, x=1

b) $\frac{1}{5} = \frac{1\cdot8}{5\cdot8} = \frac{8}{5\cdot8}$, x=8

c) $\frac{100}{x} = 100\cdot\frac{1}{x}$, $\quad 100\cdot\frac{1}{x} = 100\cdot8$

$\frac{1}{x} = 8$, $\quad x = \frac{1}{8}$.

č) $\frac{x-7}{4\cdot x} = 0$, $x-7=0$, $x=7$.

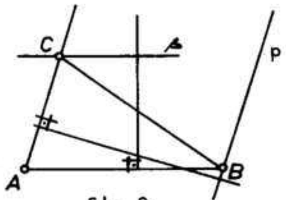
2.

| | džeparac | slastičarnica | knige |
|---|---|---|---|
| Prije poskupljenja | 1200 | 400 | 800 |
| poslije poskupljenja | 1700 | 400+200=600 | 800+30% 800 |
| | | | 1040 |

novi troškovi 600+1040=1640
1700-1640=60
Mojci ostaje još 60 din.

3. $\overline{34a5b}$ je djeljivo sa 4, ako je 5b djeljivo sa 4. Zbog toga mora biti $b\in\{2,6\}$
$\overline{34a5b}$ je djeljivo sa 9, ako je 12+a+b djeljivo sa 9. Tada je $a+b\in\{6,15\}$
b=2, a=4
b=6, a=0
b=6, a=9
Brojevi su 34452 34056 34956.

4. Konstruiramo kut $\measuredangle A$. Nacrtamo $v_b$ i pravac p, koji je paralelan kraku kuta, sada još $v_c$ i pravac s, koji je paralelan drugom kraku kuta $\measuredangle A$ i konačno označimo vrhove.



Sl. 3



Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj

5. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\delta = 90^\circ$

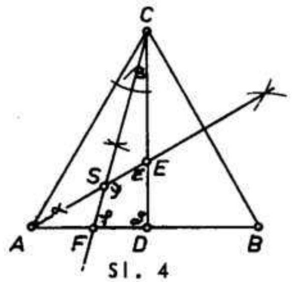
$\varphi = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$

$\varepsilon = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\psi = 360^\circ - (\varphi + \delta + \varepsilon) =$

$= 360^\circ - (75^\circ + 90^\circ + 60^\circ) =$

$= 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$




Sl. 4

## VII RAZRED

1. a) $\frac{1}{x} < 1$ , $x < 0 \lor x > 1$

b) $\frac{-5}{3-x} > 0$ , $3 - x < 0$ , $x > 3$

c) $|x| = x$ , $x \geq 0$

2. $3^{16} + 3^{14} = 3^{14}(3^2 + 1) =$

$= 3^{14} \cdot 10$

3. $y = x + \frac{25}{100}x$ , $y = 1.25x$

$x = \frac{y}{1.25}$ , $x = 0.8y$

Varijabla x je za 20% manja od varijable y.

4. $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = P$

$P_1 = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{16}$ , $P_3 = \frac{5a}{4} \cdot \frac{a}{16}$ , $P_5 = \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{16}$

$P_2 = \frac{(a/2)^2 \pi}{2} - \frac{(a/2 - a/16)^2 \pi}{2} = \frac{a^2 \pi}{8} - \frac{49a^2 \pi}{512} =$

$= \frac{15a^2 \pi}{512}$

$P_4 = \frac{(a/4)^2 \pi}{2} - \frac{(a/4 - a/16)^2 \pi}{2} = \frac{a^2 \pi}{32} - \frac{9a^2 \pi}{512} =$

$= \frac{7a^2 \pi}{512}$

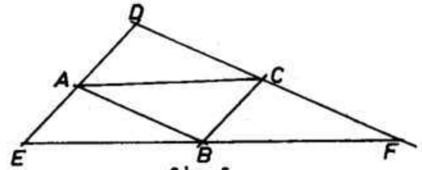
$P = \frac{3a^2}{32} + \frac{15a^2 \pi}{512} + \frac{5a^2}{64} + \frac{7a^2 \pi}{512} + \frac{3a^2}{64} =$



$= \frac{112a^2 + 22a^2 \pi}{512} = \frac{a^2}{256}(56 + 11\pi)$

5. $O_{ABCD} = 64$ m

$\overline{AC} = 25$ m




Sl. 5

$\overline{AC} \cong \overline{EB} \cong \overline{BF}$

$\overline{AE} \cong \overline{BC}$

$\overline{CF} \cong \overline{AB}$

$O_{EFD} = O_{ABCD} + 2 \cdot \overline{AC}$

$O_{EFD} = 64 + 2 \cdot 25$

$O_{EFD} = 114$ m

## VIII RAZRED

1. $\overline{a0b}$ $\overline{ab}$

$a \in \{1, \ldots, 9\}$ , $b \in \{0, \ldots, 9\}$

$a \cdot 100 + b = 6 \cdot (a \cdot 10 + b)$

$100a + b = 60a + 6b$

$40a = 5b$

$8a = b$

$a = 1$, $b = 8$, $a < 2$ nije moguće

Jedini takav broj je 108.

2. A S B

1. bicikl. $\frac{s}{t + 27}$ $\frac{s}{t + 27} \cdot t$

2. bicikl. $\frac{s}{t + 12}$ $\frac{s}{t + 12} \cdot 12$

$\frac{s}{t + 27} \cdot t = \frac{12s}{t + 12} \quad \backslash : s$

$t(t + 12) = 12(t + 27)$

$t^2 + 12t = 12t + 27 \cdot 12$

$t^2 = 12 \cdot 27$

$t = 18$

Prvi biciklista je trebao za put 18+27 minuta, a drugi a drugi 18+12 minuta.

3. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{97\cdot 98} + \frac{1}{98\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 100} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{98}\right) + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

4. $x = \overline{EC}$

$\overline{MC} : \overline{EC} = \overline{AB} : \overline{EB}$

$\frac{3\cdot 8}{5\cdot x} = \frac{8}{x+5}$

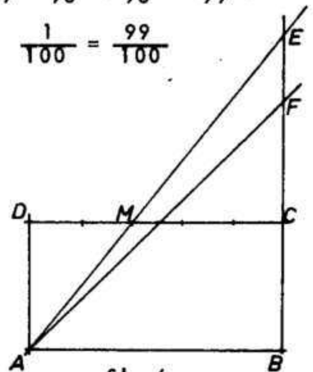
$\frac{24}{5\cdot x} = \frac{8}{x+5}$

$40x = 24(x+5)$

$40x = 24x + 120$

$16x = 120$

$x = 7.5$



Sl. 6

$P_{AFE} = P_{ABE} - P_{ABF}$ , $P_{AFE} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BE}}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{2}$

$P_{AFE} = \frac{8\cdot 12.5}{2} - \frac{64}{2} = 50 - 32 = 18$

5. $\Delta AED \sim \Delta CBA$

$\overline{DE} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AC}$

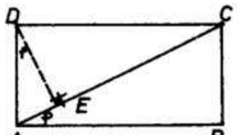
$x : 30 = 40 : 50$

$x = 24$ cm

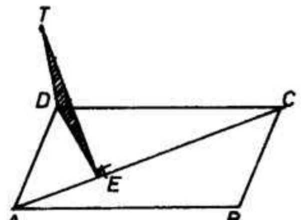
$\overline{TE}^2 = 576 + 100$

$\overline{TE}^2 = 676$

$\overline{TE} = 26$ cm



Sl. 7



Sl. 8

## REPUBLIČKO NATJECANJE

## VII RAZRED

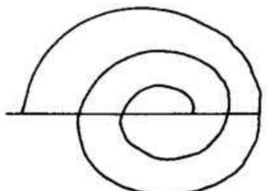
1. Ako jedna bilježnica ima x listova, tada važi jednakost: $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 21$, odakle je $x = 36$. Broj listova je smanjen za $\frac{21}{72} = 0.28$, tj. smanjen je za 28%.

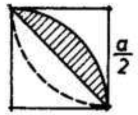


2. Ako je početna cijana x dinara, tada je: $x+0.2x-0.2(x+0.2x)=x-20$. Rješenje ove jednadžbe je $x=500$ dinara. Ako bi se ova cijena prvo povećala za 10%, a potom smanjila za isti postotak, cijena bi najprije bila 550 dinara, a zatim za 55 dinara manje. tj. 495 dinara. Dakle "gubitak" bi bio 5 dinara.

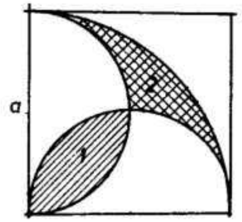
3. Polumjeri krugova su: $r$, $\frac{3}{4}r$, $\frac{9}{16}r$, $\frac{27}{64}r$, $\frac{81}{256}r$. Dužina spirale je zbroj dužina ovih pet polukrugova, sl. 9:

$$d = \pi r + \frac{3}{4}\pi r + \frac{9}{16}\pi r + \frac{27}{64}\pi r + \frac{81}{256}\pi r = \frac{781}{256}\pi r \approx 9.6r.$$


sl. 9



sl. 10



sl. 11

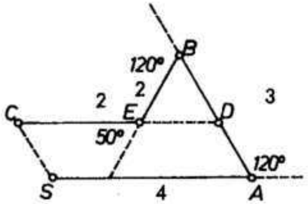
4. Isjecimo donju lijevu četvrtinu datog kvadrata sa sl.10. Vidimo da je prvi lik sastavljen od dva jednaka isječka kruga:

$$P_1 = 2P_o = 2\left(\frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{a^2}{8}\pi - \frac{a^2}{4}$$

Drugi lik se dobija kad se od odsječka dva puta većih dimenzija od onog sa sl.10 oduzmu dva lika iz prethodnog slučaja. Na osnovu osobina površina sličnih figura, znamo da je površina većeg odsječka, sl.11 veća od manjeg odsječka ravno četiri puta. Prema tome:

$$P_2 = 4P_o - 2P_o = 2P_o = P_1.$$

5. Izvidjač je veći dio puta išao po stranicama jednog jednakostraničnog trokuta. Prema dužinama dionica puta i kutevima skretanja, lako se dokazuje da je četverokut ADCS na sl. 12 paralelogram. Dakle, tražena udaljenost je $\overline{CS}=\overline{AD}=1$ km.



Sl. 12

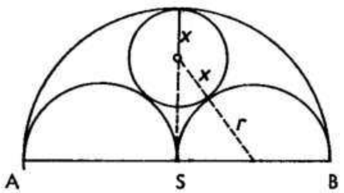
## VIII RAZRED

1. Iz date jednadžbe dobijamo: $y=\frac{4}{21}x+\frac{4}{7}$, a ovo je linearna funkcija kod koje x i y istovremeno rastu ($k>0$). Kako za $y=1$ dobijamo $x=\frac{9}{4}$ i za $y=2$ je $x=\frac{15}{2}$, izlazi da je $\frac{9}{4}<x<\frac{15}{2}$, pa su tražene vrijednosti promjenljive x iz skupa $\{3,4,5,6,7\}$.

2. Razlomak je najveći ako mu je brojnik najveći, a nazivnik najmanji, a to ćemo imati za $7+2x=0$, tj. za $x=-\frac{7}{2}$, i za $3x-y+1=0$, odakle dobijamo još i $y=-\frac{19}{2}$. To su tražene vrijednosti za x i y.

3. Neka je masa prve legure x kg. Masa druge legure je $(s-x)$ kg. Sada imamo jednadžbu: $\frac{ax}{100}-\frac{b(s-x)}{100}=r$, odakle je $x=\frac{100r+bs}{a+b}$. Otuda je $s-x=\frac{100r+as}{a+b}$. Ukupna masa zlata je $\frac{ax}{100}+\frac{b(s-x)}{100}=\frac{2abs+100(a+b)r}{100(a+b)}$

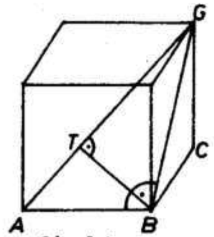
4. Prema sl. 13 je $(x+2)^2=2^2+(4-x)^2$, pa je odavde polumjer x upisanog kruga jednak $\frac{4}{3}$. Površina ovog kruga je $\frac{16}{9}\pi$.



Sl. 13



5. Neka je $\overline{AG}$ dijagonala kocke i $\overline{BT}$ udaljenost vrha od dijagonale, sl. 14. Tada su trokutovi ABT i ABG slični, pa je $\overline{BT}:\overline{AB}=\overline{BG}:\overline{AG}$, odnosno: $7:a=a\sqrt{2}:a\sqrt{3}$, odakle je $a=7\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm. Oplošje kocke je $P=6a^2=6\cdot 49\cdot\frac{3}{2}=441$, odnosno 441 $cm^2$.



Sl. 14

# SR CRNA GORA

# OPĆINSKO NATJECANJE

## VII RAZRED

1. Data je funkcija $f(x) = mx$. Odrediti $m$ tako da pravac prolazi kroz točku $M(-1,2)$. Za nadjeno $m$: 1) nacrtati pravac i odrediti za koliko je funkcija opala ako se $x$ promijenio od $x = -2$ do $x = -1/2$,
2) dokazati da je $f(-n) \cdot f(-n-1)$ djeljivo sa 8, ako je $n$ prirodan broj.

2. Ako točke $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ leže u prvom kvadrantu i pripadaju grafu funkcije $y = \frac{a}{x}$ $(a > 0)$ onda su površine trapeza $A_1A_2M_2M_1$ i $B_1B_2M_2M_1$ jednake medju sobom (točke $A_1$ i $A_2$ su projekcije točaka $M_1$ i $M_2$ na $Ox$ osi, a $B_1$ i $B_2$ su njihove projekcije na $Oy$ osi).

3. Dat je pravilni peterokut ABCDE stranice $a$ cm.
a) Odrediti unutrašnji kut i kut BAC.
b) oko tog mnogokuta opisana je i u njemu upisana kružnica. Dokazati da je površina kružnog vijenca odredjenog ovim kružnicama jednaka površini kruga čiji je promjer $a$ cm.

4. Visina $\overline{CD}$ pravokutnog trokuta ABC čini na hipotenuzi odsječak $\overline{AD} = 12$ cm.
a) Odrediti površinu trokuta ako je kut $ACD = 30^\circ$.
b) Pod kojim se kutom vidi stranica $\overline{BC}$ iz centra opisane kružnice oko zadanog trokuta.

5. Opseg romba iznosi $2p$ cm, a zbroj njegovih dijagonala $q$ cm. Naći njegovu površinu ( posebne vrijednosti $2p = 4$ cm, $q = 10$ cm).

6. U jednakostraničnom trokutu stranice $a=6$ cm upisana je kružnica $k_1$. Jedan vrh trokuta je centar kružnice $k_2$ polumjera $\frac{a}{2}$. Izračunati površinu lika izmedju kružnica $k_1$ i $k_2$.

## VIII RAZRED

1. Dati su pravci: $y = mx + m - 1$, $y = nx + 3$.
Odrediti parametre $m$ i $n$ tako da prvi pravac prolazi kroz ishodište, a drugi pravac odsjeca odsječak na $Ox$ osi jednak $-3$.

Za nadjeno m i n riješiti nejednadžbu:
$|mx+m-1| +3 > |nx+3|$.

2. Ako apscise četiri točke $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$ koje leže u I kvadrantu i pripadaju grafu funkcije $y = \frac{a}{x}$ $(a > 0)$ čine proporciju $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$, onda trapezi $N_1N_2M_2M_1$ i $N_3N_4M_4M_3$ imaju jednake površine (točke $N_1$, $N_2$, $N_3$ i $N_4$ su projekcije redom točaka $M_1M_2M_3M_4$ na Ox osi.

3. Kroz centar O kvadrata ABCD stranice a=9 cm povučen je pravac koji siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki N tako da je $\overline{BN} : \overline{NC} = 1:2$. Na tom pravcu (unutar kvadrata) uzeta je proizvoljna točka M na udaljenosti x od stranice $\overline{BC}$.
a) Izraziti udaljenost točke M od stranice kvadrata u funkciji od x,
b) ako udaljenost od stranica kvadrata $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ označimo redom sa $d_1, d_2, d_3, d_4$ dokazati da je $d_2-d_1 = d_3-d_2 = d_4-d_3$.

4. Baza uspravne prizme je romb ABCD stranice a=4 dm i šiljastog kuta $BAD=60^\circ$. Visina prizme je $H=5\sqrt{3}$ dm.
a) Naći oplošje i volumen prizme. Koliko bi litara trebalo naliti u posudu koja ima volumen jednak volumenu date prizme da bi bio potpuno napunjen vodom?
b) Kroz stranicu romba prolazi ravnina koja je nagunuta prema ravnini romba pod kutom od $30^\circ$. Naći površinu presjeka prizme.

5. U kuglu polumjera R je upisan stožac. Centar kugle dijeli visinu stošca tako da je veći odsječak geometrijska sredina visine i manjeg odsječka. Odrediti odnos volumena kugle i stošca.

6. Data je funkcija $f(x-1) = 2x-1$. Naći funkcije $f(x)$ i $f(\frac{1}{2}x)$ i točku presjeka njihovih grafova.



## REPUBLIČKO NATJECANJE

Kolašin, 23. 05. 1987.

### VII RAZRED

1. Izračunati vrijednost izraza
$$\frac{(2ab+b)(a^3-3ab^5+ab)+(a^3-2ab)(a^2+b)}{(a^2b-2b^2)(2a^3-b)-(64a^2+48ab+9b^2)(a^5-b^4)}$$
ako je $4a^2+9b^2+4a-24b+17 = 0$.

2. Jedna dijagonala trapeza dugačka je 37 cm. Mjerni brojevi u cm visine h i druge njegove dijagonale d su rješenja jednadžbi
$$\frac{2(h-4)-1}{5} = 3 \quad , \quad \frac{36-2d}{2} = 5.$$
Izračunati površinu trapeza!

3. Presjek kružnica K i $K_1$ su točke A i B, pri čemu je dužina $\overline{AB}$ dugačka 12 cm. Dužina $\overline{AB}$ je stranica jednakostraničnog trokuta upisanog u kružnicu K i stranica kvadrata upisanog u kružnicu $K_1$. Izračunati opseg figure odredjene presjekom odgovarajućih krugova.

4. Dokazati da kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1.

5. Neki broj se piše pomoću 150 jedinica i izvjesnog broja nula. Da li je taj broj kvadrat nekog prirodnog broja? Obrazložiti odgovor.

### VIII RAZRED

1. Odredite jednadžbu pravca t simetričnog pravcu $12x+5y+60=0$ u odnosu na ishodište. Zatim izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom hipotenuze pravokutnog trokuta odredjenog pravcem t i koordinatnim osima.

2. Znamenka jedinica troznamenkastog broja je 7. Ako se znamenka 7 stavi na prvo mjesto dobije se broj za 21 veći od dvostruko datog broja. Koji je to broj?

3. Dokazati da je za svaki prirodan broj n izraz

$$n^3 + 3n^2 + 2n \text{ djeljiv sa } 6.$$

4. Kod pravokutnog trokuta ABC sa pravim kutom kod C dužina katete $\overline{BC} = a$, a kut $\measuredangle A = 30^\circ$. Izračunati volumen prizme čija je baza trokut ABC, a čija je visina jednaka polumjeru upisane kružnice u trokutu ABC.

5. U razredu od 30 učenika 1 učenik je na testu napravio 12 grešaka, a ostali manje. Dokazati da u razredu postoje bar 3 učenika koja su napravila isti broj grešaka.



## OPĆINSKO NATJECANJE

### VII RAZRED

1. Ako u jednadžbu pravca $f(x)=mx$ uvrstimo koordinate točke M dobivamo: $2= -m \Rightarrow m= -2$.
Ako se x mijenja od $-2$ do $-\frac{1}{2}$ funkcija $f(x)$ će opasti od 4 do 1.
Ako je n prirodan broj tada je:
$f(-n)\cdot f(-n-1) = 2n\cdot -2(-n-1) = 2n\cdot(2n+2) = 4n^2+4n = 4n(n+1)$.
Izraz $4n(n+1)$ je uvijek djeljiv sa 8 jer $n\cdot(n+1)$ predstavlja produkt dva uzastopna broja od kojih je jedan uvijek djeljiv sa dva.

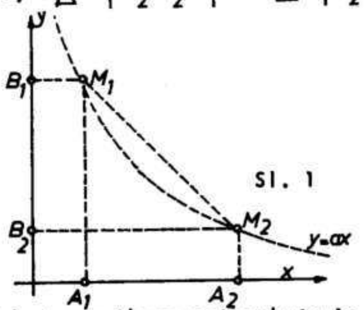
2. 1) $$P_{\square A_1A_2M_2M_1} = \frac{\overline{M_1A_1}+\overline{M_2A_2}}{2}\ \overline{A_1A_2} = \frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2} =$$

$$= \frac{x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2}{2} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{2} \text{ (jer je } y_n x_n = a)$$

2) $$P_{\square B_1B_2M_2M_1} = \frac{\overline{B_1M_1} + \overline{B_2M_2}}{2}\ \overline{B_2B_1} = \frac{(x_1+x_2)(y_1-y_2)}{2} =$$

$$= \frac{x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2}{2} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{2}.$$

Prema tome, $P_{\square A_1A_2M_2M_1} = P_{\square B_1B_2M_2M_1}$.

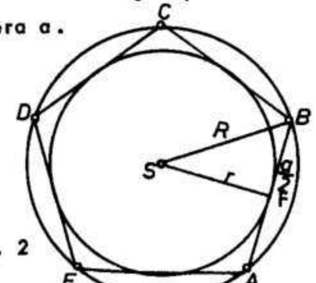



3. Unutrašnji kut pravilnog peterokuta je $540:5 = 108$. Kut BAC je $36^\circ(\frac{180-108}{2})$. Trokut FSB je pravokutan pa je: $(\frac{a}{2})^2 = R^2-r^2$.
Površina kružnog vijenca glasi:



Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj

$P_{\circledcirc} = (R^2 - r^2)\pi = \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi$ . Kako je površina kruga promjera $a$ jednaka $\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi$ , to je površina kružnog vijenca sa slike jednaka površini kruga promjera $a$.




Sl. 2

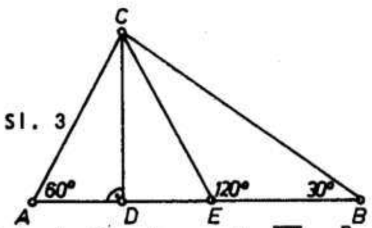
4. Kako je $\overline{AC}=24$ (jer je trokut $ACD$ polovina jednakostraničnog trokuta), to je $\overline{CD} = 12\sqrt{3}$ . Pošto je trokut $DBC$ takodjer polovina jednakostraničnog trokuta, to je

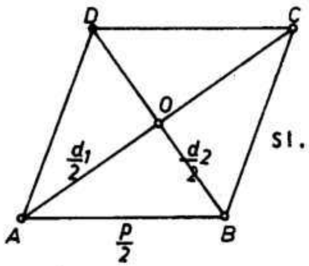
$$\overline{DB} = \frac{24\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 36.$$

Prema tome, $P_{\triangle}\,ABC = \frac{48\cdot 12\sqrt{3}}{2} = 288\sqrt{3}$ .

Stranica $\overline{BC}$ se vidi pod kutom od $120^\circ$.

Sl. 3




Sl. 4

5. Kako je $O = 2p$, to je $\overline{AB} = \frac{p}{2}$ .

Trokut $ABO$ je pravokutan pa imamo:

$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, ili $d_1^2 + d_2^2 = p^2$, ili

$(d_1+d_2)^2 - 2d_1d_2 = p^2 \Rightarrow d_1d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2 - p^2}{2}$ $\frac{q^2 - p^2}{2}$

$P_{\square}\,ABCD = \frac{q^2 - p^2}{2}$ . Za $p=2$, $q=10$ imamo: $P = \frac{100 - 4}{2} = 48\ \text{cm}^2$



6. Površina traženog lika je:

$$P = P_{\triangledown}\,ODE - P_{\triangle}\,ODE + P_{\triangledown}\,BDE - P_{\triangle}\,BDE = P_{\triangledown}\,ODE +$$
$$+ P_{\triangledown}\,BDE - (P_{\triangle}\,ODE + P_{\triangle}\,BDE) = \frac{(\sqrt{3})^2\pi}{3} + \frac{3^2\pi}{6} -$$
$$- 3\sqrt{3} = \pi + \frac{3}{2}\pi - 3\sqrt{3} = \frac{5}{2}\pi - 3\sqrt{3}.$$

## VIII RAZRED

1. Ako u jednadžbu pravca $y= mx+m-1$ uvrstimo koordinate točke $O(0,0)$, a u jednadžbu pravca $y=nx+3$ točku $A(-3,0)$ dobijemo:

$$0= 0\cdot x + m-1 \Rightarrow m=1,$$
$$0= n(-3) +3 \Rightarrow n= 1.$$

Za $m=1$ i $n=1$ nejednadžba $|mx+m-1| +3 > |nx+3|$ poprima oblik $|x| + 3 > |x+3|$. Ovu nejednadžbu zadovoljava svaki $x<0$.

2.
1) $P_{\square}\,N_1N_2M_2M_1 = \frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2} = \frac{y_1x_2 - y_1x_1+y_2x_2-y_2x_1}{2} =$
$= \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{2}$ ($x_1y_1 = x_2y_2$ zbog $y = \frac{a}{x}$ ).

2) $P_{\square}\,N_3N_4M_4M_3 = \frac{(y_3+y_4)(x_4-x_3)}{2} = \frac{y_3x_4-y_3x_3+y_4x_4-y_4x_3}{2} =$
$= \frac{y_3x_4 - y_4x_3}{2}$ .

Ako iz zadanog uvjeta $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$ uvrstimo u (1) $x_2$ odnosno $x_1$ imamo:

$P_{\square}\,N_1N_2M_2M_1 = y_1\ \frac{x_1x_4}{x_3} - \frac{x_2x_3}{x_4}\ y_2 = a\left(\frac{x_4}{x_3} - \frac{x_3}{x_4}\right)$, (pošto je $x_1y_1=x_2y_2= a$).

Kako je $y_3x_3 = a$ i $y_4x_4=a$, to je $y_3 = \frac{a}{x_3}$ i $y_4 = \frac{a}{x_4}$ .

Ako $y_3$ i $y_4$ uvrstimo u jednakost (2) dobijemo:

$P_{\square}\,N_3N_4M_4M_3 = \frac{ax_4}{x_3} - \frac{ax_3}{x_4} = a\left(\frac{x_4}{x_3} - \frac{x_3}{x_4}\right)$.

Prema tome, $P_{\square}\,N_1N_2M_2M_1 = P_{\square}\,N_3N_4M_4M_3$.



Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj

3. Iz sličnosti trokuta $MM_1N$ i $OEN$ izlazi da je $\overline{M_1N} = \frac{x}{3}$.

Dakle, imamo:

$\overline{MM_1} = d_1 = x$, $\overline{MM_2} = d_2 = 3 + \frac{x}{3}$, $\overline{MM_3} = d_3 = 9-(3+\frac{x}{3})$,

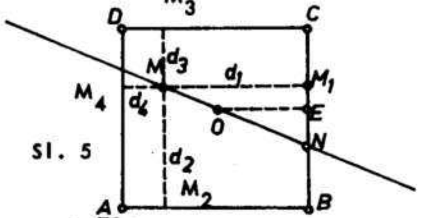
$\overline{MM_4} = d_4 = 9-x$.

1) $d_2 - d_1 = 3 + \frac{x}{3} - x = 3 - \frac{2}{3}x$.

2) $d_3 - d_2 = 9 - (3+\frac{x}{3}) - (3+\frac{x}{3}) = 3 - \frac{2}{3}x$.

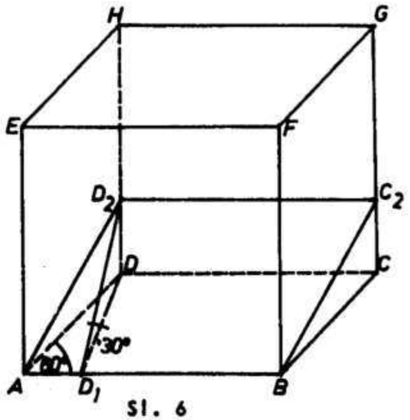
3) $d_4 - d_3 = 9-x - 9-(3+\frac{x}{3}) = 3 - \frac{2}{3}x$.

Iz (1), (2) i (3) $\Rightarrow d_2-d_1=d_3-d_2=d_4-d_3$.

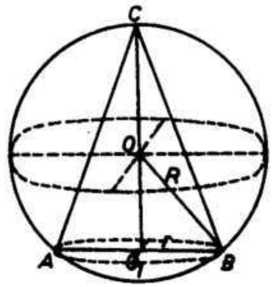


Sl. 5

4. a) Ako je $a=4$ a $v=5\sqrt{3}$ imamo:
$O = 96\sqrt{3}\ dm^2$, $V = 120\ dm^3$.



Sl. 6



Sl. 7



b) Neka je $\overline{D_1D_2}$ visina presjeka $ABC_2D_2$, a $\overline{DD_1}$ visina romba $ABCD$. Iz sličnosti trokuta $AD_1D$ i $DD_1D_2$ (zajednička stranica i dva kuta) izračunamo stranicu $\overline{D_1D_2}=x$.

$4 : 2\sqrt{3} = x : 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 4.$

Površina presjeka je $P = 4\cdot 4 = 16\ dm^2$.

5. Neka je $R$ polumjer kugle, $r$ polumjer baze stošca, a $v$ visina stošca. Iz zadanih uvjeta proizlazi:

$R^2 = v\cdot(v-R) = v^2 - v\cdot R$ (1)

Iz pravokutnog trokuta $O_1BO$ slijedi

$R^2 = r^2 + (v-R)^2$ (2)

Rastavimo li (1) na faktore imamo:

$v^2+vr - R^2 = \left[v - \frac{R}{2}(1-\sqrt{5})\right]\left[v - \frac{R}{2}(1+\sqrt{5})\right] = 0$

Data jednakost je jednaka nuli ako je jedan od faktora jednaka nuli.

$v - \frac{R}{2}(1-\sqrt{5})=0 = v = \frac{R}{2}(1-\sqrt{5})$ (ne udovoljava)

$v - \frac{R}{2}(1+\sqrt{5}) = 0 = v = \frac{R}{2}(1+\sqrt{5})$.

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti $v$ u jednakost (2) imamo:

$r^2 = \frac{R^2(\sqrt{5}-1)}{2}$

Izračunajmo sada volumen kugle i stošca.

$V_k = \frac{4}{3}R^3\pi$

$V_s = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}-1)\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)\pi}{3} = \frac{R^3(5-1)\pi}{4\cdot 3} = \frac{R^3\pi}{3}$

$V_k : V_s = 4:1$

5. Iz zadanih uvjeta proizlazi da je:

$f(x-1)=2(x-1)+b$, ili $2(x-1)+b = 2x-1 \Rightarrow b=1$.
Prema tome, $f(x) = 2x+1$, a
$f(\frac{1}{2}x) = 2\cdot\frac{1}{2}x+1 = x+1$.

Presjek grafova $f(x)$ i $f(\frac{1}{2}x)$ je:

$2x+1 = x+1 \Rightarrow x=0, \quad y=1.$

## VII RAZRED

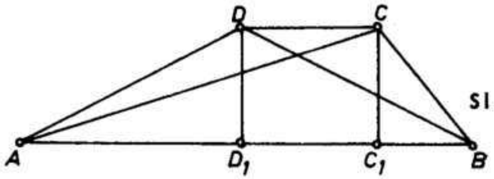
1. Transformiramo li izraz $4a^2+9b^2+4a-24b+17=0$ dobijemo: $(2a+1)^2+(3b-4)^2=0$. Ova jednakost je zadovoljena samo za $a=-\frac{1}{2}$ i $b=\frac{4}{3}$. Uvrstimo vrijednosti a i b u zadani izraz.

$$\frac{0\cdot[\quad]+(-\frac{1}{8}+\frac{4}{3})\cdot(\frac{1}{4}+\frac{4}{3})}{(\frac{1}{3}-\frac{32}{9})(-\frac{1}{4}-\frac{4}{3})-0\cdot[\quad]}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{8}}{\frac{32}{9}-\frac{1}{3}}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}.$$

2. Iz zadanih izraza lako izračunamo vrijednost dijagonale i visine.

$$\frac{2(h-4)-1}{5}=3 \Rightarrow 2(h-4)=16 \Rightarrow h=12,$$

$$\frac{36-2d}{2}=5 \Rightarrow 2d=26 \Rightarrow d=13.$$




Sl. 7

Iz pravokutnih trokuta $DD_1B$ i $ACC_1$ možemo izračunati $\overline{AC_1}$ i $\overline{BD_1}$.

$\overline{AC_1}^2=37^2-12^2=1369-144=1225 \Rightarrow \overline{AC_1}=35$

$\overline{D_1B}^2=13^2-12^2=169-144=25 \Rightarrow \overline{D_1B}=5$

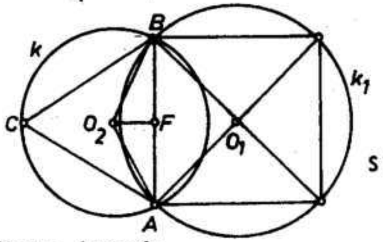
$P_{\triangle}ABCD=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\ \overline{CC_1}=\frac{\overline{AC_1}+\overline{BD_1}}{2}\ \overline{CC_1}=\frac{35+5}{2}\ 12=240$ cm

3. Neka je k kružnica opisana oko jednakostraničnog trokuta ABC. Polumjer te kružnice možemo izračunati iz pravokutnog trokuta $O_2FB$:

$$r=\overline{O_2B}=\sqrt{6^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{33}$$



Neka je $k_1$ kružnica opisana oko kvadrata ABED. Polumjer te kružnice je $R=\overline{BO_1}=6\sqrt{2}$.




Sl. 8

Opseg tražene figure iznosi:

$$O=\frac{r\pi\,120^\circ}{180^\circ}+\frac{R\pi\,90^\circ}{180^\circ}=\frac{2\sqrt{33}\pi}{3}+\frac{6\sqrt{2}\pi}{2}=\frac{4\sqrt{33}\pi+18\sqrt{2}\pi}{6}=$$

$$=\frac{\pi(2\sqrt{33}+9\sqrt{2})}{3}$$

4. Svaki prirodan broj n može se prikazati u obliku 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3, gdje je $k\in N_0$.

1) $\frac{(4k)^2}{4}=\frac{16k^2}{4}=4k^2$, ostatak je 0.

2) $\frac{(4k+1)^2}{4}=\frac{16k^2+8k+1}{4}=4k^2+2k+\frac{1}{4}$, ostatak je 1.

3) $(4k+2)^2=\frac{16k^2+16k+4}{4}=4k^2+4k+1$, ostatak je 0.

4) $\frac{(4k+3)^2}{4}=\frac{16k^2+24k+9}{4}=4k^2+6k+2+\frac{1}{4}$, ostatak je 1.

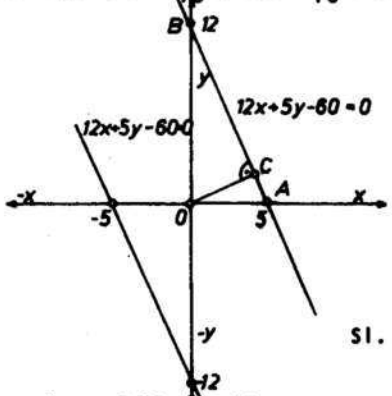
5. Neka je traženi broj $\overbrace{111\ldots\ldots1}^{150}\overbrace{00\ldots\ldots0}^{x}$. Da bi traženi broj bio kvadrat nekog broja broj nula mora biti paran. Znači, potrebno je dokazati da je 1........11 kvadrat nekog broja

$$\overbrace{1\ldots\ldots11}^{150}=\frac{\overbrace{10\ldots\ldots00}^{150}-1}{9}=\frac{10^{150}-1}{9}=\frac{(10^{75})^2-1}{9}.$$

Pošto $(10^{75})^2-1$ nije kvadrat prirodnog broja, broj koji se piše pomoću 150 jedinica nije kvadrat nijednog prirodnog broja.

## VIII RAZRED

1. Jednadžba pravca simetričnog pravcu $12x+5y+60=0$ glasi $12x+5y-60=0$. Iz pravokutnog trokuta OAB izračunamo stranicu $\overline{AB} = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = 13$. Trokuti OAC, OCB i OAB su slični pa $\overline{OC} = \frac{60}{13}$, $\overline{AC} = \frac{25}{13}$ i $\overline{BC} = \frac{144}{13}$.




Sl. 9

Rotacijom trokuta OAB oko hipotenuze nastaju dva stošca polumjera $\overline{OC} = \frac{60}{13}$ i visina $\overline{AC} = \frac{25}{13}$, $\overline{BC} = \frac{144}{13}$.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{r^2\pi\,\overline{AC}}{3} + \frac{r^2\pi\,\overline{BC}}{3} =$$

$$\frac{\frac{3600}{169}\pi\frac{25}{13}}{3} + \frac{\frac{3600}{169}\pi\frac{144}{13}}{3} = \frac{60^2}{13^3\cdot 3}\pi\,(25+144) = \frac{60^2}{13\cdot 3}\pi =$$

$$= \frac{60^2}{13\cdot 3}\pi = \frac{3600}{39}\pi = \frac{1200}{13}\pi .$$

2. Neka je zadani troznamenkasti broj $\overline{xy7}$. Tada imamo:

$2\cdot\overline{xy7} = \overline{7xy} - 21$, ili

$200x+20y+14 = 700 + 10x + y - 21$, ili

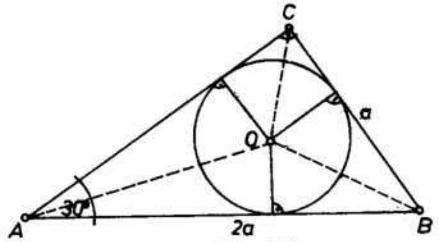
$10x+y = 35$.

Traženi broj je 357.



3. Transformiramo li izraz $n^3+3n^2+2n$ na slijedeći način:
$n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$.
Pošto je $n\cdot(n+1)(n+2)$ produkt tri uzastopna broja zadani izraz je uvijek djeljiv sa 6.

4. Neka je ABC zadani trokut. Kako je $\triangle$ ABC polovina jednakostraničnog trokuta, to je $\overline{AB} = 2a$ i $AC = a\sqrt{3}/2$.




Sl. 10

Ako upišemo kružnicu zadanom trokutu tada r možemo izračunati na slijedeći način:

$P\triangle ABC = P\triangle ABO + P\triangle BCO + P\triangle ACO$, ili

$$\frac{a\cdot a\sqrt{3}}{4} = \frac{2a\cdot r}{2} + \frac{a\cdot r}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot r, \text{ ili}$$

$$r = \frac{a^2\sqrt{3}}{6a+a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$$ . Volumen prizme je:

$$V = B\,v = \frac{a\cdot a\sqrt{3}}{4}\;\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6} = \frac{3a^3}{4(\sqrt{3}+6)} .$$

5. Učenika podijelimo u 13 kategorija: one koji su napravili 12,11,10....2,1,0 grešaka. Očigledno je da bar u jednoj kategoriji postoje 3 učenika, jer kada bi u svakoj kategoriji bilo 2 ili manje učenika, onda bi ukupan broj učenika bio jednak ili manji od 28, što je nemoguće, jer je broj učenika 30.

# SR MAKEDONIJA

## REGIONALNO NATJECANJE

### V RAZRED

1. 30 učenika rješavala su 2 zadatka iz matematike. Dva zadatka je riješilo deset učenika. Tri učenika nisu riješili ni jedan zadatak. Dvanaest učenika je riješilo samo prvi zadatak. Koliko učenika je riješilo prvi a koliko drugi zadatak?

2. Točke M i N su središta dviju susjednih stranica kvadrata čija je površina 16 $cm^2$. Izračunaj površinu trokuta čija su dva vrha točke M i N, a treći je u vrhu kvadrata u kojem se sijeku stranice na kojima leže točke M i N.

3. Pri dijeljenju nekog broja sa 48 se dobije količnik q i ostatak 36. Koliki će biti količnik, a koliki ostatak pri dijeljenju istog broja sa 16?

4. Mile ima u jednom džepu paran, a u drugom neparan broj bombona. Njegov drug Petar želio je da pogodi u kojem džepu on ima paran, a u kojem neparan broj bombona, pa je rekao Mili: "Pomnoži broj bombona iz desnog džepa sa 2, a iz lijevog džepa sa 3. Zbroji dobijene produkte i reci mi zbroj, a ja ću ti reći u kojem džepu imaš paran a u kojem neparan broj bombona.
Da li će Petar sigurno pogoditi? Obrazloži odgovor!

### VI RAZRED

1. Jednog dana u nekom razredu bilo je odsutno $\frac{1}{12}$ učenika. Sutradan je došao 1 učenik više, tako da je bilo odsutno $\frac{1}{18}$ učenika. Koliko učenika ima u tom razredu?

2. Tri osobe podijelile su izvjesnu svotu novca na slijedeći način: Prva osoba dobila je $\frac{1}{3}$ zbroja i još 72 dinara. Druga osoba dobila je $\frac{1}{3}$ ostatka i još 72 dinara, a treća osoba $\frac{1}{3}$ od novog ostatka i još 72 dinara.

Koliki je bio zbroj novca i koliko je dobila svaka osoba?

3. Nacrtaj dva suplementna kuta i konstruiraj njihove simetrale. Dokaži da su njihove simetrale medjusobno okomite.

4. Odredi broj m, takav da točka A(-2,2) pripada grafu funkcije $y = (-3m + 2)x + m-1$, te nacrtaj graf funkcije y i odredi njezine nul točke.

## VII RAZRED

1. Jedna nogometna ekipa odigrala je odredjeni broj utakmica. U $\frac{2}{3}$ utakmica je pobijedila, $\frac{1}{4}$ utakmica je izgubila, a ostatak je odigrala neriješeno. Koliko je utakmica odigrala ekipa, ako je broj izgubljenih utakmica za 4 veći od broja neriješenih utakmica?

2. Dokaži da je za prirodni broj n i $\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ prirodan.

3. Kroz vrh B kvadrata ABCD povučena je okomica na dijagonalu $\overline{BD}$. $\overline{BD} = 6$ cm. Odredi duljinu odsječaka na ovom pravcu što ga sijeku produžeci stranica $\overline{DA}$ i $\overline{DC}$.

4. Kroz sjecište A dviju zadanih kružnica $k_1(O_1:r_1)$ i $k_2(O_2:r_2)$ povuci pravac p tako da tetive danih kružnica pripadaju pravcu p i budu sukladne.

## VIII RAZRED

1. Koliko godina ima čovjek koji u 1987. godini ima onoliko godina koliko iznosi zbroj zanmenki godine njegovog rodjenja.

2. Dokaži da je zbroj broja $\overline{xxyy}$ i broja napisanog sa istim znamenkama ali obrnutim redosljedom djeljiv sa 101.

3. Dokaži da je srednjica tangentnog istokračnog trapeza jednaka krakovima.

4. Dokaži da kružnica kojoj je visina istostraničnog trokuta promjer, siječe dvije stranice trokuta u točkama što ih dijele u omjeru 1 : 3.



## REPUBLIČKO NATJECANJE

Tetovo, 09. 05. 1987.

## VII RAZRED

1. 12 kg legure bakra i olova sadrži 45% bakra. Koliko olova treba dodati leguri da one sadrže 40% bakra.

2. Odredi sve prirodne brojeve n takve da izraz $10^n-1$ bude djeljiv sa 81.

3. Zadan je istostraničan trokut ABC, njegov centar opisane kružnice O i točke D i E na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ tako da je $\overline{AD}+\overline{AE} = \overline{AB}$. Dokaži da je $\overline{OD} = \overline{OE}$ i kut $\measuredangle DOE = 120°$.

4. Visine $\overline{CD}$ i $\overline{AF}$ trokuta ABC se sijeku u točki H. Odredi kut $\measuredangle ACB$ trokuta ABC ako je $\overline{AB} = \overline{CH}$.

## VIII RAZRED

1. Dva biciklista krenula su istovremeno iz mjesta A i B u susret jedan drugom i sreću se nakon nekog vremena. Prvi biciklist prevalio je put od A do B za 4 sata i 48 minuta više, a drugi za 3 sata i 20 minuta manje od vremena proteklog do susreta. Za koliko vremena prevali svaki biciklist put izmedju dva mjesta.

2. Ako je zbroj dvaju cijelih brojeva djeljiv sa 10, tada se kvadrati tih brojeva završavaju sa istom znamenkom. Dokaži.

3. Dokazati da je za svaki paralelogram zbroj kvadrata dijagonala jednak dvostrukom zbroju kvadrata stranica.

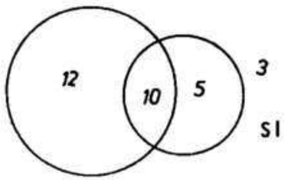
4. U pravokutnom trokutu ABC sa hipotenuzom $\overline{AB}$, simetrala kuta $\measuredangle A$ dijeli stranicu BC na dva dijela duga 5 cm i 13 cm. Izračunati opseg i površinu tog trokuta.

# R J E Š E N J A

## REGIONALNO NATJECANJE

### V RAZRED

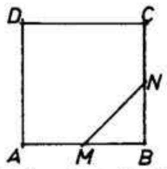
1.




Sl. 1

Prvi zadatak je riješilo 22, a drugi 15 učenika.

2.




Sl. 2

$P = 16\ cm^2 \Rightarrow a = 4\ cm.$

$P_{\triangle MNP} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2\ cm^2.$

3. $\frac{a}{48} = q + \frac{36}{48}$. Pomnožimo li ovu jednakost sa 3 dobijemo:

$\frac{a}{16} = 3q + \frac{36}{16} \Rightarrow \frac{a}{16} = 3q + 2 + \frac{4}{16}$. Količnik je $3q+2$, a ostatak 4.

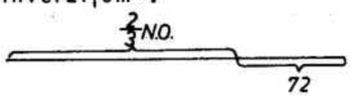
4. Ako je Mile u desnom džepu imao paran broj bombona tada bi $2x+3y$ bio neparan broj.
Ako bi, pak, Mile u desnom džepu imao neparan broj bombona tada bi $2x+3y$ bio paran broj.
Prema tome Petar je sigurno mogao pogoditi.

### VI RAZRED

1. Neka je x ukupan broj učenika u razredu. Tada imamo:
$\frac{11}{12}x + 1 = \frac{17}{18}x \Rightarrow 33x + 36 = 34x \Rightarrow x = 36$. U tom razredu ima 36 učenika.

2. Zadatak ćemo riješiti "inverzijom".

1) $72 : \frac{2}{3} = 108.$






2) $108 + 72 = 180;\ 180 : \frac{2}{3} = 270.$

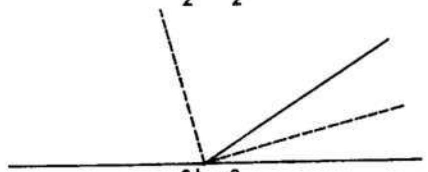
3) $270 + 72 = 342;\ 342 : \frac{2}{3} = 513.$

I - $\frac{1}{3}\cdot 513 + 72 = 171+72 = 243;\quad 513 - 243 = 270.$

II - $\frac{1}{3}\cdot 270 + 72 = 90+72 = 162;\quad 270 - 162 = 108.$

III - $\frac{1}{3}\cdot 108 + 72 = 36+72 = 108.$

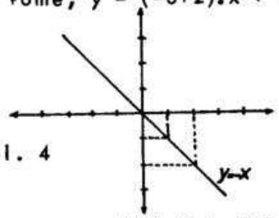
3. Iz $\alpha + \alpha' = 180° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha'}{2} = 90°.$



Sl. 3

4. Za $A(-2,2)$ imamo:
$2 = (-3m+2)\cdot(-2) + m - 1$, odnosno
$2 = 6m - 4 + m - 1$
$7m = 7$
$m = 1$

Prema tome, $y = (-3+2)\cdot x + 1 - 1 = -x.$




Sl. 4

### VII RAZRED

1. Neka je x ukupan broj utakmica. Tada imamo:
$\frac{1}{4}x - 4 = x - (\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x)$, ili

$3x - 48 = 12x - 8x - 3x$, ili
$2x = 48$
$x = 24.$



Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj

2. Da bi izraz $n(n+1)\cdot(2n+1)$ bio djeljiv sa 6 potrebno je da bude djeljiv sa 2 i sa 3. Sa 2 je djeljiv jer $n$ $(n+1)$ su dva uzastopna broja. Znači, potrebno je dokazati da je djeljiv sa 3. Svaki broj $n\in N$ se može prikazati u obliku $3k$, $3k+1$, $3k+2$, gdje je $k\in N_0$.

a) Ako je $n = 3k$ imamo:

$$\frac{3k\cdot(3k+1)(6k+1)}{6} = 3\cdot\frac{k(3k+1)(6k+1)}{3}$$

b) Ako je $n = 3k+1$ imamo:

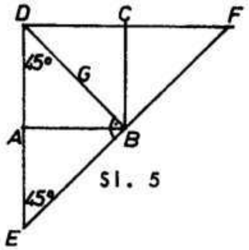
$$\frac{(3k+1)\cdot(3k+2)\cdot(6k+3)}{6} = 3\cdot\frac{(3k+1)(3k+2)(2k+1)}{6}$$

c) Ako je $n = 3k+2$ imamo:

$$\frac{(3k+2)(3k+3)(6k+5)}{6} = 3\cdot\frac{(3k+2)(k+1)(6k+5)}{6}.$$

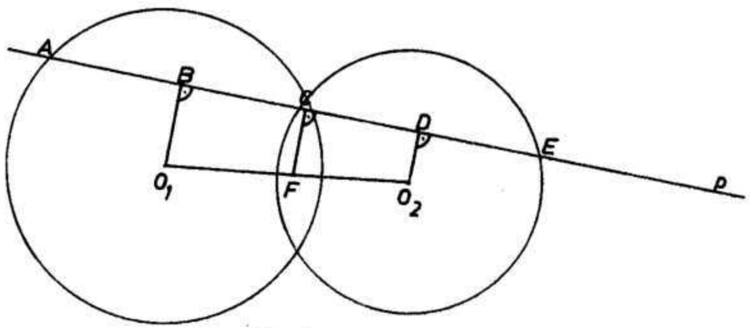
Dakle, izraz $n(n+1)(2n+1)$ je uvijek djeljiv i sa 3, a to znači i sa 6 što je i trebalo dokazati.

3. Dužina odsječka $\overline{EF} = 6+6 = 12$ cm.




Sl. 5

4.




Sl. 6



Pretpostavimo da je zadatak riješen i da je $\overline{AE}$ traženi pravac, tj. da je $\overline{AC} = \overline{CE}$ ili $\overline{CB} = \overline{DC}$. Ako u trapezu $O_1O_2DB$ povučemo $\overline{CF} \parallel \overline{BO_1} \parallel \overline{DO_2}$, dužina $\overline{O_1O_2}$ će biti prepolovljena točkom F.

Opis konstrukcije:

Spojimo središta $\overline{O_1O_2}$ i nadjimo njihovo polovište F.

Povučemo dužinu $\overline{CF}$ i pravac $p\perp CF$. Pravac p je traženi pravac.

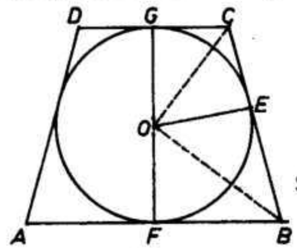
## VIII RAZRED

1. Vidi rješenje SR Hrvatska - općinsko natjecanje - VIII raz.

2. Treba dokazati da je $\overline{xxyy} + \overline{yyxx} = 101A$.

$$1000x+100x+10y+y+1000y+100y+10x+x =$$
$$= 1111x + 1111y = 101\,(11x+11y)$$

3. Neka je ABCD jednakokračni tangentni trepez.




Sl. 7

1) $\triangle OFB \cong \triangle OBE \Rightarrow \overline{FB} = \overline{BE}$.

2) $\triangle GOC \cong \triangle OEC \Rightarrow \overline{GC} = \overline{CE}$.

Pošto je $s = \frac{a+c}{2} = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{\overline{FB}}{2} + \frac{\overline{CG}}{2} = \overline{BE}+\overline{EC} = \overline{BC}$.

4. Vidi rješenje SR Bosne i Hercegovine - republičko natjecanje - - VII razred.

## REPUBLIČKO NATJECANJE

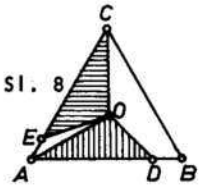
### VII RAZRED

1. U datoj leguri ima $0.45 \cdot 12$ kg = 5.4 kg bakra. U novoj leguri ta količina će predstavljati 40%, što znači da će ukupna masa nove legure biti: 5.4 : 0.40 = 13.5 kg. Znači, leguri treba dodati 1.5 kg olova.

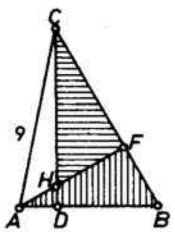
2. Broj $A=10^n-1=10\ldots000-1=9\ldots999$ zapisan je samo devetkama i djeljiv je sa 9. Broj A biće djeljiv sa 81 ako se i količnik A:9 može podijeliti sa 9. Kako je $A:9=1\ldots111$, to je A:9 djeljivo sa 9 samo ako se zapisuje sa 9,18,27... jedinica, a to će biti ako je $n \in \{9,18,27,\ldots\}$, tj. ako je broj n djeljiv sa 9: $n=9k$, $k \in N$.

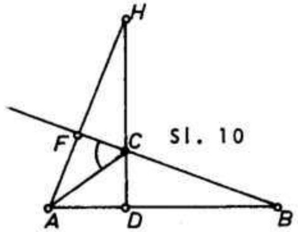
3. Iz uvjeta $\overline{AD}+\overline{AE}=\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}$, dobijamo da je $\overline{AE}=\overline{BD}$, a zbog toga je i $\overline{CE}=\overline{AD}$, sl.8 . Kako su dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OC}$ jednake (polumjeri opisanog kruga) i $\measuredangle DAO=\measuredangle ECO=30^\circ$, to su trokutovi ADO i CEO sukladni. Na osnovu ove sukladnosti zaključujemo da je $\overline{OD}=\overline{OE}$ i $\measuredangle AOD=\measuredangle COE$. Znamo da je $\measuredangle AOC=120^\circ$, pa je $\measuredangle DOE=\measuredangle AOD+\measuredangle AOE=\measuredangle COE+\measuredangle AOE = \measuredangle AOC = 120^\circ$, a to je trebalo dokazati.

Sl. 8




Sl. 9




Sl. 10

4. Pretpostavimo da je kut ACB šiljast, sl..9 . Pravokutni trokuti CHF i ABF su sukladni (jednake hipotenuze i šiljasti kutovi $\measuredangle BAF = \measuredangle HCF$ - sa okomitim kracima), pa je $\overline{AF}=\overline{CF}$. Dakle, trokut ACF je jednakokračan pravokutan, pa je $\measuredangle ACF=\measuredangle ACB= 45^\circ$. U slučaju da je kut ACB tup, sl.10 važe svi zaključci iz prethodnog slučaja, osim jednakosti kutova ACF i ACB. U ovom slučaju kutovi ACF i ACB su suplementni, pa je $\measuredangle ACB = 135^\circ$.

### VIII RAZRED

1. Neka je S mjesto susreta biciklista na putu $\overline{AB}$, sl.11. Označimo sa t vrijeme proteklo do susreta, a sa $v_1$ i $v_2$ brzine kretanja biciklista. Tada imamo jednakosti:

$$AS=v_1 \cdot t = v_2\left(t-3\tfrac{1}{3}\right) \text{ i } SB=v_1 \cdot \left(t+4\tfrac{4}{5}\right) = v_2 t.$$


Sl. 11

Iz prve jednakosti je $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t-\frac{10}{3}}{t}$, a iz druge: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t}{t+\frac{24}{5}}$

pa dobijemo jednadžbu po nepoznanici t: $\frac{t-\frac{10}{3}}{t} = \frac{t}{t+\frac{24}{5}}$, ili

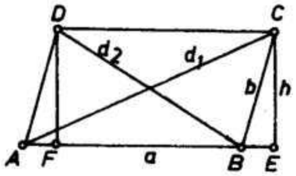
$\left(t-\frac{10}{3}\right)\left(t+\frac{24}{5}\right)=t^2$. Odavde nalazimo da je

$t = \frac{120}{11}$ sati. Prvi biciklista prijeđe udaljenost od A do B za $t+t+\frac{24}{5}$, odnosno za $26\frac{34}{55}$ sati, a drugi za $t+t-\frac{10}{3}$, odnosno za $18\frac{16}{33}$ sati.

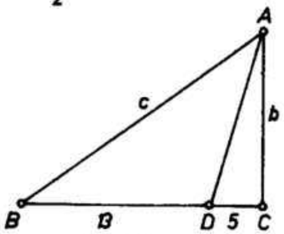
2. Posljednja znamenka broja ta dva broja, recimo zbroja a+b, je 0. Slučaj kada se i a i b završavaju znamenkom 0 je očigledan. Ako je x, $x \neq 0$, posljednja znamenka broja a, tada je posljednja znamenka broja b jednaka 10-x. Posljednja znamenka broja $a^2$ bit će ista kao i posljednja znamenka broja $x^2$. Posljednju znamenku broja $b^2$ dobijemo kvadriranjem znamenke 10-x. Tako dobijemo: $(10-x)^2=100-20x+x^2=10(10-2x)+x^2$, odakle se vidi da $x^2$ određuje i posljednju znamenku broja $b^2$, tj. vidi se da brojevi $a^2$ i $b^2$ završavaju istom znamenkom. Do istog zaključka možemo doći neposrednim provjeravanjem slučajeva kada se a završava znamenkama 1,2,...

3. Prema sl.12, iz sukladnosti trokuta ADF i BCE zaključujemo da je $\overline{BE}=\overline{AF}=x$, pa je $\overline{AE}=a+x$ i $\overline{BF}=a-x$. U pravokutnom trokutu ACE je: $\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CE}^2$, odnosno: $d_1^2=(a+x)^2+h^2$. Osim toga iz pravokutnog trokuta BCE dobijemo: $h^2=b^2-x^2$, pa je $d_1^2=(a+x)^2+b^2-x^2=a^2+2ax+b^2$. Slično iz trokuta BDF dobijemo: $d_2^2=a^2-2ax+b^2$. Zbrajanjem posljednjih dviju jednakosti dobijemo traženi zaključak $d_1^2+d_2^2= 2a^2+2b^2$.

4. Zadana je kateta $a=\overline{BC}=18$ cm, a prema poznatom svojstvu simetrale kuta, bit će: $b : c = 5 : 13$, odakle je $b = \frac{5c}{13}$. Zatim, iz $c^2-b^2 = a^2$ dobijemo: $c^2 - \frac{25c^2}{13^2} = 18^2$, odakle je $c = \frac{39}{2}$. Dalje dobijemo: $b = \frac{15}{2}$, pa je opseg $O=45$ cm, a površina je $P = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{135}{2}$ cm$^2$.



Sl. 12



Sl. 13



# SAP VOJVODINA

DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I
ASTRONOMA SAP VOJVODINE

## OPĆINSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

21. 03. 1987.

### V RAZRED

1. U četveroznamenkastom broju *11* umjesto zvjezdica staviti odgovarajuće znamenke tako da dobijeni broj bude djeljiv sa 36. Odrediti sva moguća rješenja.

2. Zbroj kuta $\alpha$ i njemu suplementnih kutova je $312^\circ$. Odrediti kut $\alpha$ i njemu suplementni kut.

3. Odrediti sve vrijednosti prirodnog broja n tako da je ispunjena nejednakost $\frac{1}{3} < \frac{n}{12} \leq \frac{3}{4}$.

4. Koje godine je rodjen djeda Mile ako su poznati slijedeći podaci: Djeda Mile je rodjen u ovom stoljeću. Ako u godini njegovog rodjenja zamjenimo mjesto znamenki jedinica i znamenki desetica dobija se godina u kojoj će djeda Mile napuniti 81 godinu života.

5. Dati su paralelni pravci a i b. Na pravcu a date su točke A, B, C, D, E, a na pravcu b točke M, N, P, S. Koliko dužina odredjuju date točke?

### VI RAZRED

1. Ako se broj 1000 podijeli nekim brojem ostatak je 8. Ako se 900 podijeli istim brojem onda je ostatak 1. Kojim brojem smo dijelili brojeve 1000 i 900?

2. Mačka i po, za dva i po dana pojede tri i po miša. Koliko miševa će pojesti 100 mačaka za 45 dana.

3. Razlomak $\frac{281}{140}$ prikazati kao zbroj tri razlomka sa jednoznamenkastim brojnicima. Rješenje obrazloži.

4. U trokutu ABC, dužina $\overline{BD}$ je visina, a $\overline{BM}$ je simetrala kuta. U trokutu BMC dužina $\overline{MK}$ je visina. Kut MBD je $20^\circ$, a $\measuredangle BMK = 50^\circ$. Odrediti kuteve trokuta ABC.

5. Dat je jednakokračan trokut ABC ($\overline{AB}=\overline{AC}$). Na pravcu $\overline{BC}$ izabrana je točka D, tako da je C izmedju B i D. Dokazati da je $\measuredangle ABD > \measuredangle ADB$.

## VII RAZRED

1. Dokazati da ne postoji polinom drugog stupnja $P(x)=ax^2+bx+c$ sa cjelobrojnim koeficijentima za koje je $P(7) = 1985$ i $P(15) = 1986$.

2. Odredi šta je veće $202^{303}$ ili $303^{202}$.

3. Izračunaj $a^2 + b^2$, ako je $a+b = 24$ i $a \cdot b = 143$.

4. U pravokutnom trokutu čija hipotenuza ima dužinu c, jedan kut jednak je četvrtini pravog kuta. Izračunaj površinu toga pravokutnog trokuta u funkciji c.

5. U pravokutniku ABCD okomica iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$ dijeli dijagonalu AC u odnosu 3:1. Odredi kut izmedju dijagonala toga pravokutnika.

## VIII RAZRED

1. Vladimir će 2003. godine imati onoliko godina koliko iznosi zbroj znamenaka godine njegovog rodjenja. Koliko godina će on imati 2003. godine?

2. Ako je $a^2 + b^2 - 2(bc + cd + da - c^2 - d^2) = 0$, onda je $a = b = c = d$. Dokazati.

3. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je izraz

$$\frac{10^{2n} - 1}{3^4} \text{ cijeli broj.}$$

4. Dat je trokut ABC. Neka simetrala $\measuredangle ACB = \gamma$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki M. Dokazati da je $\overline{AM}:\overline{BM} = \overline{AC}:\overline{BC}$.



5. Osnovice trapeza su $a = 25$ cm i $b = 15$ cm, a krak $c = 8$ cm. Odredi opseg i površinu toga trapeza, ako je poznato da je zbroj unutrašnjih kutova trapeza na većoj osnovici pravi kut.

## POKRAJINSKO NATJECANJE

18. 04. 1987.

## VII RAZRED

1. Brojevi 1,2,3...,999,1000 ispisani su redom po krugu. Precrta se broj 1, a zatim svaki 15-ti (1, 16, 31,...). Kod ponovnog obilaska i precrtani brojevi se opet računaju. Koliko će brojeva ostati neprecrtano?

2. Na skupu razlomaka Q zadata je relacija $\rho$ :
$x \rho y$ ako i samo ako $|x-y| < \frac{1}{2}$
a) Da li je $\rho$ relacija ekvivalencije na Q?
b) Nacrtati graf relacije Q, ako je ona definirana na skupu $H=\left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

3. Data je funkcija $f(x) = x^3 + 3x^2-4$. Odrediti vrijednost funkcije za $x=99998$.
(Uputstvo: najprije izvršiti transformaciju polinoma, pa onda izvršiti zamjenu. Neće se priznavati rješenja za direktnu zamjenu).

4. U datom trokutu povučemo iz nekog vrha težišnicu i visinu na suprotnu stranicu. Na taj način podijelili smo kut u tom vrhu na tri jednaka dijela. Kakav je dat trokut (vrsta trokuta prema stranicama),

5. Dat je paralelogram a b c d. Ako vrh a spojimo sa središtima stranica $[b\ c]$ i $[c\ d]$, onda te dužine dijele dijagonalu $[b\ d]$ na tri jednaka dijela.

## VIII RAZRED

1. Ako je razlika dva troznamenkasta broja A i B djeljiva sa 7, onda je i šesteroznamenkasti broj C koji se dobija dopisivanjem redom znamenki brojeva A i B, takodje djeljiv sa 7.

2. Ako olovka košta 0.5 dinara, kemijska olovka 1 dinar, a pero 5 dinara, za 100 dinara možemo kupiti 100 komada. Koliko treba kupiti kojih artikala?

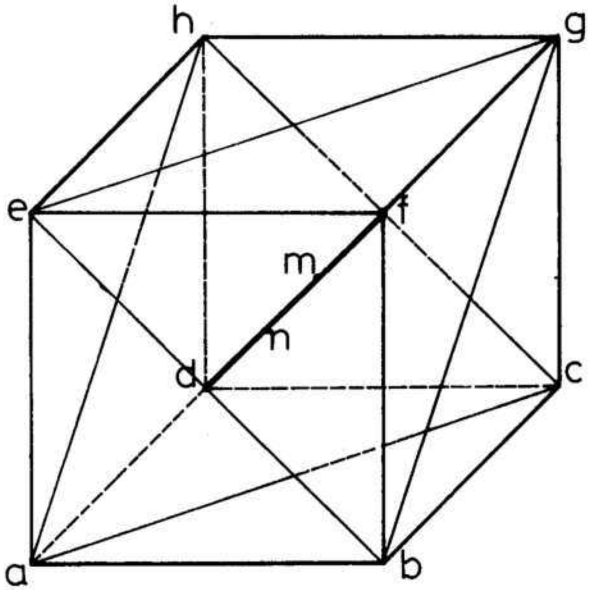


Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj

3. Da li postoji trokut čije su visine ha = 3 cm, hb = 6 cm i hc = 9 cm. Riješenje detaljno obrazložiti.

4. U jednakokračnom trokutu abc je dužina osnovice [ab] = 3 cm, a dužina kraka [bc] = 5 cm. Odrediti udaljenost izmedju ortocentra o i težišta t trokuta.

5. Data je kocka a b c d e f g h. Ako su m i n točke prodora dijagonale [fd] kroz ravninu trokuta e b g i a c h, dokazati da su dužine [dn], [nm] i [mf] sukladne.




Sl. 1



## R J E Š E N J A

### V R A Z R E D

1. Da bi traženi broj *11* bio djeljiv sa 36 mora biti djeljiv sa 4 i sa 9. Zbog djeljivosti sa 9 zbroj znamenaka broja *11* može biti 9 ili 18 što znači da je zbroj nepoznatih znamenaka 7 ili 16. Zbog djeljivosti sa 4 dvoznamenkasti završetak može biti samo 12 ili 16.
Dakle, riječ je o brojevima 5112 i 1116.

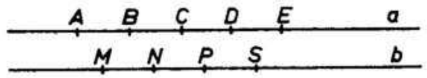
2. 1) $360^\circ - 312^\circ = 48^\circ$.
2) $180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$.
3) $48^\circ + 132^\circ + 132^\circ = 312^\circ$.
4) $\alpha = 48^\circ$.

3. $\frac{1}{3} < \frac{n}{12} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{12} < \frac{n}{12} \leq \frac{9}{12}$

$n \in \{5,6,7,8,9\}$.

4. Neka je djeda Mile rodjen $\overline{19ab}$. Tada imamo:
$\overline{19ba} - \overline{19ab} = 81$ odnosno
$\overline{ba} - \overline{ab} = 81$
Očigledno je da je $a=0$, $b=9$.
Djeda Mile je rodjen 1909. godine.

5. Na pravcu a imamo $4 \cdot 5 : 2 = 10$ dužina. Na pravcu b imamo $4 \cdot 3 : 2 = 6$ dužina. Spajanjem točaka pravaca a i b dobijemo još $4 \cdot 5 = 20$ dužina. Ukupno ima $10+6+20=36$ dužina.




### VI R A Z R E D

1. 1) $\frac{1000}{a} = b + \frac{8}{a} \Rightarrow \frac{992}{a} = b \Rightarrow 992 = a \cdot b$

2) $\frac{900}{a} = c + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{899}{a} = c \Rightarrow 899 = a \cdot c$

$a \cdot b = 992 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 231$ $\qquad a = 31$
$a \cdot c = 899 = 2\ 9 \cdot 31$
Traženi broj je 31.

2. Mačka i po za dva i po dana pojede tri i po miša. Znači, tri mačke za 5 dana pojedu $4 \cdot 3.5$ miševa, a jedna mačka za jedan dan pojede $\frac{14}{15}$ miševa. Jedna mačka za 45 dana pojede $45 \cdot \frac{14}{15} = 42$ miša, a 100 mačaka pojedu $42 \cdot 100 = 4200$ miševa.

3. $140 = 4 \cdot 5 \cdot 7$ pa su traženi nazivnici 4, 5 i 7.

$$\frac{281}{140} = \frac{a}{4} + \frac{b}{5} + \frac{c}{7} = \frac{35a + 28b + 20c}{140}$$

$$35a + 28b + 20c = 281$$

Pošto su $28b$ i $20c$ parni, to $35a$ mora biti neparan da bi ukupan zbroj bio neparan. Zaključujemo da je $a$ neparan broj. Ako je $a$ neparan, tada zbroj $35a + 20c$ završava sa 5. Sada lako uočavamo da je $b = 2$ $(281 - ..5 = ..6)$.

$$35a + 20c = 225$$

Provjerom lako utvrdimo da je $a = 3$ odnosno $c = 6$. Konačno imamo:

$$\frac{281}{140} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{6}{7}$$

4. Neka je E točka presjeka visina $\overline{BD}$ i $\overline{MK}$.

1) $\sphericalangle KBM = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ$.

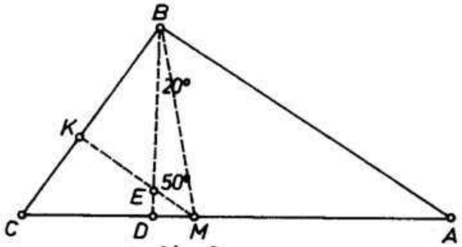
2) $\sphericalangle MEB = 180^\circ - (20^\circ + 50^\circ) = 110^\circ \Rightarrow MED = 70^\circ$,

3) $\sphericalangle DME = 180^\circ - (70^\circ + 90^\circ) = 20^\circ$

4) $\sphericalangle MCK = 180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$

5) $\sphericalangle CAB = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ$

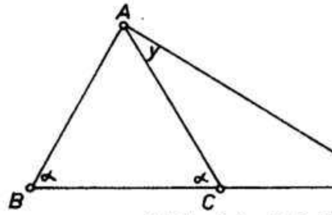
Kutovi trokuta ABC su $30^\circ$, $70^\circ$ i $80^\circ$.




Sl. 2



5. $\alpha = x + y \Rightarrow \alpha > x$ odnosno $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$.




Sl. 3

## VII RAZRED

1. 1) $P(7) = 49a + 7b + c$

2) $P(15) = 225a + 15b + c$

3) $P(15) - P(7) = 176a + 8b = 8 \cdot (22a + b) = 1$

Jednadžba $8 \cdot (22a + b) = 1$ nije rješiva u skupu Z pa prema tome takav polinom ne postoji.

2. $$\frac{202^{303}}{303^{202}} = \frac{(2 \cdot 101)^{3 \cdot 101}}{(3 \cdot 101)^{2 \cdot 101}} = \frac{(2^3)^{101}}{(3^2)^{101}} \frac{101^{3 \cdot 101}}{101^{2 \cdot 101}} =$$

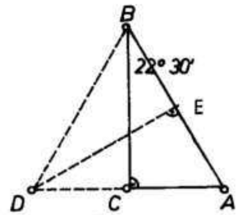
$$= \frac{8^{101}}{9^{101}} \, 101^{101} = \frac{(8 \cdot 101)^{101}}{9^{101}} > 1 \Rightarrow 202^{303} > 303^{202}$$

3. $(a+b)^2 = 576 \Rightarrow a^2 + b^2 = 576 - 2 \cdot a \cdot b = 576 - 286 = 290$

4. Neka je ABC zadani trokut. Konstruirajmo BCD simetričan $\triangle$ ABC u odnosu na $\overline{BC}$. Povucimo visinu $\overline{DE}$ u trokutu ABD. $\triangle$ DEB je polovina kvadrata pa je

$DE = \frac{c\sqrt{2}}{2}$. Sada imamo

$$P_\triangle \; ABC = \frac{1}{2} P_\triangle \; ABD = \frac{1}{2} \frac{\frac{c\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{c^2\sqrt{2}}{4} = \frac{c^2\sqrt{2}}{8}$$




Sl. 4

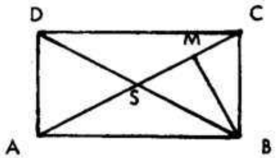
5. Neka je presjek dijagonala točka S, a presjek dijagonale AC i okomice na tu dijagonalu točka M.

1) $\overline{AM} : \overline{MC} = 3 : 1$

2) $\overline{AS} = \overline{CS} = \overline{BS}$

Iz (1) i (2) $\Rightarrow$ $\overline{SM} = \overline{MC} = \frac{1}{2}\ \overline{BS}$

Sada se lako uvidja da je $\triangle BMS$ polovina istostraničnog trokuta, pa je kut medju dijagonalama $60^\circ$ $(120^\circ)$.




Sl. 5

## VIII RAZRED

1. Neka je Vladimir rodjen $\overline{19xy}$ godine. Tada imamo:

$2003 - (1900+10x+y) = 1+9+x+y$ ili
$11x+2y = 93$, gdje su $x,y \in \{0,1,2,\ldots,9\}$

Kako je $2y \leq 18$ to je $11x \geq 93 - 18 = 75$, pa je $x \geq 7$. Kako x ne može biti paran ($11x + 2y$ bi tada bilo parno), a ne može biti, ni 9 ($11x > 93$), proizlazi da je $x=7$. Sada lako izračunamo $y = (93 - 77) : 2 = 8$.

Vladimir je rodjen 1978 godine i 2003. godine će imati 25 godina (1+9+7+8).

2. Iz $a^2+b^2-2\cdot(bc+cd+da - c^2 - d^2) = 0$ dobivamo
$a^2+b^2-2bc - 2cd - 2ad + c^2+c^2+d^2+d^2 = 0$, odnosno
$a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 = 0$, ili
$(a - d)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 = 0$

Ovo može biti jednako nuli samo za $a = b = c = d$.

3. $\frac{10^{2n} - 1}{3^4} = \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{81} = \frac{\overbrace{9\ldots9}^{n\ \text{devetki}}\cdot\overbrace{1000\ldots01}^{n-1\ \text{nula}}}{81} =$



$= \frac{9\cdot1\ldots11\cdot1\ldots01}{9\cdot9} = \frac{1\ldots11\cdot10\ldots01}{9}$

Budući da $10\ldots01$ ni za jedno n nije djeljivo sa 9, izraz $\frac{1\ldots1\cdot10\ldots01}{9}$ će biti djeljiv ako je $1\ldots1$ djeljiv sa 9. Sada lako zaključujemo da je $n \in \{9,18,27..\}$.

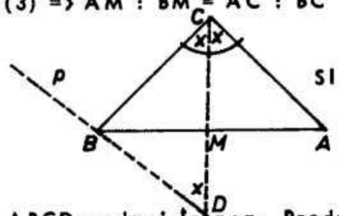
4. Neka je ABC zadani trokut. Povucimo pravac p paralelan sa $\overline{AC}$ tako da prolazi kroz vrh B. Neka je točka D presjek pravca p i simetrale $\measuredangle BCA$.

1) $\triangle BDM \sim \triangle MAC$ (sva tri kuta su sukladna)

2) $\overline{AM} : \overline{BM} = \overline{AC} : \overline{BD}$

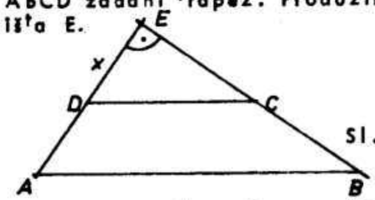
3) $\overline{BD} = \overline{BC}$ (jer je trokut BDC jednakokračan).

Iz (1) i (3) $\Rightarrow$ $\overline{AM} : \overline{BM} = \overline{AC} : \overline{BC}$ što je trebalo dokazati.




Sl. 6

5. Neka je ABCD zadani trapez. Produžimo $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ do njihovog sjecišta E.




Sl. 7

1) $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ (sva tri kuta su sukladna)

2) $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{AE} : \overline{DE}$ odnosno $25 : 15 = (8+x) : x \Rightarrow x=12$.

3) $\triangle DEC$ : $\overline{CE} = \sqrt{225 - 144} = 9$

4) $\triangle ABE$ : $\overline{BE} = \sqrt{625 - 400} = 15$

Opseg trapeza je 54 cm, a površina je jednaka razlici površina trokuta ABE i trokuta CDE.
$P = 150 - 54 = 96\ cm^2$.

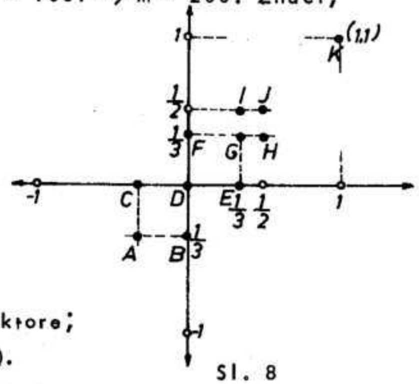
## POKRAJINSKO NATJECANJE

### VII RAZRED

1. U prvom obilasku precrtavamo brojeva 1,16,31,...,991 (brojevi oblika 15k+1); u drugom: 6,21,36,...,996 (brojevi oblika 15k+6); u trećem: 11,26,41,...,986,1001 (brojevi oblika 15k+11), gdje je k=0,1,2,...,66. Poslije toga bit će precrtavani samo već precrtani brojevi. Lako uočavamo da su precrtani svi brojevi od 1 do 1000 koji pri dijeljenju sa 5 daju ostatak 1 (oblik takvih brojeva je 5m+1, gdje m=0,1,2, ...). Takvih brojeva ima $5m+1 = 1001 \Rightarrow m = 200$. Znači, neprecrtanih je ostalo 800.

2. a) Ne, jer nije tranzitivna.

b)




Sl. 8

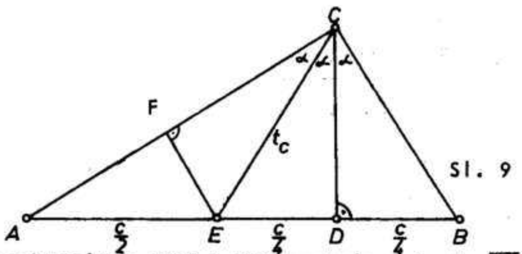
3. Rastavimo izraz $x^3+3x^2-4$ na faktore;

$$x^3+3x^2-4 = (x+2)^2\cdot(x-1).$$

Ako sada uvrstimo x = 99998 imamo:

$$f(99998)=(99998+2)^2\cdot 99997 = 100\ 000^2\cdot 99997 =$$
$$= 99997\cdot 10^{10}.$$

4. Neka je ABC zadani trokut.

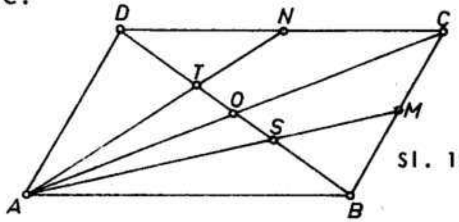



Sl. 9

Iz sukladnosti trokuta DEC i FEC proizlazi da je $\overline{FE} = \frac{c}{4}$. Trokut AEF je polovina istostraničnog trokuta pa je $\measuredangle A=30^\circ$, a takodjer i $\measuredangle\alpha=30^\circ$. Zadani trokut je polovina istostraničnog trokuta.



5. Neka je ABCD zadani paralelogram, a M i N polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{DC}$.




Sl. 10

Povucimo dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ i njihovo sjecište označimo sa O. Neka su točke S i T presjeci dužina $\overline{AN}$ i $\overline{AM}$ sa $\overline{BD}$. U trokutu ABC dužine $\overline{AM}$ i $\overline{BO}$ su težišnice pa je S težište $\Delta ABC$. Zbog toga je $\overline{BS} = 2\cdot OS$, odnosno $\overline{BS} = 1/3\ \overline{BD}$, a $\overline{OS} = \frac{1}{6}\ \overline{BD}$.

U trokutu ACD dužine $\overline{AN}$ i $\overline{DO}$ su težišnice pa je T težište $\Delta ACD$. Zbog toga je $\overline{DT} = 2\overline{TO}$, odnosno $\overline{DT} = 1/3\ \overline{DB}$, a $\overline{TO} = \frac{1}{6}\ \overline{DB}$.

Kako je $\overline{ST} = \overline{TO}+\overline{OS} = \frac{1}{3}\ \overline{BD}$, slijedi da je $\overline{DT} = \overline{TS} = \overline{SB} = \frac{1}{3}\overline{AC}$, što se i tvrdilo.

### VIII RAZRED

1. Neka su $\overline{abc}$ i $\overline{xyz}$ zadani troznamenkasti brojevi. Ako ih dopišemo jedan iza drugog dobijemo broj $\overline{abcxyz}$. Dakle, imamo:

$\overline{abcxyz} = \overline{abc}\cdot 1000 + \overline{xyz}$

Dodajmo i oduzmimo desnoj strani $\overline{abc}$ pa je:

$\overline{abcxyz} = \overline{abc}\cdot 1000 + \overline{abc} + \overline{xyz} - \overline{abc}$, ili

$\overline{abcxyz} = 1001\cdot\overline{abc} + \overline{xyz} - \overline{abc}$.

Pošto je 1001 djeljiv sa 7, a $\overline{xyz} - \overline{abc}$ po pretpostavci to je i $\overline{abcxyz}$ djeljiv sa 7.

2. Postavimo jednadžbe iz zadanih uvjeta:

(1) $0.5x+y+5z = 100$
(2) $x+y+z = 100$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge dobijemo $0.5x-4z=0$, odakle proizlazi $x = 8z$. Uvrštavanjem u (2) dobijemo:

$9z+y=100$.

Pošto su z i $y\in N$ proizlazi da je $z<12$.

Imamo slijedeća rješenja:

$x=88,\quad z=11,\quad y=1$
$x=80,\quad z=10,\quad y=10$
$x=72,\quad z=9,\quad y=18$
$x=64,\quad z=8,\quad y=28$
$x=56,\quad z=7,\quad y=37$
$x=48,\quad z=6,\quad y=46$
$x=40,\quad z=5,\quad y=55$
$x=32,\quad z=4,\quad y=64$
$x=24,\quad z=3,\quad y=73$
$x=16,\quad z=2,\quad y=82$
$x=8,\quad z=1,\quad y=91.$

3. Pretpostavimo da postoji. Tada je:

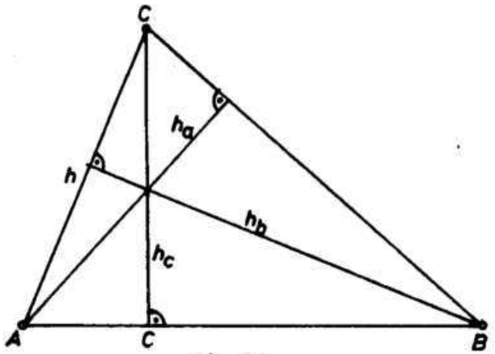
$$P = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_a}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2} \Rightarrow a\cdot 3 = b\cdot 6 = c\cdot 9 \Rightarrow a = 2b = 3c.$$

Stranice datog trokuta bi bile $a$, $\frac{a}{2}$ i $\frac{a}{3}$, a to je nemoguće

jer zbroj dviju stranica mora biti veći od treće.

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{3} < a.$$

Prema tome ne postoji.




Sl. 11



4. Kako je $\overline{CD} = \sqrt{25 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{91}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2}$, to je $\overline{TD} = \frac{\sqrt{91}}{6}$

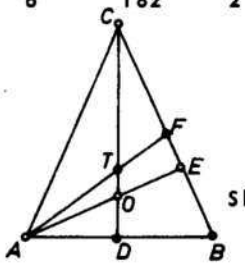
(jer je $\overline{TD} = \frac{1}{3}\ \overline{CD}$). Trokuti DBC i OAD su slični pa imamo:

$$\overline{OD} : \overline{DA} = \overline{DB} : \overline{DC} = \quad x : \frac{3}{2} = \frac{3}{2} : \frac{\sqrt{91}}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{2\cdot\sqrt{91}} \cdot \frac{\sqrt{91}}{\sqrt{91}} =$$

$$= \frac{9\sqrt{91}}{182} \quad (\text{gdje je } x = \overline{OD}).$$

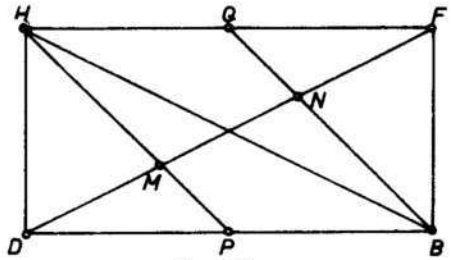
Prema tome, tražena udaljenost između težišta i ortocentra je:

$$\overline{OT} = \overline{TD} - \overline{OD} = \frac{\sqrt{91}}{6} - \frac{9\sqrt{91}}{182} = \frac{\sqrt{91}}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{9}{91}\right) = \frac{32\sqrt{91}}{273}$$




Sl. 12

5. Pošto točke M i N leže na dijagonalnom presjeku DBFH zadatak se svodi na slijedeće:
Ako vrh H pravokutnika DBFH spojimo sa polovištem stranice $\overline{DB}$, a vrh B sa polovištem stranice $\overline{FH}$, tada je:
$\overline{DM} = \overline{MN} = \overline{NF}$, gdje su M i N presječne točke dužina $\overline{HP}$ i $\overline{BQ}$ sa $\overline{AF}$. Rješenje je identično rješenju 5. zadatka za sedmi razred.




Sl. 13

# SAP KOSOVO

## REGIONALNO NATJECANJE

### V RAZRED 25. 04.1987.

1. Jedan radnik bi mogao završiti posao za 20 dana, a drugi za 30 dana. Počeli su zajedno, ali poslije 4 dana jedan od njih se razbolio. Za koje vrijeme će se završiti posao ako se: a) razbolio prvi radnik? b) razbolio drugi radnik?

2. Od 156 žutih, 234 bijelih i 390 crvenih ruža napravljen je najveći moguć broj jednakih buketa. Koliko košta jedan buket ako jedna žuta ruža košta 20 din, bijela 15 din i crvena 10 dinara?

3. Izračunaj veličinu kuta koji je tri puta veći od svog komlementa.

4. Dužina jednog konopca je veća za 54 cm od drugog. Ako se od svakog konopca odsiječe po 12 cm, onda će jedan biti 4 puta kraći od drugog. Kolike su dužine tih konopaca.

### VI RAZRED

1. Četiri druga kupili su zajedničku loptu. Prvi je platio 1/2 cijene, drugi 1/3 zbroja koji su platili njegovi drugovi, treći 1/4 zbroja koji su platili njegovi drugovi, a četvrti je platio 5 dinara. Koliko je koštala lopta?

2. Koja dva prirodna broja imaju produkt 1350 i zajednički djelitelj 15?

3. Konstruirati trokut čija je osnovica $a=5$ cm, polumjer opisane kružnice $R=4$ cm i visina $h(a)=3$ cm.

4. Odredi sve troznamenkaste brojeve koji su djeljivi sa 25 i imaju zbroj znamenaka 14.

### VII RAZRED

1. Tri sukladna kruga se dodiruju sa vanjske strane. Izračunaj površinu figure izmedju tih krugova.

2. Odredi hipotenuzinu visinu ako su katete $a=6$ cm i $b=8$ cm.

3. Odredi najmanji prirodan broj kojim treba pomnožiti broj 126 tako da se dobije broj koji je kvadrat nekog prirodnog broja.

4. Izrazi volumen jednakostranične trostrane piramide kao funkciju polumjera upisane kružnice baze piramide.

### VIII RAZRED

1. Ako je $9\overline{xy}=\overline{x0y}$, odredi x i y.

2. Skrati razlomak: $(x^4-7x^3+12x^2)/(3x^3-48x)$.

3. Data je funkcija $f(x)=(x^2-x)/(x+2)$. Izračunaj $f(f(x))=?$

4. Naći dva broja čiji zbroj iznosi 168,, a zajednički djelitelj 24.

## POKRAJINSKO NATJECANJE

Priština, 16. 05. 1987.

### V-VI RAZRED

1. Izračunati: 198765432·125·125 = ?

2. Učenik A tvrdi: B laže!
Učenik B tvrdi: C laže!
Učenik C tvrdi: A i B lažu!
Ko laže?

3. U pravilnom peterokutu produžene su dvije nesusjedne stranice do presjeka. Koji kut one zatvaraju?

4. Dat je 101 proizvoljan prirodan broj. Pokazati da medju njima postoje dva takva da je njihova razlika djeljiva sa sto.

5. Na jednoj gusarskoj karti piše: "Na otoku koji se nalazi u.....nalaze se vesla, kaktus i palma. Podji od vesala prema kaktusu i broj korake, pa se okreni udesno za 90 stupnjeva i idi isti toliki broj koraka. Tu postavi znak. Zatim, ponovo podji od vesala prema palmi i broj korake, pa se okreni ulijevo za 90 stupnjeva i idi isti broj koraka. Tu postavi znak. Kopaj na sredini izmedju dva znaka i naći ćeš sakriveno blago". Jedan mornar je našao otok, kaktus i palmu na njemu, ali vesala odakle je trebao početi traganje nije bilo, pa se vratio praznih ruku. Da je znao malo matematike našao bi sakriveno blago. A vi?

### VII RAZRED

1. Riješiti jednadžbu:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x+7\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}x+7\right)=0.$$

2. Nadji odsječke na koje upisana kružnica dijeli stranice pravokutnog trokuta sa katetama 3 i 4.

3. Na posljednjem natjecanju učestvovalo je po 5 učenika iz V, VI, VII i VIII razreda koji su rješavali po 5 zadataka, koji su donosili bodova koliki im je bio redni broj. Treći zadatak su riješili svi učenici, a drugi nijedan. Četvrti je riješio po jedan učenik iz svakog razreda, dok je peti riješio samo jedan. Koliko je učenika riješilo prvi zadatak i koliko je najviše bodova mogao imati neki učenik, ako se zna da je svaki razred imao isti broj osvojenih bodova.

4. Pokazati da se u bilo kom četverokutu pomoću jedne srednjice i dužina koje su jednake polovini dijagonala može konstruirati trokut sa stranicama paralelnim srednjici i dijagonalama četverokuta.

5. Isti kao 5. zadatak za V-VI razred.

### VIII RAZRED

1. Riješiti jednadžbu:

$$(0.9x-0.4)-(0.8x-0.3)=(1.7x-0.7)(0.8x+0.2)-$$
$$-(1.7x-0.7).$$

2. U kružnicu su upisana dva kvadrata tako da je dobijena pravilna osmokraka zvijezda. Nadji dužinu stranicu te zvjezde.

3. Pokazati da kvadrat nijednog prostog broja ne može biti oblika 5n-2 ili 5n+2, gdje je n prirodan broj.

4. Dokazati da okomica povučena iz središta dužine koja spaja podnožja visina spuštenih na dvije stranice trokuta dijeli treću stranicu na dva jednaka dijela.

5. Isti kao 5. zadatak za V-VI razred.

# RJEŠENJA

## REGIONALNO NATJECANJE

### V RAZRED

1. Za 4 dana je napravljeno $\frac{4}{20} + \frac{4}{30} = \frac{1}{3}$ posla. Preostali dio posla će prvi radnik završiti za $\frac{x}{20} = \frac{2}{3} = \quad x = \frac{40}{3}$ dana.

   Preostali dio posla će drugi radnik završiti za $\frac{x}{30} = \frac{2}{3} =$

   $=\ x=20$ dana.

2. D(156,234,390)=78. Dakle, možemo napraviti 78 jednakih buketa sa dvije žute (156:78), tri bijele (234:78) i pet crvenih ruža (390:78). Jedan buket košta $2\cdot 20+3\cdot 15+5\cdot 10=$ $= 135$ dinara.

3. $x + \frac{x}{3} = 90^\circ \Rightarrow x=67.5^\circ$.

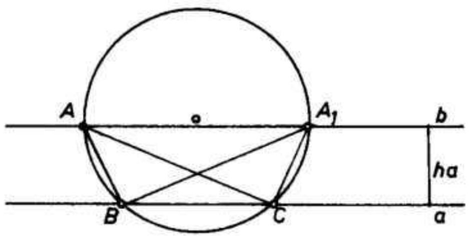
4. $4(x-12)=x+42 \Rightarrow x=30$. Dužine konopaca su 30 i 84 cm.

### VI RAZRED

1. $x - (\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}) = 5 \Rightarrow x=100$. Lopta je koštala 100 dinara.

2. Iz $1350= 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5$ proizlazi da je $a = 30$ i $b = 45$, odnosno $a = 15$ i $b = 90$.

3. Opis konstrukcije:
   Na proizvoljan pravac a nanesimo dužinu a=5 cm. Konstruirajmo pravac b paralelan pravcu a na udaljenosti (ha) 3 cm. Odredimo simetralu stranice $\overline{BC}=a$. Iz točke B opišimo kružni luk polumjera R= 4 cm. Sjecište tog luka i simetrale stranice $\overline{BC}$ je središte trokutu opisane kružnice. Konstruirajmo kružnicu polumjera R=4 cm i njeno sjecište sa pravcem b su točke A i $A_1$. Zadatak ima dva rješenja.




Sl. 1

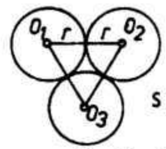


4. Troznamenkasti brojevi djeljivi sa 25 su: 100, 125, 150,... ....,975. Očigledno je da su to brojevi 725(zbog 2+5=7), 275( zbog 7+5=12) i 950(zbog 5+0=5).

### VII RAZRED

1. Kako su $O_1O_2$ i $O_3$ vrhovi jednakostraničnog trokuta stranice 2r, to je tražena površina jednaka razlici površina jednakostraničnog trokuta i tri kružna isječka.

$$P = \frac{4r^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3r^2\pi}{6} = r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$$

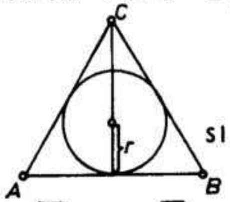



Sl. 2

2. Primjenom Pitagorinog teorema: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c= 10$.
   Kako je $P = \frac{a\cdot b}{2} = 24\ cm^2$, to je $v_c = \frac{2P}{c} = 4.8$ cm.

3. Kako je $126 = 2\cdot 3^2\cdot 7$, to traženi broj dobijemo da 126 pomnožimo sa 14.

4. Kako je polumjer upisane kružnice jednakostraničnog trokuta jednak trećini visine, to je $r = a\sqrt{3}/6$.




Sl. 3

Dalje je $a = \frac{6r}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}\,r}{3} = 2\sqrt{3}\,r$.

Volumen prizme je

$$V= B\cdot v = \frac{(2\sqrt{3}\,r)^2\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3}\,r)= 18r^3.$$

## VIII R A Z R E D

1. Kako je $\overline{9xy} = \overline{x0y}$, to je $90x+9y = 100x+y$, ili $10x=8y$ = $x=4$, $y=5$.

2. $$\frac{x^4-7x^3+12x^2}{3x^3-48x} = \frac{x^2(x-4)\ (x-3)}{3x(x-4)(x+4)} = \frac{x(x-3)}{3(x+4)}.$$

3. Ako je $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x+2}$ , tada je:

$$f(f(x)) = \frac{\left(\frac{x^2-x}{x+2}\right)^2 - \frac{x^2-x}{x+2}}{\frac{x^2-x}{x+2} + 2} \quad \text{ili}$$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{(x^2-x)^2 - (x^2-x)(x+2)}{(x+2)^2}}{\frac{x^2 - x+2x + 4}{x+2}} \quad \text{ili}$$

$$f(f(x)) = \frac{x(x-1)(x^2-2x-2)}{(x+2)(x^2+x+4)}.$$

4. Kako je $a+b=168$ i $D(a,b) = 24$, to je $24x+24y=168$, ili $x+y=7$.
   Za $x=1$, $a=24$ i $b=144$
   Za $x=2$, $a=48$ i $b=120$
   Za $x=3$, $a=96$ i $b=72$.



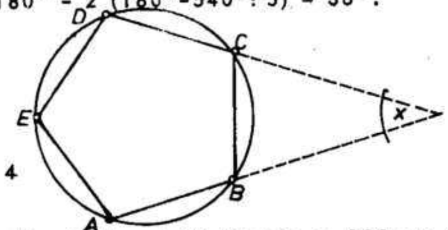


## V-VI R A Z R E D

1. 3105709875000.

2. A i C lažu.

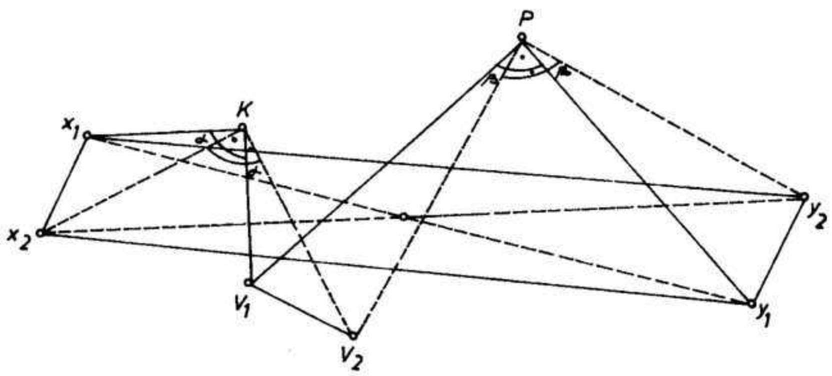
3. $x = 180^\circ - 2\,(180^\circ - 540^\circ : 5) = 36^\circ$.




Sl. 4

4. Mogući ostaci pri dijeljenju sa 100 su: 0,1,2,....,99. Dakle, ukupno 100. Zato između 101 proizvoljan broj postoje dva broja koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 100. Razlika takva dva broja je djeljiva sa 100.

5. Pretpostavimo da su vesla bila na mjestu $V_1$. Zatim konstruiramo točke $X_1$ i $Y_1$ prema uvjetima zadatka.
   Pretpostavimo sada da su vesla bila na mjestu $V_2$. Zatim opet konstriramo točke $X_2$, $Y_2$ prema uvjetima zadatka.
   Kako je $\triangle X_2X_1K$ sukladan trokutu $V_1V_2K$ (dvije stranice i kut među njima), a $\triangle V_1V_2P$ sukladan trokutu $Y_1Y_2P$, to je $\overline{V_1V_2} = \overline{X_1X_2} = \overline{Y_1Y_2}$. Sada lako zaključujemo da je $\overline{X_1X_2} \parallel \overline{Y_1Y_2}$ (trokut $X_1X_2K$ nastaje rotacijom trokuta $V_1V_2K$ za $90^\circ$, a trokut $Y_1Y_2P$ rotacijom trokuta $V_1V_2P$ za $90^\circ$.
   Kako su dužine $\overline{X_1X_2}$ i $\overline{Y_1Y_2}$ paralelne i jednake, to je $X_1X_2\ Y_1Y_2$ paralelogram. Pošto se dijagonale paralelograma raspolavljaju putnik može proizvoljno odrediti mjesto vesala i postupiti prema uputama iz karte.

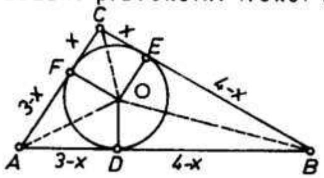



Sl. 5

## VII RAZRED

1. $x = 45$.

2. Neka je ABC zadani pravokutni trokut sa stranicama 3,4 i 5 cm.



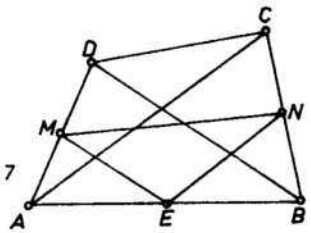

Sl. 6

Kako je OECF kvadrat stranice x, to je $\overline{AF} = \overline{AD} = 3-x$ i $\overline{BD} = \overline{BE} = 4 - x$ (zbog sukladnosti trokuta AOF i AOD odnosno DBO i OBE).
Iz $3-x+4-x=5$ proizlazi $x = 1$.
Upisana kružnica dijeli stranice trokuta na dijelove: 1 i 2, 1 i 3, 2 i 3 cm.



3. Kako drugi zadatak nije riješio nijedan učenik, a četvrti zadatak po jedan učenik iz svakog razreda, treći zadatak svi učenici, zaključujemo da sada svaki razred ima 19 bodova.
Pošto je peti zadatak riješio samo jedan učenik, njegov razred tada ima 24 boda. Iz uvjeta zadatka da je svaki razred imao isti broj bodova, zaključujemo da su prvi zadatak riješili svi učenici osim učenika iz razreda gdje je jedan učenik riješio 5. zadatak. Dakle, prvi zadatak je riješilo 15 učenika. Najbolji učenik je mogao imati maksimalno 9 bodova.

4. Neka je ABCD zadani četverokut i neka je $\overline{MN}$ njegova srednjica. Nadjimo polovište dužine $\overline{AB}$.




Sl. 7

Kako je $\overline{ME} = \frac{1}{2}\overline{DB}$ ($\overline{ME}$ je srednjica trokuta ABD) i $\overline{NE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, to je traženi trokut MEN.

5. Vidi rješenje istog zadatka za V i VI razred.

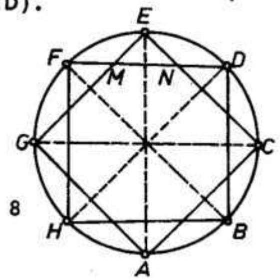
## VIII RAZRED

1. Transformiramo li zadanu jednadžbu:

$$0.1x-0.1 = (1.7x-0.7)(0.8x-0.8),\ \text{ili}$$
$$(0.1x-0.1)\left[1-8(1.7x-0.7)\right] = 0,\ \text{ili}$$
$$(0.1x-0.1)(-13.6x+6.6) = 0.$$

Iz $0.1x-0.1 = 0 \Rightarrow x=1$.
Iz $-13.6x + 6.6 = 0 \Rightarrow x = \frac{33}{68}$

2. Neka je r polumjer kružnice. Tada je $\overline{FD} = r\sqrt{2}$. Kako je $\triangle MNE$ jednakokračan pravokutan, to je $\overline{MN} = \overline{ME}\sqrt{2}$. Prema tome, $\overline{FM} = \overline{FD} - \overline{MD} = r\sqrt{2} - \overline{FM}\sqrt{2} - \overline{FM}$ (pošto je $\overline{ME} = \overline{FM} = \overline{ND}$).



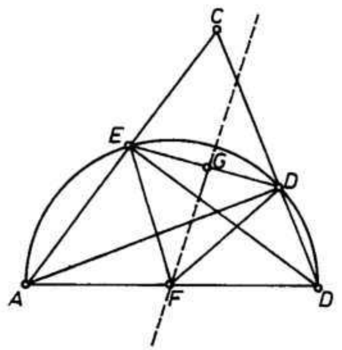

Sl. 8

Dalje je: $\overline{FM} + \overline{FM}\sqrt{2} + \overline{FM} = r\sqrt{2}$, ili

$$\overline{FM} = \frac{r\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = r\sqrt{2} - 1.$$

3. Prost broj ima posljednju znamenku 1,3,7 ili 9(izuzev broja 5). Kvadrat prostog broja završava znamenkom 1 ili 9. Izraz 5n - 2 ili 5n+2 nikad nema posljednju znamenku 1 ili 9.

4. Neka je ABC zadani trokut, a $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ njegove visine. Opišimo kružnice pravokutnim trokutima ABE i ABD. Kako je trokut EFD jednakokračan to je visina $\overline{FG}$ ujedno i simetrala stranice $\overline{ED}$. Pošto je $\overline{FA}$ jednako $\overline{FB}$ to je F polovište stranice $\overline{AB}$.




Sl. 9



# SFR JUGOSLAVIJA

SAVEZNO NATJECANJE

SOMBOR, 07. 06. 1987.

VII RAZRED

1. Dokazati da za svaki troznamenkasti broj važi slijedeće tvrdjenje: ili je on djeljiv sa 3, ili je dvoznamenkasti broj, odnosno jednoznamenkasti broj, sastavljen od njegovih znamenki djeljiv sa 3.

2. Brojevi 12 i 60 imaju interesantno svojstvo: njihov produkt jednak je desetorostrukom zbroju. Takvih parova prirodnih brojeva ima još. Odredi sve te parove.

3. Neki troznamenkasti broj se poveća za 45, ako znamenke jedinica i desetica zamijene mjesta, a isti broj se smanji za 270, ako znamenke stotica i desetica zamijene mjesta. Šta će se dogoditi sa tim brojem ako znamenka stotica i jedinica zamijene mjesta?

4. U jednakokračnom trokutu $ABC$ sa osnovicom $\overline{AB}$, dužina $\overline{CD}$ je visina (okomica na osnovicu). Ako je $M$ bilo koja točka kraka $\overline{BC}$, dokazati da je razlika dužina $\overline{CA}$ i $\overline{CM}$ veća od razlike dužina $\overline{DA}$ i $\overline{DM}$.

5. Data je točka $C$ i pravci $p$ i $q$ koji se sijeku. Konstruirati trokut $ABC$, kome je pravac $p$ simetrala unutrašnjeg kuta $\alpha$ a pravac $q$ simetrala unutrašnjeg kuta $\beta$. (Točku $C$ i pravci $p$ i $q$ izabrati tako da zadatak ima rješenje).

VIII RAZRED

1. Za koje vrijednosti $x, y, z$ izraz $x^2+y^2+z^2-12y-14z+90$ ima najmanju vrijednost? Naći tu vrijednost!

2. Ako je $a^2+a+1 = 0$; odredi vrijednost izraza:

$$a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}}.$$

3. Zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do $n$ (uključivo) jednak je troznamenkastom broju jednakih znamenki. Koliko smo prirodnih brojeva zbrojili?

4. U pravokutnik ABCD sa stranicama $\overline{AB}$=10 cm i $\overline{BC}$=5 cm upiši polukrug promjera $\overline{AB}$. U kojem omjeru dijeli polukrug dijagonalu pravokutnika?

5. Neka je ABCD proizvoljan četvorokut površine 3. Na stranici $\overline{AB}$ date su točke M i N, takve da je $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$, a na stranici $\overline{CD}$ date su točke P i Q, takve da je $\overline{CP}=\overline{PQ}=\overline{QD}$. Dokazati da četvorokut MNPQ ima površinu 1.

## RJEŠENJA

1. Ako je neka od znamenki proizvoljnog troznamenkastog broja djeljiva sa 3, tada je tvrdjenje dokazano. Pretpostavimo da ni jedna od znamenki x,y,z tog broja nije djeljiva sa 3. Tada su ostaci dijeljenja znamenaka x,y,z sa 3 jednaki za sve znamenke, ili su za dvije znamenke ovi ostaci različiti. Ako su ostaci jednaki, onda je (x+y+z) djeljivo sa 3, pa je, prema kriterijumu djeljivosti, broj $\overline{xyz}$ djeljiv sa 3. Ako su ostaci, na primjer kod znamenaka x i y različiti (znači 1 i 2), tada je zbir (x+y) djeljiv sa 3, pa je i dvoznamenkasti broj $\overline{xy}$ djeljiv sa 3. Time je tvrdjenje dokazano.

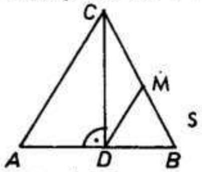
2. Neka su x i y traženi brojevi. Tada je $xy=10(x+y)$. Tada dobijamo: $xy-10x-10y=0$, odnosno: $xy-10x-10y+100=100$. Transformiranjem lijeve strane dobijamo: $(x-10)(y-10)=100$.

Ovo daje slijedeće mogućnosti: $(x-10)(y-10)=1\cdot 100$, $(x-10)(y-10)=2\cdot 50$, $(x-10)(y-10)=4\cdot 25$, $(x-10)(y-10)=5\cdot 20$ i $(x-10)(y-10)=10\cdot 10$. Traženi parovi brojeva su: 11 i 110, ili 12 i 60, ili 14 i 35, ili 15 i 30, ili 20 i 20.

3. Neka je $100x+10y+z$ naš troznamenkasti broj. Tada zamjenom znamenaka jedinica i desetica dobijamo: $100x+10y+z+45=100x+10z+y$, što daje uvjet $y-z+5=0$.
Ako stotine i desetice zamijene mjesta biće: $100x+10y+z-270=100y+10x+z$, odakle je: $x-y-3=0$.
Zbrajanjem dvije dobijene jednakosti nastaje uvjet: $(y-z+5)+(x-y-3)=0$, odnosno $x-z=-2$.
Ako znamenke stotica i jedinica zamjene mjesta dobijamo: $100x+10y+z-(100z+10y+x)=99(x-z)=99\cdot(-2)=-198$. Dakle, zamjenom znamenaka jedinica i stotina broj se poveća za 198.

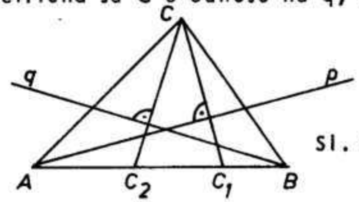


4. Zbog $\overline{CA}=\overline{CB}$ je $\overline{CA}-\overline{CM}=\overline{CB}-\overline{CM}=\overline{BM}$. U trokutu BDM je stranica $\overline{BM}$ veća od razlike stranica $\overline{DB}$ i $\overline{DM}$, tj $\overline{BM}>|\overline{DB}-\overline{DM}|$, sl. 1 . Medjutim, podnožje visine na osnovicu je središte osnovice, pa je $\overline{DA}=\overline{DB}$. Zbog toga je: $\overline{CA}-\overline{CM}=\overline{BM}>|\overline{DB}-\overline{DM}|=|\overline{DA}-\overline{DM}|$, tj. $\overline{CA}-\overline{CM}>|\overline{DA}-\overline{DM}|$, što se i tvrdilo.



Sl. 1

5. Analiza. Neka je ABC trokut kome su p i q simetrale kutova $\alpha$ i $\beta$. Tada točka $C_1$, simetrična sa C u odnosu na p, pripada pravcu AB, a ovom pravcu pripada točka $C_2$, simetrična sa C u odnosu na q, sl. 2 . Zadanoj točki C konstruiramo simetrične točke $C_1$ i $C_2$. Pravac $C_1 C_2$ siječe pravce p i q u A i B.



Sl. 2

## VIII RAZRED

1. Dati izraz možemo napisati u obliku: $x^2+y^2-12y+36+z^2-14z+49+5=x^2+(y-6)^2+(z-7)^2+5\geqslant 5$. Ovo zaključujemo na osnovu poznate osobine da je kvadrat svakog realnog broja $\geqslant 0$. Znači, za $x=0$, $y=6$ i $z=7$ dati izraz ima minimalnu vrijednost 5.

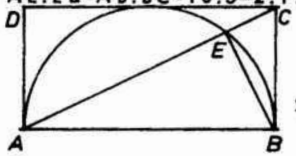
2. Ako datu jednakost pomnožimo sa $(a-1)$, dobićemo: $(a-1)(a^2+a+1)=0$ tj. $a^3-1=0$, a odavde je $a^3=1$. Tada je: $a^{1987}=a^{3\cdot 662}\cdot a=(a^3)^{662}\cdot a=1^{662}\cdot a=1\cdot a=a$. Prema tome, biće: $a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=a+\frac{1}{a}$ Kako je $a^2+1=-a$ imamo:

$$a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=a+\frac{1}{a}=-1.$$

3. $1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n=(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+$ $+...=(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1) = \frac{n}{2}(n+1)$. Označimo sa k znamenku dobijenog troznamenkastog broja. Tada je: $\frac{n}{2}(n+1)=k\cdot 111$, odnosno: $n(n+1)=k\cdot 222= k\cdot 2\cdot 3\cdot 37$.

Lijeva strana jednakosti je produkt dva uzastopna prirodna broja. Da bi to bilo moguće mora biti $k=6$. Tada je $n(n+1)=36\cdot 37$ tj. $n=36$. Zbrojili smo 36 prirodnih brojeva, a njihov zbroj je 666.

4. Neka je E presječna tačka dijagonale $\overline{AC}$ i polukruga k, sl. 3 . Tada je $\measuredangle AEB=90^\circ$, kao kut nad promjerom $\overline{AB}$. Pravokutni trokutovi ABE i BCE su slični, jer imaju jednake oštre kutove (kutovi sa okomitim kracima). Zbog toga je $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{AB}:\overline{BC}=10:5=2:1$. $\overline{EB}:\overline{EC}=2:1 =$ $\overline{AE}:\overline{EC} = 4:1$.

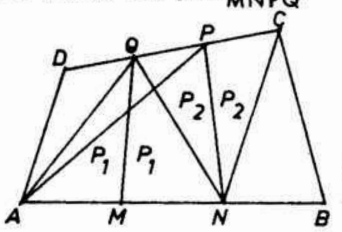


Sl. 3

5. Trokutovi AMQ i MNQ imaju jednake osnovice, $\overline{AM}=\overline{MN}$, i zajedničku odgovarajuću visinu, pa su im jednake površine (na sl.4 označene sa $P_1$). Iz sličnih razloga su jednake površine trokutova CPN i PQN, označene sa $P_2$. Dakle, površina četverokut MNPQ je $P_1+P_2$.

Dokazaćemo da je zbroj površina trokutova ADQ i BCN jednak trećini površine četverokuta ANCD, tj. jednak 1. Zaista, trokut ADQ ima tri puta manju osnovicu od trokuta ACD, a visina im je zajednička. Zbog toga je $P_{ADQ} = \frac{1}{3}P_{ACD}$. Slično zaključujemo da je $P_{BCN}=\frac{1}{3}P_{ABC}$, pa je $P_{ADQ}+P_{BCN} = \frac{1}{3}P_{ACD}+\frac{1}{3}P_{ABC} = \frac{1}{3}P_{ABCD}= 1$.

Sada dobijamo da je $P_{ANCQ}=2$, tj. $2P_1+2P_2=2$, odnosno $P_1+P_2=1$, a samim tim je $P_{MNPQ} = 1$.



Sl. 4