Najtoplije zahvaljujem **prof. Milanu Šariću** na poticaju i dozvoli da knjižicu
"Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1988. godine - za učenike osnovnih škola"
skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

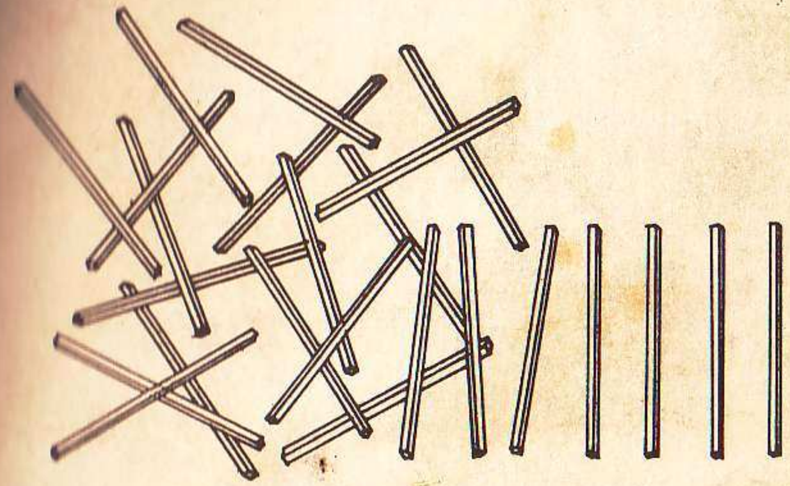
DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDIO

MILAN ŠARIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1988. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA



Beli Manastir, 1989.

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDIO
MILAN ŠARIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1988. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1989.

Recenzent
Luka Čeliković, prof.

Grafički crteži i prilozi
Radanović Marija

Tekst otipkao
Peran Josip, dipl. ecc.

Tisak GRO »SLOVO« Beli Manastir

SADRŽAJ

PREDGOVOR

I ove godine, kao i prošle, objavljujemo zbirku zadataka sa većine matematičkih natjecanja učenika osnovnih škola održanih u našoj zemlji protekle godine.

Zbirka sadrži zadatke sa općinskih, regionalnih te republičkih ili pokrajinskih natjecanja svih republika i pokrajina, zadatke sa »Arhimedesovog matematičkog turnira« i saveznog natjecanja u 1988. godini. Nismo uspjeli prikupiti sve zadatke iz Crne Gore.

Svi zadaci i veći dio rješenja, preuzeti su i objavljeni u izvornom obliku, kako su ih dale natjecateljske komisije. Zadaci i rješenja iz Slovenije i Makedonije su dani dvojezično. Za rješenja zadataka, koje smo dobili bez rješenja natjecateljskih komisija, koristili smo matematičku terminologiju koja se upotrebljava u Hrvatskoj. Otuda terminološka (namjerna) raznolikost.

Iako je dio zadataka već objavljen u različitim matematičkim časopisima, nadamo se da će ovako na jednom mjestu prikupljeni zadaci biti još jedan doprinos i pomoć u radu sa mladim talentiranim matematičarima.

U pripremi zbirke pomogli su mnogi kolege matematičari iz svih republika. Posebno se zahvaljujemo profesorima Bogoljubu Marinkoviću, Vojislavu Andriću, Kosti Miševskom, Aleksandru Potočniku i mr. Astribu Bardhi, recenzentu Luki Čelikoviću i Marceli Hanzer koja je pregledala dio rukopisa.

MILAN ŠARIĆ

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

SR HRVATSKA

POKRET "NAUKU MLADIMA" SR HRVATSKE

MATEMATIKA

PITANJA I ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA
OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

05. ožujka 1988. godine

V RAZRED

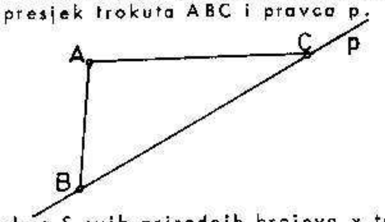
PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. Izračunaj: $130 \cdot (1170 : 26) - 30 \cdot 45$.

2. Izračunaj: $72 : (8 : 2) + (2 \cdot 3 + 4) \cdot 5 - 8$.

3. Koji su elementi skupa A, a koji skupa B, ako je $A \cap B = \{1, 3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $B \subset A$?

4. Zadan je trokut ABC i pravac p (promotri sliku). Odredi presjek trokuta ABC i pravca p.



5. Odredi skup S svih prirodnih brojeva x takvih, da je razlika $32 - x$ djeljiva sa 9.

6. Riješi jednadžbu: $30 - (x - 5) = 30 - 4 \cdot 5$.

7. Odredi za koje parove prirodnih brojeva x, y vrijedi $D(x,y) = 3$, $V(x,y) = 18$ i $x < y$.

8. Opseg kvadrata iznosi 12 cm. Kolika je površina tog kvadrata?

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Odredi četiri uzastopna prirodna broja čiji je umnožak 3024.

2. Površina pravokutnika je 144 cm^2, a duljine stranica (izražene u centimetrima) su prirodni brojevi.

   a) Koliko ima takvih različitih pravokutnika?
   b) Koji od njih ima najveći opseg?

3. Odredi najmanji prirodni broj djeljiv sa 7 takav, da pri dijeljenju sa 2, 3, 4, 5 i 6 daje ostatak 1.

4. U zamračenoj prostoriji nalazi se kutija u kojoj je 5 bijelih, 12 crvenih i 20 žutih ruža koje, zbog tame nije moguće razlikovati po boji. Odredi najmanji broj ruža koje valja uzeti iz kutije, pa da medju njima sigurno bude barem:

   a) po jedna ruža od svake boje,
   b) 10 ruža iste boje.

VI RAZRED

PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. Kakvi treba da budu brojevi x i y, da jednakost $\frac{3}{x} \cdot \frac{y}{3} = 1$ bude ispravna, ako je $x \neq 0$?

2. Da li je broj 294.85 veći ili manji od $(324 - 32.4) + 32.4 \quad 0.1$ i za koliko?

3. Izračunaj: $8 : (2\frac{2}{25} - 0.08) + \frac{3}{4} \cdot 4 - 6$.

4. Riješi jednadžbe:

   a) $\frac{x+1}{4} - 2 = 8$

   b) $5 - 2(x - 3) = 23$

5. Izračunaj: $-3 - (3 - 3 \quad 3 - 3 : 3 + 3) + 3$.

6. Zadana je funkcija $f(x) = 2x - 1$. Izračunaj $f(-5)$.

7. Odredi volumen kocke čiji je zbroj duljina svih bridova 24 cm.

8. Duljina jedne stranice pravokutnika je 36 cm. Druga stranica pravokutnika iznosi $\frac{5}{6}$ duljine prve stranice. Kolika je površina tog pravokutnika?

9. Sanduk sa jabukama težak je 25 kg. Koliko je težak sam sanduk ako su jabuke, koje se nalaze u njemu, za 20 kg teže od sanduka?

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Odredi x iz jednakosti:
$$\left(\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{3} + 2.5 : 2\frac{1}{2}\right) \cdot x - \left(1.75 - 2\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{21}\right) : 2\frac{1}{2} = 1$$

2. U broju 0. 1234567891011121З . . . 47484950 ispusti (precrtaj) 85 decimale tako, da broj s preostalim znamenkama bude najmanji.

   Obrazloži.

3. Ako se stranica kvadrata poveća za 5 cm, tada je površina novog kvadrata za 95 cm^2 veća od površine zadanog kvadrata. Odredi opseg i površinu zadanog kvadrata.

4. U 12 sati, na satu su se poklopile velika (minutna) i mala (satna) kazaljka. Odredi najmanji broj minuta kada će se obje kazaljke ponovno poklopiti.

VII RAZRED

PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. Izračunaj: $-14 - 4 \cdot (-2) - (5 - 10:2)$.
2. Koliko puta je razlika brojeva $\frac{6}{5}$ i 0.75 veća od $\frac{1}{4}$.
3. Riješi jednadžbu: $x - 1\frac{1}{2} = \frac{x}{2} + 0.5$.
4. Riješi nejednadžbu i prikaži skup rješenja na brojevnom pravcu.
$$-\frac{1}{6}x - \frac{3}{4} < -\frac{2}{3}.$$
5. Koja od zadanih točaka $A(-\frac{3}{4}, -12)$, $B(\frac{6}{5}, \frac{5}{6})$ i $C(15, \frac{2}{5})$ pripada grafu funkcije $f(x) = \frac{6}{x}$?
6. Ako sat zaostaje svakih 8 sati 3 sekunde, koliko će sekundi zaostati za 2 dana?
7. Od 32 učenika u razredu 18.75 % su odlični iz matematike. Koliko učenika u tom razredu nema ocjenu odličan iz matematike?
8. U trokutu ABC je $\alpha = \beta = \frac{1}{3}\gamma$

   Koliko stupnjeva imaju kutovi tog trokuta?

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Ako dvoznamenkasti broj podijelimo sa zbrojem njegovih znamenaka količnik je 4 i ostatak 3. No, ako od istog dvoznamenkastog broja oduzmemo dvostruki zbroj njegovih znamenki razlika je 25.

   Koji je to dvoznamenkasti broj?

2. Za 5 godina broj godina brata odnosit će se prema broju godina sestre kao 7:5. Koliko godina ima brat, a koliko sestra sada (ove godine), ako je prije jedne godine brat bio 2 puta stariji od sestre?

3. Riješi nejednadžbu: $|x - 2| < 2x + 1$.

4. U trokutu ABC duljine stranica su a, b i c, a kut γ (nasuprot stranici c) jednak je 120°.

   Dokaži, da dužine duljina a + b, b, c odredjuju trokut.

VIII RAZRED

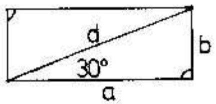
PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. Izračunaj: $8 - (18 - 6 : 3) + 4 + 3 \cdot (4 - 8) : 2$.
2. Izračunaj: $(1\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}) : 2$
3. Funkcija $f: R \rightarrow R$ je zadana formulom $f(x) = -\frac{1}{2}x - 3$.

   Izračunaj $f(-\frac{4}{3})$.
4. Riješi sustav jednadžbi:
$$3y - 2 = 0$$
$$2x + 3y = 4.$$
5. Koliko je 15% od 27.6 ?
6. Izračunaj $(1 - \frac{1}{2}a)^2$.
7. Napiši u obliku produkta: $9 - 6x + x^2$.
8. Izračunaj: $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.
9. Duljina osnovice jednakokračnog trokuta je 0.2 dm, duljina njegovog kraka je 0.26 dm. Kolika je duljina visine spuštene na osnovicu ovog trokuta?

   (Rješenje napiši u decimetrima.)

10. Dijagonala pravokutnika sa njegovom stranicom a zatvara kut od 30°. Duljina stranice b = 5 cm. Kolika je duljina stranice a i duljina dijagonale?
Promotri sliku.



DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Odredi vrijednost parametra m takav, da se pravci:
$mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$
$(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$, sijeku na ordinatnoj osi.

2. Opseg jednakokračnog trokuta je 64 cm, a duljina kraka je za 11 cm veća od duljine osnovice trokuta. Odredi duljinu visine spuštene iz jednog vrha osnovice na krak.

3. U pravokutniku ABCD okomica iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$ dijeli dijagonalu $\overline{AC}$ u omjeru 3 : 1. Odredi kut izmedju dijagonala tog pravokutnika.

4. Dokaži da je broj

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$ cijeli broj.

PITANJA I ZADACI ZA REPUBLIČKI SUSRET UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

Osijek, 01. 04. 1988.

VII RAZRED

1. Od znamenaka troznamenkastog broja moguće je sastaviti 6 različitih dvoznamenkastih brojeva. Koji troznamenkasti broj ima svojstvo da je jednak polovici zbroja svih 6 tako dobivenih dvoznamenkastih brojeva?

2. Odredi brojeve x, y i z za koje vrijede ove jednakosti

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1987$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1988$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 1989.$$

3. Brat i sestra mjerili su koracima duljinu i širinu vrta pravokutnog oblika. Kada je brat išao po duljoj stranici, a sestra po

kraćoj stranici, zajedno su načinili 270 koraka. No, kada je brat išao po kraćoj, a sestra po duljoj stranici pravokutnika, zajedno su načinili 290 koraka. Duljina koraka brata je 0.8 m, a duljina koraka sestre je 0.6 m. Kolika je površina vrta?

4. Vanjski kutovi trokuta odnose se kao 9 : 16 : 20. Povučena je simetrala najvećeg unutrašnjeg kuta i iz vrha istog kuta spuštena je okomica na suprotnu stranicu. Koliki kut zatvaraju ova dva pravca?

5. Svaki unutrašnji kut četverokuta ABCD manji je od 180°. Dokaži, da je zbroj udaljenosti $|AP| + |BP| + |CP| + |DP|$, gdje je P točka u ravnini četverokuta ABCD, najmanji ako je P sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

VIII RAZRED

1. Odredi koordinate točke A koja je simetrična točki B (5, -2) u odnosu na pravac $3x - 2y - 6 = 0$.

2. Riješi algebarski i grafički sustav jednadžbi:

$$|x| - |y| = 3$$
$$|x| + |y| = 5$$

3. Na pravcu p dane su tri točke A, B i C tako, da je točka B izmedju točaka A i C. Nad dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ konstruirani su s iste strane pravca p jednakostranični trokuti ABE i BCD. Izračunaj površinu četverokuta ACDE ako je $|AB| = a$, $|BC| = b$.

4. Ako su a, b i c duljine stranica pravokutnog trokuta (c je duljina hipotenuze), dokaži da vrijedi

$$a + b \leqslant c\sqrt{2}.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

5. Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Odredi te brojeve.

R J E Š E N J A

V R A Z R E D

PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. 4500. 2. 60. 3. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $B = \{1,3,4\}$
4. BC. 5. $S = \{5,14,23,32\}$. 6. $x = 25$.
7. $x = 3$, $y = 18$, $x = 6$, $y = 9$. 8. 9 cm^2.

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Očito je, da niti jedan od 4 broja nije djeljiv sa 5 niti sa 10, jer broj 3024 ne završava sa 5 i 0.
Ako bi traženi brojevi bili veći od 10, tada bi njihov umnožak bio veći od 10000. Slijedi da su traženi brojevi manji od 10, tj. 1,2,3,4 ili 6,7,8,9.
Kako je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, to traženi brojevi mogu biti samo brojevi 6,7,8,9.
Stvarno, $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$.

2. $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
a) Duljine susjednih stranica su: 1 cm i 144 cm, 2 cm i 72 cm, 3 cm i 48 cm, 4 cm i 36 cm, 6 cm i 24 cm, 8 cm i 18 cm, 9 cm i 16 cm, 12 cm i 12 cm. Imamo 8 različitih pravokutnika.
b) Najveći opseg ima pravokutnik čije su susjedne duljine 1 cm i 144 cm. Opseg je 290 cm.

3. Neka je x traženi broj. On mora biti djeljiv sa 7, tj. ima oblik $7k$, gdje je $k \in N$. Kako taj broj pri dijeljenju sa 2,3,4,5 i 6 daje ostatak 1, to znači da umanjen za 1 postaje djeljiv sa 2,3,4,5 i 6.
Najmanji takav broj je $V(2,3,4,5,6)=60$, naravno i svi višekratnici od 60 (120,180,240,...). Dakle, brojevi djeljivi sa 2,3,4,5 i 6 su oblika $60n$ pri čemu je $n \in N$. Traženi brojevi su za 1 veći, tj. $x = 60n + 1$.
Za $n = 1,2,3,4$ dobijamo brojeve 61,121,181,241, a oni nisu djeljivi sa 7. Za $n = 5$ traženi broj je $x = 301$.

4. a) Uzmimo najnepovoljniji slučaj, tj. kada izvučemo 20 žutih i 12 crvenih ruža. Tada još nismo sigurni da je zahtjev ispunjen. Preostalo je 5 bijelih ruža od kojih je dovoljno da izvučemo 1 ružu. Dakle, najmanje trebamo izvući 33 ruže.
b) Uzmimo najnepovoljniji slučaj kad izvučemo 9 žutih 9 crvenih i 5 bijelih ruža. Time zahtjev nije ispunjen. Izvučemo li još 1 ružu ona će biti crvena ili žuta čime je zahtjev ispunjen. Dakle, najmanje trebamo izvući 9+9+5+1, tj. 24 ruže.

VI RAZRED

PRVA SKUPINA ZADATAKA

1. $x - y$. 2. veći za 0,01. 3. 1. 4. a) $x = 39$ b) $x = 6$.
5. 4. 6. -11. 7. 8 cm^3. 8. 1080 cm^2. 9. 2.5 kg.

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

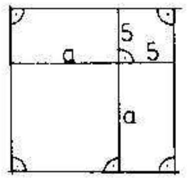
1. $(\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} + \frac{5}{2} : \frac{5}{2}) \cdot x - (\frac{7}{4} - \frac{21}{8} \cdot \frac{4}{21}) : \frac{5}{2} = 1$

$(2 + 1) \cdot x - (\frac{7}{4} - \frac{1}{2}) : \frac{5}{2} = 1$

$3x - \frac{5}{4} : \frac{5}{2} = 1 \qquad 3x - \frac{1}{2} = 1 \qquad 3x = \frac{3}{2} \qquad x - \frac{1}{2}.$

2. U ovom broju ima $9 + 41 \cdot 2 = 91$ decimala. Ako izbrišemo 85 decimala ostat će još 6 decimala. Broj će biti to manji, ako su slijeve strane znamenke manje vrijednosti. U zadanom broju među decimalama ima 5 nula, pri čemu je zadnja znamenka nula. To znači da bar 1 od 6 decimala mora biti veća od nule. Sad je očito, da je peta decimala 1, pa je traženi broj 0.000010.

3.



Ako stranicu kvadrata povećamo za 5 cm, tada novi kvadrat ima veću površinu od zadanog za 2 pravokutnika površine $5a$ i jedan kvadrat površine 25 cm^2, a zbroj te tri površine je 95 cm^2. Sad možemo pisati $5a + 5a + 25 = 95$, $10a = 70$, pa je $a = 7$ cm. Opseg zadanog kvadrata je 28 cm. Površina zadanog kvadrata je 49 cm^2.

4. Velika kazaljka za 1 sat opiše kut od $360°$, a u 1 minuti kut od $6°$. Mala kazaljka za 1 sat opiše kut od $30°$, a u 1 minuti kut od $(1/2°)$. Očito je da će se obje kazaljke poklopiti poslije jednog sata. Za to vrijeme, velika kazaljka mora preći put od $30°$ i još kut koji poslije jednog sata prijeđe mala kazaljka. Neka je x broj minuta za koje će se kazaljke poklopiti poslije jednog sata. Za to vrijeme velika kazaljka opiše kut od $6x$ stupnjeva, a mala kazaljka opiše kut od $1/2\,x$ stupnjeva, pri čemu je $6x > 1/2x$ za $30°$.

Sad možemo postaviti jednadžbu $6x = \frac{1}{2}x + 30$, $12x - x + 60$, $x - \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ minuta. Velika i mala kazaljka poklopit će se ponovno nakon $65\frac{5}{11}$ minuta.

VII RAZRED

PRVA SKUPINA ZADATAKA

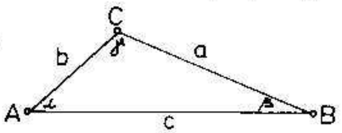
1. -6. 2. $\frac{9}{5}$ puta veća. 3. $x = 4$. 4. $x > -\frac{1}{2}$. 5. $C(15, \frac{2}{5})$.
6. 18 sek. 7. 26 učenika. 8. $\alpha = \beta = 36^\circ$, $\gamma = 108^\circ$.

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Neka je x traženi dvoznamenkasti broj, a y zbroj njegovih znamenki, tada vrijedi: $x = 4y+3$, odnosno $x-2y = 25$. Iz ove dvije jednadžbe slijedi nova jednadžba, $4y+3-2y = 25$, pa $2y = 22$ i $y = 11$. Zbroj znamenaka dvoznamenkastog broja je 11, a traženi dvoznamenkasti broj je 47.

2. Neka brat sada ima a godina, a sestra sada b godina. Za 5 godina bit će $(a+5) : (b+5) = 7:5$, pri čemu je očito, $a+5=7k$, tj. $a=7k - 5$ i $b+5 = 5k$, tj. $b = 5k - 5$.
Jednu godinu prije brat je imao $a - 1 = 7k - 6$ godina, a sestra $b - 1 = 5k - 6$ godina, pa vrijedi $7k - 6 = 2(5k - 6)$, pa je rješenje $k - 2$. Brat sada ima 9 godina, a sestra 5 godina.

3. 1) Ako je $x - 2 \geqslant 0$, odnosno ako je $x \geqslant 2$ tada imamo nejednadžbu $x-2 < 2x+1$ sa skupom rješenja $x > -3$.
Iz $x > -3$ i $x \geqslant 2$ slijedi $x \geqslant 2$.
2) Ako je $x - 2 < 0$, odnosno $x < 2$ tada imamo nejednadžbu $-(x-2)$ $2x+1$ čiji je skup rješenja $x > 1/3$.
Iz $x > \frac{1}{3}$ i $x < 2$ slijedi $\frac{1}{3} < x < 2$. Načinimo uniju rješenja i dobivamo skup rješenja zadane jednadžbe $x > \frac{1}{3}$.

4.


c je najveća stranica trokuta ABC. Treba provjeriti istinitost ove tri nejednakosti.

$a + b < b + c$ (1)
$b < a + b + c$ (2)
$c < a + 2b$ (3)

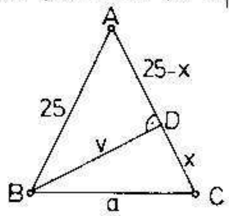
(1) Nejednakost $a < c$ dodamo lijevoj i desnoj strani b, pa je $a + b < b + c$.
(2) Kako u trokutu ABC vrijedi $b < a + c$, slijedi da je $b < a + b + c$.
(3) U trokutu ABC vrijedi $a + b > c$, pa je pogotovo i $a + b + b > c$, tj. $a + 2b > c$.

VIII RAZRED

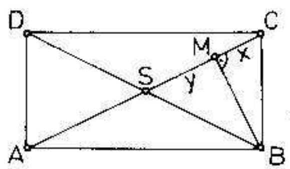
1. -10. 2. $-\frac{5}{8}$. 3. $-\frac{7}{3}$. 4. $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$. 5. 4.14.
6. $1 - a + \frac{1}{4}a^2$. 7. $(3-x)(3-x)$. 8. 1. 9. 0.24 dm.
10. $a = 5\sqrt{3}$ cm, $d = 10$ cm.

DRUGA SKUPINA ZADATAKA

1. Neka je tražena točka $T(x,y)$. Iz uvjeta slijedi da je $x = 0$, pa sistem ima oblik $(2m + 3)y = -6 - m$.
$(m - 1)y = 2 - m$.
Supstitucijom $y = \frac{2 - m}{m - 1}$ iz druge jednadžbe u prvu imamo jednadžbu $(2m + 3)\frac{2 - m}{m - 1} = -6 - m$, tj. $(2m + 3)(2 - m) = (-6 - m)(m - 1)$, uz uvjet da je $m \neq 1$. Rješavajući ovu jednadžbu dobijamo $6m - m^2 = 0$, tj. $m(6 - m) = 0$.
Vrijednost parametra je: $m_1 = 0$ i $m_2 = 6$.

2.


Iz opsega slijedi, $64 = a + 2(a + 11)$, pa je $3a = 42$. Osnovica $a = 14$ cm, a krak $b = 25$ cm. Neka je $|BD| = v$ tražena visina. Primjenimo li Pitagorin teorem na trokut BCD, odnosno ABD imamo jednadžbe:
$v^2 = a^2 - x^2$ i $v^2 = 25^2 - (25 - x)^2$ iz kojih slijedi jednadžba $25^2 - (25 - x)^2 = 14^2 - x^2$. Rješavajući ovu jednadžbu dobivamo $50x = 196$, pa je $x = \frac{98}{25}$ cm.
Dalje slijedi: $v^2 = 14^2 - x^2$, $v^2 = 14^2 - (\frac{98}{25})^2$,
$v^2 = 14^2(1 - \frac{49}{625})$, $v^2 = 14^2\frac{576}{625}$, pa je $v = \frac{336}{25}$ cm, odnosno $v = 13.44$ cm.

3.


Neka je $|MC| = x$ i $|MS| = y$.
Kako je $|AS| = |SC| = x + y$, slijedi da je
$(x+y+y) : x = 3 : 1$, pa je $3x = x+2y$, $2x = 2y$,
tj. $x = y$, tj. $|SM| = |MC|$

Dakle, $|BC| = |BS|$ (svojstvo visine jednakokračnog trokuta), a kako je $|SC| = |SB|$, to je i $|SC| = |SB| = |BC|$, pa je trokut BSC jednakostraničan. Slijedi da je $\measuredangle BSC = 60°$.

4. Označimo $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = a$
Nakon kvadriranja dobiva se
$$11 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{(11 + 6\sqrt{2})(11 - 6\sqrt{2})} + 11 - 6\sqrt{2} = a^2$$
Zatim $22 + 2\sqrt{11^2 - 36 \cdot 2} = a^2$,
$$22 + 2 \cdot 7 = a^2$$
$$36 = a^2$$
Zaključujemo da je a cijeli broj.

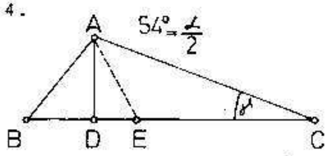
REPUBLIČKO NATJECANJE

VII RAZRED

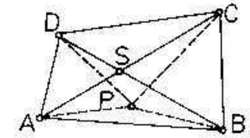
1. $\overline{abc}$ $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ba}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$
$(10a + b)+(10a + c)+(10b + a)+(10b + c)+(10c + a)+(10c + b) =$
$= 22(a + b + c)$. Polovica je $11(a + b + c)$.
$100a + 10b + c = 11(a + b + c)$, ili $89 \cdot a = 10c + b$.
Broj $10c + b$ je dvoznamenkast, pa je zato $a = 1$. To znači, $10c + b = 89$, pa je $c = 8$, $b = 9$, $\overline{abc} = 198$.

2. Zbrojimo jednadžbe:
$2 \cdot (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 2 \cdot 2982$
$\frac{1}{x} = 994$, $\frac{1}{y} = 993$, $\frac{1}{z} = 995$. $x = \frac{1}{994}$, $y = \frac{1}{993}$, $z = \frac{1}{995}$

3. Neka je a dulja stranica, b kraća. Broj koraka obrnuto je proporcionalan duljini koraka. Da bi prešao pola opsega brat učini m koraka, a za isti put sestra učini n koraka.
$\frac{m}{n} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$, $m + n = 270 + 290 = 560$. Rješenje ovog sustava je:
$m = 240$, $n = 320$, odatle ja $a + b = 192$.
Brat je u x koraka prešao dulju stranicu, a sestra u y koraka kraću stranicu. Zato imamo, $x \cdot 0.8 + y \cdot 0.6 = 192$
$x + y = 270$
$x = 150$, $y = 120$, $a = 150 \cdot 0.8 = 120$ m, $b = 120 \cdot 0.6 = 72$ m.
Površina vrta je $8640\ m^2$.

4.


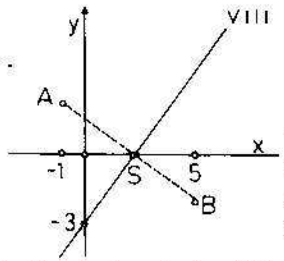
$\alpha' : \beta' : \gamma' = 9 : 16 : 20$
$\alpha' + \beta' + \gamma' = 9k + 16k + 20k = 45k = 360°$
Slijedi, $k = 8$, pa je
$\alpha' = 72°$, $\beta' = 128°$, $\gamma' = 160°$,
$\alpha = 108°$, $\beta = 52°$, $\gamma = 20°$.
$\measuredangle DAE = 90° - 74° = 16°$

5.


Uzmimo neku točku P različitu od S i spojimo je s vrhovima četverokuta.
$|AP|+|CP| > |AC|$ i $|BP| + |DP| > |BD|$.
Zbrojimo ove nejednakosti,

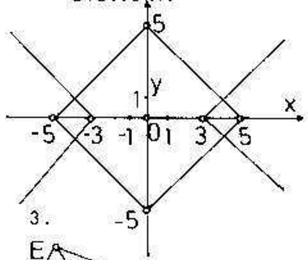
$$|AP| + |BP| + |CP| + |DP| > |AC| + |BD| = |AS| + |BS| + |CS|+|DS|.$$

VIII RAZRED

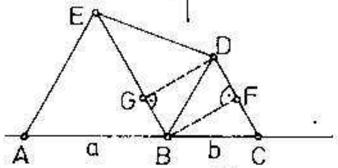
1.


Koeficijent smjera pravca $3x - 2y - 6 = 0$ jednak je $a = \frac{3}{2}$. Koeficijent smjera okomice na taj pravac jednak je $-\frac{2}{3}$.
Jednadžba okomice točkom B glasi
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. Sjecište S ima koordinate S (2,0). Točka A(-1,2).

2. Zbrajanjem jednadžbi dobijamo $2|x| = 8$, $|x| = 4$, a oduzimanjem $|y| = 1$. Rješenja su $(4,1)$, $(-4,1)$, $(-4,-1)$, $(4,-1)$.

Grafički:


I kvadrant $x > 0$, $y > 0$ imamo pravce
$x - y = 3$ i $x + y = 5$.
II kvadrant $x < 0$, $y > 0$ i pravce
$-x - y = 3$ i $-x + y = 5$
III kvadrant $x < 0$, $y < 0$ i pravce
$-x + y = 3$ i $-x - y = 5$.
IV kvadrant $x > 0$, $y < 0$ i pravce
$x + y = 3$ i $x - y = 5$.

3.


$P(ABE) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $P(BCD) = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. DG je je visina trokuta BDE i $|DG|=|BF| = \frac{b \cdot \sqrt{3}}{2}$.
$P(BDE) = \frac{1}{2}|BE| \cdot |DG| = \frac{1}{2} a \frac{b \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{ab \cdot \sqrt{3}}{4}$
$P = (a^2 + ab + b^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$

4. $a + b \leq c\sqrt{2}/2$, $a^2+2ab + b^2 \leq 2c^2$, $2ab \leq c^2$, $0 \leq (a - b)^2$.

5. Uzmimo da su to brojevi $k+1$, $k+2$, ... , $n-1$, n. Tada je $\frac{(n+1)\,n}{2} - \frac{(k+1)\,k}{2} = 1000$, ili $n^2 + n - k^2 - k = 2000$, $(n + k + 1)(n - k) = 2^4 \cdot 5^3$. Brojevi $n+k+1$ i $n-k$ su suprotne parnosti (zbroj im je neparan) i još je $n + k + 1 > n - k$.

Imamo ove mogućnosti:

1. Iz $n + k + 1 = 2000$ i $n - k = 1$ slijedi $n = 1000$
2. Iz $n+k+1 = 400$ i $n-k = 5 \Rightarrow n = 202$, pa je 198,...,201,202.
3. Iz $n+k+1 = 80$ i $n-k = 25 \Rightarrow n = 52$, pa je 28,29,...,52
4. Iz $n+k+1 = 125$ i $n-k = 16 \Rightarrow n = 70$, pa je 54,55,..., 70.

SR SRBIJA

DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE
REPUBLIČKA KOMISIJA ZA MLADE MATEMATIČARE IZ OSNOVNIH ŠKOLA

OPŠTINSKO TAKMIČENJE

13. 03. 1988.

IV RAZRED

1. Zbir tri prirodna broja iznosi 440. Prvi od njih je dva puta manji od drugog, a sedam puta veći od trećeg. O kojim brojevima je reč?

2. Vlada, Nada i Jagoda su bili u kupovini. Vlada i Nada su potrošili 1988 dinara, Vlada i Jagoda 2980 dinara, a Jagoda i Nada 3988 dinara. Koliko dinara je potrošio svako od njih?

3. Data su dva jednaka kvadrata, koji imaju površinu 100 cm^2. Ako stranicu jednog povećamo za 2 cm, a obim drugoga uvećamo za 16 cm, koji kvadrat će posle ovih izmena imati veću površinu?

4. Koliko ima petocifrenih brojeva kod kojih je proizvod cifara jednak 4?

5. Konstruisati magični kvadrat 3 x 3, tako da je karakterističan zbir magičnog kvadrata jednak 21.

V RAZRED

1. Dat je skup A koga čine svi delioci broja 6. Odrediti skup B u koji funkcija $f(x) = 2x + 1988$ preslikava skup A. Traženo preslikavanje prikazati dijagramom.

2. Razlika dva uporedna ugla je 4/7 većeg ugla. Odrediti tražene uporedne uglove.

3. Vlada i Laza medjusobno podele 816 dinara. Kada Vlada potroši 3/5 svoga dela, a Laza 3/7 svoga dela, ostanu im jednake sume novca. Koliko novca je dobio svako od njih pri podeli?

4. Dušan, učenik osnovne škole množio je na svom računaru sledeće brojeve: broj svojih godina, broj razreda u koji ide, broj godina svoje majke i još jedan trocifren prirodni broj. Krajnji rezultat je bio 333 333. Koliko godina ima Dušan, a koliko njegova majka?

5. U prazne kvadratiće upisati brojeve tako da zbir brojeva u svaka tri susedna kvadrata iznosi 15.

5							6		

VI RAZRED

1. Putnički voz prelazi razdaljinu izmedju mesta A i B za 6 sati, teretni za 10 sati. Ako vozovi krenu istovremeno, jedan iz A, a drugi iz B jedan drugom u susret, posle kog vremena će se sresti?

2. Dat je razlomak 1988/1987. Koji broj treba oduzeti od brojioca dodati imeniocu da bi se posle skraćivanja dobio razlomak 2/3.

3. U jednakokrakom trouglu ABC (AC = BC) simetrala ∡ BAC i visina AD koja odgovara kraku seku se pod uglom od 15^o. Odrediti uglove trougla ABC.

4. Na kracima oštrog ugla xOy date su tačke A i B tako da je OA = = OB. Ako je M proizvoljna tačka simetrale ugla xOy onda je MA = MB. Dokazati.

5. U jednoj opštini na opštinskom takmičenju mladih matematičara u IV, V, VI, VII i VIII razredu učestvuje 1988 učenika rodjenih 1973, 1974, 1975, 1976, i 1977 godine. Dokazati da postoje bar dva takmičara koji su rodjeni istoga dana i iste godine. Dokazati da bar 6 takmičara slavi rodjendan istoga dana.

VII RAZRED

1. Racionalan broj 0,12121212... napisati u obliku razlomka.

2. Dati su kvadrati čije su stranice 1 cm, 2 cm i 3 cm. Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka zbiru površina datih kvadrata.

3. Izračunati obim i površinu pravouglog trapeza ABCD sa pravim uglom kod temena A, ako je njegova kraća dijagonala AC= 5 duži krak BC= 6 cm i ako je oštar ugao trapeza ∡ ABC = 30^o.

4. Odrediti cele brojeve x i y koji zadovoljavaju sledeću jednačinu $xy - 2x = 5y - 7$.

5. U magacinu je bilo 1000 kg jagoda koje sadrže 92% vode. Posle izvesnog vremena količina vode se smanjila na 90%. Kolika je težina jagoda sada?

VIII RAZRED

1. Data je funkcija $f(x)$ tako da je $3f(x-2) + f(2x-4) = x^2 + 1988$. Izračunati $f(0)$.

2. Neka su a i b stranice, a d_1 i d_2 dijagonale paralelograma. Dokazati da je $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

3. Za koje vrednosti realnih brojeva x, y i z je zadovoljena jednačina: $16x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 8x + 6y + 4z - 3$.

4. Dat je jedankokraki trougao ABC i tačka M na osnovici AB. Prava n koja sadrži tačku M normalna je na osnovicu AB i seče krak BC u tački N, a produžetak kraka AC u tački P. Dokazati da je MN + MP konstantna veličina koja ne zavisi od položaja tačke M.

5. Kako pomoću sudova od 3 litra i 5 litara u sud od 8 litara sipati sa česme tačno 7 litara vode?

MEDJUOPŠTINSKO TAKMIČENJE

IV RAZRED

1. Ako se za 120 kg sena 5 ovaca može hraniti 8 dana, koliko je sena potrebno da se stado od 80 ovaca hrani 15 dana?

2. Trgovac je pomešao izvesnu količinu belog pasulja po ceni od 1000 dinara i 100 kg pasulja po ceni od 600 dinara. Koliko je bilo pasulja od 1000 dinara, ako je 1 kg mešavine prodan po ceni od 750 dinara?

3. Površina kocke jednaka je površini pravougaonika čije su stranice 12 cm i 8 cm. Kolika je zapremina te kocke?

4. Dešifruj sledeće sabiranje ako znaš da jednakim slovima odgovaraju jednaki brojevi i obrnuto-različitim slovima odgovaraju različiti brojevi.

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,C \\ +\;C\,C\,B\,A \\ \hline A\,D\,C\,E\,B \end{array}$$

5. U jednoj školi od 120 učenika na takmičenju iz matematike učestvovalo je 83 učenika, a na takmičenju iz recitovanja 56 učenika IV razreda. Koliko učenika je učestvovalo i u jednom i u drugom takmičenju, ako se zna da 13 učenika nije učestvovalo ni u jednom takmičenju?

V RAZRED

1. Odrediti najveći prirodan broj koji zadovoljava sledeći uslov: pri deljenju brojeva 1988 i 30756 tim brojem dobija se jednak ostatak - broj 4.

2. Kroz jednu cev bazen se napuni vodom za 8 sati, kroz drugu za 10 i kroz treću za 12 sati. Dokazati da ako sve tri cevi ubacuju u bazen vodu istovremeno, onda se za 1 sat napuni više od četvrtine, a manje od trećine bazena.

3. Date su tačke A i B i prava p, paralelna sa duži AB. Konstruisati krug koji prolazi kroz A i B i dodiruje datu pravu p.

4. Date su tri nekolinearne tačke A, B, C. Konstruisati pravu p u toj ravni, tako da su rastojanja tačaka A, B i C od prave p medjusobno jednaka. Koliko takvih pravih ima?

5. Kako pomoću sudova od 3 litra i 5 litara u kantu od 20 l sa česme sipati tačno: a) 1 litar vode b) 7 litara vode?

VI RAZRED

1. Tri druga treba da podele 7777 dinara. Koliko će svako od njih dobiti ako dve petine Jovine sume iznosi kao Mikina suma, a sedam devetina Mikine sume jednako je Siminoj sumi?

2. Dat je pravougaonik ABCD ($AB > BC$). Normala iz temena B na dijagonalu AC, seče dijagonalu AC u tački E tako da je duž AE tri puta veća od duži CE. Odrediti pod kojim uglom se seku dijagonale pravougaonika.

3. Dokazati da je broj $2^{1988} - 1$ deljiv sa 5.

4. Konstruisati trougao ABC ako su dati sledeći elementi: visina $CC' = h_c = 3$ cm, težišna duž $CC_1 = t_c = 4$ cm i poluprečnik kruga opisanog oko trougla $R = 3$ cm.

5. Ako je p prost broj onda je:
a) $p^3 + 1987$ složen broj.
b) $p^{1987} + 1987$ složen broj. Dokazati.

VII RAZRED

1. Dat je broj $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{1988}$. Dokazati da je broj A deljiv sa 30.

2. Dokazati da je zbir kvadrata bilo kojih pet uzastopnih celih brojeva deljiv sa 5, a nije deljiv sa 25.

3. U pravouglom trouglu jedan oštar ugao je tri puta veći od drugoga. Izračunati površinu tog trougla, ako je hipotenuza $c = 8$ cm.

4. Poluprečnik kruga opisanog oko pravilnog dvanaestougla je $R = 12$ cm. Izračunati površinu tog dvanaestougla.

5. Učesnici matematičkih takmičenja registruju se u Istraživačkoj stanici Petnica na osnovu šifre koja sadrži: razred učesnika,

inicijale učesnika i četvorocifren identifikacioni broj učenika (na primer jedna od mogućih šifri je: 7VA1988). Koliko se najviše učenika može registrovati na ovaj način, ako je oznaka za IV razred osnovne škole 1, V razred 2, ..., I razred srednje škole 6, ... , IV razred srednje škole 9 i ako dva razna učesnika imaju različite šifre.

VIII RAZRED

1. Dva druga Voja i Laza krenu istovremeno iz Valjeva i Šapca jedan drugome u susret brzinom od 6 km/h. Istovremeno sa Vojine kose poleće ka Lazi muva brzinom od 50 km/h i kada dodje do Laze odmah se vraća ka Voji. Postupak se nastavlja sve do njihovog susreta. Koliko kilometara je prešla muva, ako je rastojanje Valjevo–Šabac iznosi 66 km.

2. U trouglu ABC stranice su: $a = 12$ cm i $b = 6$ cm, a ugao zahvaćen datim stranicama je 120°. Ako simetrala datog ugla ACB seče stranicu AB u tački D, odrediti dužinu duži CD.

3. Ako su a, b, c realni brojevi takvi da je $a+b+c = 0$ i $abc = 1988$ onda je $a(a+b)(a+c) = 1988$. Dokazati.

4. U jednakokrakom trouglu ABC ($AC = BC$) ugao pri vrhu jednak je 108°. Dokazati da je simetrala ugla na osnovici AE dva puta veća od visine CD.

5. Prirodan broj n ima tačno 3 delioca (računajući u ta tri delioca i 1 i n). Dokazati da je $\sqrt{n}$ takodje prirodan broj.

REPUBLIČKO TAKMIČENJE

Smederevo, 07. 05. 1988.

VI RAZRED

1. Koliko litara čiste destilisane vode treba pomešati sa 120 litara 10% (desetoprocentnog) rastvora alkohola, da bi se razblaživanjem dobio 4% (četvoroprocentni) rastvor alkohola?

2. U trouglu ABC ($BC > AC$) uglovi α i β razlikuju se za 30°. Ako je D tačka na stranici BC, takva da je $AC = CD$ izračunati $\measuredangle BAD$.

3. Dokazati da je broj $1^{1988} + 2^{1988} + 3^{1988} + 4^{1988} + 5^{1988} + 6^{1988}$ deljiv sa 5, a nije deljiv sa 10.

4. Date su tri nekolinearne tačke A, C i E. Konstruisati pravougaonik ABCD, ako su A i C njegova temena, a E tačka na dijagonali BD.

5. Brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 rasporediti u temena kocke tako da je zbir brojeva na svakoj strani kocke medjusobno jednak.

VII RAZRED

1. Danas Dragan slavi rodjendan i navršava onoliko godina, koliko iznosi zbir cifara godine njegovog rodjenja. Kog datuma je Dragan rodjen, ako se zna da je on rodjen u XX veku?

2. Konstruisati jednakokraki trougao ako je visina koja odgovara osnovici 3 cm, a visina koja odgovara kraku 4 cm.

3. Za koje vrednosti x, y i z važi jednakost: $x^{1988} + y^6 + z^4 + 146 = 2x^{994} + 16y^3 + 18z^2$.

4. Neka je D tačka u kojoj krug upisan u pravougli trougao ABC dodiruje hipotenuzu AB. Dokazati da tada važi jednakost: $AC \cdot BC = 2 \cdot AD \cdot BD$.

5. Dat je kvadrat čija je stranica 46 cm. Podeliti dati kvadrat na 1988 manjih kvadrata čije su stranice celobrojne.

VIII RAZRED

1. Odrediti sve realne brojeve koji zadovoljavaju sledeći sistem jednačina: $|x| + |y| = 1988$, $y - x = 2$.

2. Marija čita knjigu koja ima 480 stranica i pročita je za odredjeni broj dana, pri čemu svakoga dana čita jednak broj stranica. Da je Marija svakoga dana čitala po 16 stranica više, knjigu bi pročitala 5 dana ranije. Za koliko dana je Marija pročitala knjigu?

3. Neka su a i b katete, c hipotenuza i h visina koja odgovara hipotenuzi u pravouglom trouglu. Dokazati da je trougao čije su stranice $a+b$, h i $c+h$ takodje pravougli.

4. Da li postoji trougao čije su visine: 2 cm, 3 cm i 4 cm? Odgovor obavezno obrazložiti!

5. Data je kocka čija je ivica 13 cm. Podeliti datu kocku na 1988 manjih kocki čije su stranice celobrojne.

R E Š E N J A

OPŠTINSKO TAKMIČENJE

IV RAZRED

1. Neka je treći broj x. Tada je prvi broj 7 puta veći i iznosi 7x, a drugi broj dva puta veći od prvog i iznosi 14x. Kako je zbir ta tri broja $7x+x+14x = 22x = 440$ to je $x = 20$. Traženi brojevi su $7x = 140$, $14x = 200$ i $x = 20$.

2. Ako saberemo sve sume, onda dobijamo dvostruku sumu koju su zajedno potrošili Vlada, Nada i Jagoda. Dakle $1988 + 2988 + 3988 = 8964$, pa su svi troje zajedno potrošili $8964 : 2 = 4482$ dinara. Kako su Vlada i Nada potrošili 1988, to je Jagoda potrošila $4482 - 1988 = 2494$ dinara. Slično Nada je potrošila $4482 - 2988 = 1494$ dinara i Vlada je potrošio $4482 - 3988 = 494$ dinara.

3. Stranice datih kvadrata iznose po 10 cm, a obim je 40 cm. Kada prvu uvećamo za 2 cm, ona će iznositi 12 cm, a površina kvadrata je $12 \cdot 12 = 144\ cm^2$. Kako je obim drugoga 40 cm i uvećamo ga za 16 cm, on će biti 56 cm, a stranica će biti $56 : 4 = 14$ cm. Njegova površina je $14 \cdot 14 = 196\ cm^2$. Dakle površina drugog je veća.

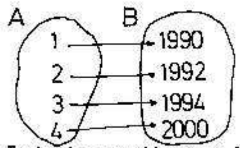
4. Ako je proizvod cifara 4 u obzir dolaze sledeće kombinacije: 1,1,1,1,4 i 1,1,1,2,2. Petocifreni brojevi sa ovim ciframa su: 11114, 11141, 11411, 14111, 41111; 11122, 11212, 11221, 12112, 12121, 12211, 21112, 21121, 21211, 22111. Takvih brojeva ima 15.

5. Jedno od mogućih rešenja dato je na slici. Dato rešenje je dobijeno tako što je svakom broju u osnovnom magičnom kvadratu dodan broj 2.

4	9	8
11	7	3
6	5	10

V RAZRED

1. Skup A čine brojevi 1,2,3,6. Kako je $f(1) = 1990$, $f(2) = 1992$, $f(3) = 1994$ i $f(6) = 2000$. Prema tome skup B čine brojevi: 1990, 1992, 1994 i 2000.



2. Neka je x veći od traženih uglova. Tada je manji ugao $180^\circ - x$, pa je $x - (180^\circ - x) = 4/7\, x$. Rešavanjem dobijene jednačine dobijamo da je veći ugao $x = 126^\circ$, a drugi ugao $180^\circ - x = 54^\circ$.

3. Kada Vlada potroši 3/5 svoga dela ostane mu 2/5 ili 4/10 dela. Slično, kada Laza potroši 3/7 svoga dela ostane mu 4/7 njego-

vog dela. Kako su te sume jednake očigledno je Vlada dobio 10 delova sume, a Laza 7 delova. Jedan taj deo iznosi $816 : 17 = 48$ dinara, pa je Vlada imao $10 \cdot 48 = 480$ dinara, a Laza $7 \cdot 48 = 336$ dinara.

4. Kako je $333\,333 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ i kako je Dušan učenik osnovne škole on može biti samo III ili VII razred (jer su ostali činioci broja 333333 veći od 8). Ako je Dušan učenik III razreda, onda on može imati 9 ili 10 godina, pa ta mogućnost otpada. Ako je VII razred, onda on ima 13 godina, majka ima $3 \cdot 11 = 33$ godine, a trocifreni broj je $3 \cdot 37 = 111$.

5. Neka su broju 5 susedni brojevi a i b. Tada je $5+a+b = 15$. Tada naša šema ima sledeći izgled:

5	a	b	5	a	b	5	a	b	5

Očigledno je $a=6$, pa je $b=4$. Tako dobijamo konačno rešenje:

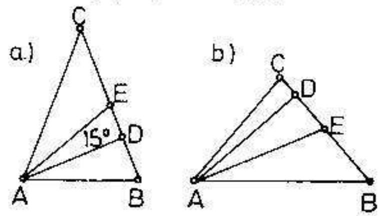
5	6	4	5	6	4	5	6	4	5

VI RAZRED

1. Putnički voz za jedan sat pređe 1/6, a teretni 1/10 rastojanja između A i B. Zajedno pređu $1/6 + 1/10 = 4/15$ rastojanja. Kako do susreta vozovi zajedno pređu celo rastojanje od A do B za to će im trebati $1 : 4/15 = 1 \cdot 15/4$ sati ili 3 sata i 45 minuta.

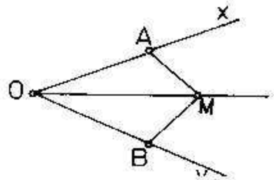
2. Neka je traženi broj x. Tada je $(1988-x):(1987+x) = 2:3$ ili $(1988-x) \cdot 3 = (1987+x) \cdot 2$. Rešavanjem dobijene jednačine $5964 - 3x = 3974 + 2x$ dobijamo da je $5x = 1990$, pa je $x = 390$.

3. a) $\measuredangle C < 60^\circ$ neka je E podnožje simetrale, a D podnožje visine i neka je ugao $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 2x$. Tada je $\measuredangle BAE = x$. Kako je $\measuredangle DAE = 15^\circ$ i kako je $\measuredangle ADE$ prav, to je $\measuredangle AEB = 75^\circ$. Tada je $\measuredangle ABE + \measuredangle BAE = 2x+x = 3x = 105^\circ$, pa je $x = 35^\circ$. Dakle, $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 70^\circ$ i $\measuredangle ACB = 40^\circ$.



b) Za $\measuredangle C > 60^\circ$ rešavamo identično. Dakle $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 50^\circ$.

4. Trouglovi OAM i OBM su podudarni: OA=BO (po pretpostavci), $\measuredangle AOM = \measuredangle BOM$ (jer je OM simetrala ugla) i OM = OM. Iz podudarnosti je MA = MB.

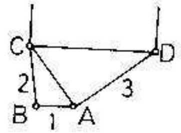


5. Godine 1973,1974,1975,1976 i 1977 sadrže ukupno 365 + + 365 + 365 + 366 + 365 = 1826 dana. Kako je na takmičenju učestvovalo 1988 takmičara to su bar dva takmičara rodjena istoga dana.
Ako se takmičare po datumu rodjenja podelimo u 366 klasa onda zbog 1988:366 = 5 (158), na osnovu Dirihleovog principa, postoji bar jedna klasa u kojoj ima 6 takmičara, što znači da bar 6 takmičara slavi rodjendan istoga dana.

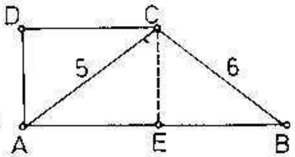
VII RAZRED

1. Neka je $0{,}12121212\ldots = x$. Tada je $100x = 12{,}12121212\ldots$ Kako je $100x - x = 99x = 12.12121212\ldots - 0{,}12121212\ldots = 12$, to je $x = 12/99 = 4/33$.

2. Površina traženog kvadrata je $P = 1+4+9 = 14$ cm². Konstrukcija je data na slici, a dokaz je sledeći. Kako je $AB=1$ i $BC=2$, to je $AC = \sqrt{5}$. Slično, $CD^2 = AC^2 + AD^2 = 5 + 9 = 14$.



3. Kako je $BC=6$ cm i $\measuredangle ABC=30^\circ$ to je $CE = AD=3$ cm i $BE = 3\sqrt{3}$ cm. Tada je $AE^2 = AC^2 - CE^2 = 25 - 9 = 16$, pa je $AE = CD = 4$ cm. Obim trapeza je $17+3\sqrt{3}$ cm, a površina $12+9\sqrt{3}/2$ cm².



4. Iz jednačine $xy-2x = 5y - 7$ dobijamo da je $x(y-2) = 5(y-2)+3$, odnosno $x(y-2) - 5(y-2) = 3$, pa je $(y-2)(x-5) = 3$. Kako je $3 = 3\cdot 1 = (-3)\cdot(-1)$, to su mogući sledeći slučajevi: $x-5 \in \{-3,-1,1,3\}$; $y-2 \in \{-1,-3,3,1\}$. Dakle $x \in \{2,4,6,8\}$; $y \in \{1,-1,5,3\}$. Rešenja date jednačine su uredjeni parovi: $(x,y) \in \{(2,1);(4,-1);(6,5);(8,3)\}$.

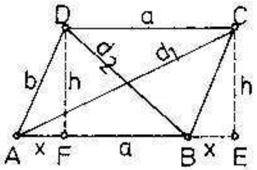
5. Kako 1000 kg svežih jagoda sadrži 92% vode, to je 920 kg vode i 80 kg suve materije. Kada voda delimično ispari ostane 90% vode i 100−90 = 10 % suve materije, što opet iznosi 80 kg. Prema tome 1% težine jagoda je 8 kg, a 100% ima masu 800 kg.

VIII RAZRED

1. Za $x = 2$ data relacija postaje $3f(0) + f(0) = 4 + 1988 = 1992$ ili $4f(0) = 1992$, pa je $f(0) = 498$.

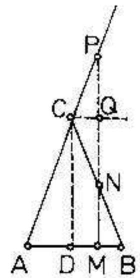
2. Neka su visine $CE=DF=h$, a odsečci $AF=BE=x$. Tada je $h^2 = b^2-x^2$; $d_1^2 = (a+x)^2 + h^2 = a^2+2ax+x^2+b^2-x^2 =$

$a^2 + b^2 + 2ax$;
$d_2^2 = (a-x)^2 + h^2 = a^2-2ax+x^2+b^2-x^2 = a^2 + b^2 - 2ax$.
Dakle, $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ax + a^2 + b^2 - 2ax = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$.



3. Data jednačina ekvivalentna je sledećim jednačinama: $16x^2 - 8x + 1 + 9y^2 - 6y + 1 + 4z^2 - 4z + 1 = 0 \iff (4x-1)^2 + (3y-1)^2 + (2y - 1)^2 = 0$. Kako je zbir kvadrata jednak 0 ako i samo ako je svaki od sabiraka 0, to mora biti $4x-1 = 3y-1 = 2z-1 = 0$, pa je $x=1/4$, $y= 1/3$, $z= 1/2$ jedino rešenje date jednačine.

4. Neka je CD visina trougla ABC, a tačka Q središte duži NP. Kako je trougao CNP jednakokrak (dokazati da je $\measuredangle CNP = \measuredangle CPN$), to je CQ simetrala duži NP, pa je CQ normalno na MP. Tada je $CDMQ$ pravougaonik, pa je $CD = MQ = h$. Kako je $MN + MP = MN+ MN+ NQ+QC = 2\cdot MN + NQ+ NQ = 2(MN+ NQ) = 2\cdot MQ = 2h$, to je $MN + MP$ konstantna veličina jednaka dvostrukoj visini i ne zavisi od položaja tačke M.



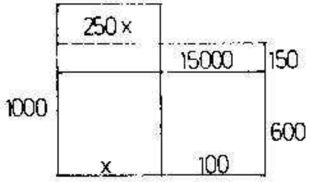
5. Najpre, u sud od 8 litara sipamo 5 litara vode. Zatim još jedanput napunimo sud od 5 litara i iz njega odlijemo u sud od 3 litra vodu. U sudu će tada ostati 2 litra vode. Kada u sud od 8 litara dospemo 2 litra vode u njemu će tada biti 5+2 = 7 litara.

MEDJUOPŠTINSKO TAKMIČENJE

IV RAZRED

1. Pet ovaca za 8 dana pojede 40 porcija. Jedna porcija iznosi $120 : 40 = 3$ kg. To znači da će za 80 ovaca u toku 15 dana trebati $80 \cdot 15 \cdot 3 = 3600$ kg sena.

2. Neka je pasulja od 1000 dinara bilo x kilograma. Tada je $1000x+100\cdot 600=(x+100)\cdot 750$, ili $1000x+60000=750x+75000$. Prema tome, $250x = 15000$, a $x = 15000 : 250 = 60$ kg.

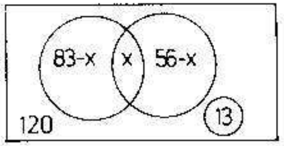


Zadatak se može rešiti metodom pravougaonika. Ukupna cena pasulja je $1000x + 100 \cdot 60$ ili $(x+100) \cdot 750$. Izjednačavanjem površina dobijamo $250x = 15000$ ili $x = 60$ kg.

3. Površina pravougaonika je $12 \cdot 8 = 96\ cm^2$. Dakle i površina kocke je $6a^2 = 96$ ili $a \cdot a = 96/6 = 16\ cm^2$. Jasno je da je $a = 4cm$, a zapremina V kocke iznosi: $V = a \cdot a \cdot a = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64\ cm^3$.

4. Zbir dva četvorocifrena broja je uvek manji od 20000, pa je A=1. Ako je A=1, C mora biti 8 ili 9, jer samo u tom slučaju dobijamo zbir veći od 10000. Ako bi C bio 9, onda je B=0 (1+9=10), ali bi tada i E (C+B=9+0+1=10) bio 0 što nije moguće. Dakle, C=8, pa je C+A=8+1=9=B. Tada je B+C=9+8=17, pa je E=7. Znači, tražena jednakost je 1988+8891=10879.

5. Zadatak rešavamo pomoću Venovog dijagrama. Ukupan broj takmičara je 120−13=107. Iz matematike se takmičilo 83−x, iz recitovanja 56−x, a iz obe oblasti x, pa je 83−x+56+x=107, ili 139−x=107, x=139−107=32. Dakle, 32 učenika je učestvovalo na oba takmičenja.

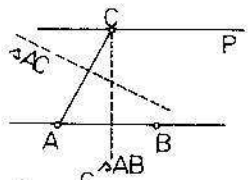


V RAZRED

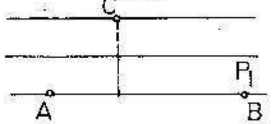
1. Zadatak se svodi na određivanje NZD za brojeve 1988−4=1984 i 30756−4=30752. Kako je $1984 = 31 \cdot 2^6$, a $30752 = 31^2 \cdot 2^5$ to je traženi broj $31 \cdot 2^5 = 31 \cdot 32 = 992$.

2. Za jedan sat napuni se 1/8 + 1/10 + 1/12 = 37/120 delova bazena. Kako je 1/4 = 30/120 < 37/120 < 40/120 = 1/3 to je tvrđenje dokazano.

3. Centar traženog kruga pripada simetrali duži AB. Dodirna tačka C je presek s_{AB} i prave p. Centar S kruga pripada i simetrali duži AC. Dakle $\{S\} = s_{AB} \cap s_{AC}$.



4. Ako konstruišemo pravu AB onda se problem svodi na konstrukciju prave koja je podjednako udaljena od prave AB i tačke C, a to

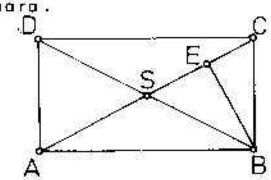


je simetrala rastojanja tačke C od prave AB. Prava p_1 je samo jedno od tri moguća rešenja jer se konstrukcija može izvesti i sa pravama BC i CA.

5. a) Kako je $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$, to se jedan litar dobija kada dva puta sipamo po 5l i odaspemo tri puta po 3l.
b) Slično 7l dobijamo sipanjem dva puta po 5l i odasipanjem 3l.

VI RAZRED

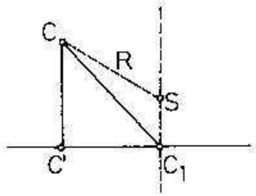
1. Neka je Jova dobio sumu od 45x. Tada je Mika dobio 2/5. 45x = 18x, a Sima 7/9 · 18x = 14x. Ukupna suma je 45x + 18x + + 14x = 77x = 7777, dakle x=7777:77=101, pa je Jova imao 4545, Mika 1818, a Sima 1414 dinara.



2. Neka je CE=x. Tada je AE=3x, a AC=4x. Duži AS=BS=CS=2x. Znači da je SE=CS−ES = 2x−x=x. Trougao BES je pravougli i SE=x, a BS=2x, pa je $\measuredangle BSE = \measuredangle BSC = 60^\circ$.

3. Broj $2^{1988} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2 \cdot 2 \cdot 2$ gde imamo 1988 dvojki. $2^{1988} = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2) \ldots (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ gde imamo 497 grupa po četiri dvojke. Dakle $2^{1988} = 16 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 16$. Poslednja cifra ovog proizvoda je 6. Znači da se $2^{1988} - 1$ završava cifrom 6−1=5. Dakle, broj $2^{1988} - 1$ je deljiv sa 5.

4. Najpre se konstruiše pomoćni pravougli $\Delta CC'C_1$ u kome su poznati sledeći elementi: $CC' = h_c = 3cm$ $CC_1 = t_c = 4cm$. Centar S kruga opisanog oko trougla ABC nalazi se na simetrali duži AB. Kako s_{AB} prolazi kroz C_1 to je s_{AB} normalno na CC_1. S druge strane rastojanje CS = R = 3 cm.



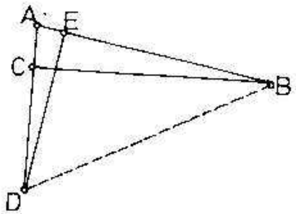
5. a) Ako je p=2, onda je $p^3 + 1987 = 2^3 + 1987 = 1995$. Ako je $p > 3$ onda je p neparan broj pa je i p^3 neparan. Tada je $p^3 + 1987$ paran, dakle i složen broj.
b) Ako je p=2, onda je $2^{1987} = 2^{1988}/2$ i završava se ciform 8 ($2^{1987} = 2^{1984} \cdot 2^3 = \ldots 6 \cdot 8 = \ldots 8$). Kako je $\ldots 8 + 1987 = \ldots 5$ to je dobijeni broj deljiv sa 5, pa je složen.
Ako je $p > 3$ onda je dokaz identičan kao za $p^3 + 1987$.

VII RAZRED

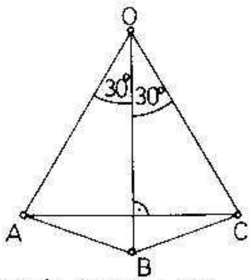
1. Kako je $A = 2+2^2+\dots+2^{1988}$. To je $A = 2(1+2+2^2+2^3) + 2^5(1+2+4+8)+\dots+2^{1985}(1+2+4+8)$. Dakle $A=2 \cdot 15+2^5 \cdot 15+\dots 2^{1985} \cdot 15=30(1+2^4+\dots+2^{1984})$ to je tvrdjenje očigledno.

2. Neka su traženi brojevi $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Tada je $(n-2)^2+(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$, pa je zbir očigledno deljiv sa 5. Kako se n^2 završava ciframa 0, 1, 4, 5, 6, 9 to se n^2+2 završava ciframa 2, 3, 6, 7, 8, 1. Znači da n^2+2 nikada nije deljiv sa 5 pa ni $5(n^2+2)$ nije deljiv sa 25.

3. Uglovi datog pravouglog trougla ABC su $67{,}5^\circ$ i $22{,}5^\circ$. Ako trougao ABC dopunimo njemu podudarnim trouglom BCD dobijamo jednakokraki trougao ABD u kome je $AB=BD=8$ cm, a $ABD=2 \cdot \measuredangle ABC=2 \cdot 22{,}5^\circ=45^\circ$.
Površina trougla ABD jednaka je $P_{\Delta ABD}=2P_{\Delta ABC}=(AB \cdot DE):2=4DE$.
Kako je trougao BDE jednakokrako pravougli, to je $BE=DE=8\sqrt{2}/2=4\sqrt{2}$.
$P_{\Delta ABD} = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$, a
$P_{\Delta ABC}= 8\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.



4. Na slici su data dva karakteristična trougla pravilnog dvanaestougla.
Kako je $OA=OB=OC=12$ cm i kako je $\measuredangle AOB=\measuredangle BOC=30^\circ$ to je $\measuredangle AOC=60^\circ$, pa je AOC jednakostraničan, tj. i $AC = 12$ cm.
$P_{12} = 6 \cdot P_{ABCO} = 6 \cdot 12 \cdot 12/2 = 3 \cdot 144 = 432\ \text{cm}^2$.

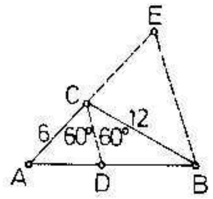


5. Za razred imamo 9 mogućnosti, za inicijale $30 \cdot 30 = 900$ mogućnosti i za identifikacioni broj 9000 mogućnosti. Dakle, ukupan broj šifri je $9 \cdot 900 \cdot 9000 = 72900000=72\,900\,000$.

VIII RAZRED

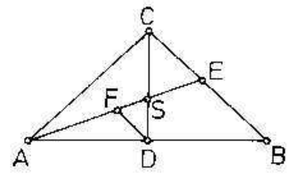
1. Kako Voja i Laza idu brzinom od 6 km/h do njihovog susreta će proteći $66:12=5{,}5$ sati. Za to vreme muva će stalnim kretanjem preći $50 \cdot 5{,}5=275$ km.

2. Neka je $BE \parallel CD$. Tada je $\measuredangle BCE=60^\circ$ (kao spoljašnji ugao $\measuredangle ABC$), a ugao $\measuredangle AEB = 60^\circ$ (kao s paralelnim kracima $CD \parallel BE$).
Tada je ΔBCE jednakostranični, pa je $BC=CE=BE=12$. Tada je $AC:CD=AE:BE$ (po Talesovoj teoremi). Dakle $6:CD=18:12$ ili $CD=(6 \cdot 12)/18= 4$ cm



3. Ako je $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$ i $a + c = -b$, pa je $a(a+b)(a+c) = a(-c)(-b)=abc=1988$.

4. Neka je $FD \parallel BC$. Tada je FD srednja linija ΔABE, jer je $AD=DB$ i $FD \parallel BC$, pa je $AF=FE=1/2AE$.
Kako je $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD = 54^\circ$ i kako je $\measuredangle BAE = \measuredangle CAE = 18^\circ$ to je $\measuredangle CES = 180^\circ - 108^\circ - 18^\circ = 54^\circ$. Dakle ΔCES je jednakokraki, pa je $CS = ES$.
Uglovi $\measuredangle SFD = \measuredangle SEC$ (kao uglovi s paralelnim kracima) i $\measuredangle SDF = \measuredangle SCE = 54^\circ$, pa je i trougao ΔFSD jednakokrak. Dakle, $SF=SD$.
Konačno je $CD = CS + SD = SE + SF = FE = 1/2AE$.



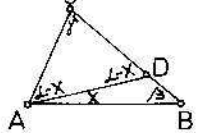
5. Tačno tri delioca imaju samo kvadrati prostih brojeva, jer ako je $n=p^2$ njegovi delioci su samo 1, p, i p^2. Tada je očigledno $\sqrt{n} = \sqrt{p^2} = p$ takodje prirodan broj.

REPUBLIČKO TAKMIČENJE

VI RAZRED

1. U 120 litara 10% alkohola imamo 12 litara čistog alkohola i 108 litara vode. Neka je dosuto x litara vode. Tada je 12 l alkohola i $120+x$ litara smese, pa je $12 : (x + 120) = 0{,}04 = 1/25$ ili $12 \cdot 25 = x + 120$. Dakle, $x = 300 - 120 = 180$ litara.

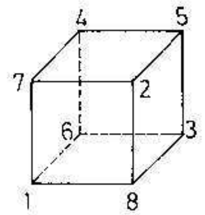
2. Neka je $\measuredangle ABD = x$. Trougao ACD je jednakokraki, pa je $\measuredangle DAC = \measuredangle ADE = \alpha - x$. Tada je iz trougla ACD: $\alpha - x + \alpha - x + \gamma = 2\alpha - 2x + 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ$ ili $\alpha - \beta = 2x$, pa je $2x = 30^\circ$. Odavde je očigledno $x = 15^\circ$.



3. Broj 2^{1988} završava se cifrom 6, a broj 3^{1988} se završava cifrom 1. Brojevi 4^{1988} i 6^{1988} završavaju se cifrom 6, a 5^{1988} cifrom 5. Prema tome dati broj se završava poslednjom cifrom broja $1+6+1+6+5+6 = 25$, a to je 5. Dakle, dati broj je deljiv sa 5, jer mu je poslednja cifra 5, ali nije deljiv sa 10, jer poslednja cifra nije 0.

4. Neka je S središte duži AC. Tada na pravoj SE leži dijagonala BD. Kako su uglovi ABC i ADC pravi tačke B i D se dobijaju u preseku prave SE i kruga k (S, SA=SC).

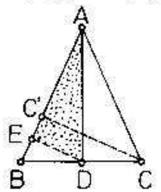
5. Svaki od datih brojeva pripada trima stranama, pa je zbir na svih 6 strana jednak $3(1+2+\ldots+7+8) = 3 \cdot 36 = 108$. Kako su ti zbirovi medjusobno jednaki to zbir na svakoj strani kocke mora biti $108:6 = 18$. S obzirom da svake dve susedne strane imaju zajedničku ivicu to je zbir brojeva na naspremnim ivicama jednak. Koristeći uočene osobine može se izvršiti nekoliko različitih rasporeda. Na slici je prikazan jedan od njih.



VII RAZRED

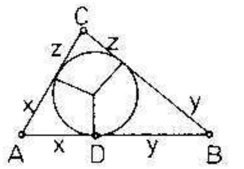
1. Neka je Dragan rodjen $\overline{19xy}$ godine. Danas on ima tačno $1988 - \overline{19xy} = 88 - 10x - y - 1 + 9 + x + y$ godina. Sredjivanjem date jednačine dobija se $78 - 11x + 2y$. Kako je x paran broj a y manje od 10, to je $58 < 11x < 78$ ili $x = 6$. Tada je $2y = 78 - 66 = 12$, pa je $y = 6$. Dakle, Dragan je rodjen 07. maja 1966. i danas ima tačno $1+9+6+6 = 1988-1966 = 22$ godine.

2. Neka je D središte osnovice BC traženog jednakokrakog trougla $\triangle$ ABC i neka je DE normala na AB. Tada je DE srednja linija $\triangle$ BCC', pa je DE = CC' :2 = 2 cm. Sada smo u mogućnosti da konstruišemo pravougli trougao $\triangle$ADE: AD= 3 cm, $\measuredangle$AED prav, DE=2 cm. Trougao ABC se lako dobija iz pomoćnog trougla ADE.



3. Dopunjavanjem do potpunih kvadrata dobijamo jednakost: $(x^{994} - 1)^2 + (y^3 - 8)^2 + (z^2 - 9)^2 = 0$. Kako su kvadrati realnih brojeva veći ili jednaki 0, to je jedina mogućnost da je svaki od sabiraka jednak 0, pa imamo četiri rešenja: $(x,y,z) = (1,2,3); (1,2,-3); (-1,2,3); (-1,2,-3)$.

4. Neka su x, y i z tangnetne duži iz temena A, B i C. Tada je zbog Pitagorine teoreme: $(x+z)^2 + (y+z)^2 = (x+y)^2$. Kvadriranjem i sredjivanjem prethodne jednakosti dobija se: $2xz + 2yz + 2z^2 = 2xy$ ili $xz + yz + z^2 = xy$. Dakle $xz + xy + yz + z^2 = 2xy$, $(x+z)\cdot(y+z) = 2xy$.



5. Neka je broj kvadrata čija je stranica 3 cm jednak x i neka je 1988-x kvadrata stranice 1 cm. Tada je ukupna površina kvadrata $(1988-x)\cdot 1 + x \cdot 9 = 46^2 = 2116$. Dakle $8x = 2116 - 1988 = 128$, pa je $x = 16$. Jedno od mogućih rešenja je 16 kvadrata stranice 3 cm i 1972 kvadrata stranice 1 cm.

VIII RAZRED

1. Razlikujemo četiri slučaja:
   I $x > 0,\ y > 0 : x+y = 1988$ i $y-x = 2$; $(x,y) = (993,995)$
   II $x < 0,\ y > 0 : -x+y = 1988$ i $y-x = 2$; sestem nema rešenja
   III $x < 0,\ y < 0 : -x-y = 1988$ i $y-x = 2$; $(x,y) = (-995,-993)$
   IV $x > 0,\ y < 0 : x-y = 1988$ i $y-x = 2$; sistem nema rešenja

2. Neka je Marija pročitala knjigu za x dana. Tada je $480/x + 16 = 480/(x-5)$ ili $480(x-5) + 16x(x-5) = 480x$. Dobijamo jednačinu $16x^2 - 80x - 2400 = 0$ ili $x^2 - 5x - 150 = 0$. Kako je $x^2 - 5x - 150 = x^2 - 15x + 10x - 150 = x(x-15) + 10(x-15) = 0$. Znači da je $(x-15)(x+10) = 0$ ili $x = 15$ dana.

3. Neka su a+b i h katete pravouglog trougla. Tada je $(a+b)^2 + h^2 = a^2 + 2ab + b^2 + h^2$. Kako je $a^2 + b^2 = c^2$ i kako je $2ab = 2ch$ (četvorostruka površina trougla) to je i $a^2 + b^2 + 2ab + h^2 = c^2 + 2ch + h^2 = (c+h)^2$. Na osnovu obrnute Pitagorine teoreme trougao čije su stranice a+b, h i c+h je takodje pravougli.

4. Iz površine datog trougla je $a \cdot 2/2 = b \cdot 3/2 = c \cdot 4/2$ ili $a = 3/2 \cdot b = 2c$. Neka je površina trougla 6k. Tada je $a = 6k$, $b = 4k$ i $c = 3k$. Kako date stranice zadovoljavaju nejednakosti trougla to trougao zaista postoji.

5. Neka je x broj kocki ivice 1, y broj kocki ivice 2 i z broj kocki ivice 3. Tada je $x+y+z = 1988$, a $x+8y+27z = 13^3 = 2197$. Ako od druge jednačine oduzmemo prvu onda je $7y+26z = 2197 - 1988 = 209$.
Rešavanjem date jednačine po y dobijamo da je $y = (209 - 26z):7 = 30 - 4z + (2z - 1):7$. Kako su x, y i z celi brojevi to mora $2z-1$ biti deljivo sa 7, a to je moguće ako je $2z-1 \in \{7,14,21,\ldots\}$ ili $2z \in \{8,15,22,29\ldots\}$. Znači $z \in \{4,11,18,\ldots\}$. Kako je

$z < 10$ (jer je $26z < 209$), to je $z = 4$. Tada je $y = 15$ i $x = 1988 - 15 - 4 = 1969$. Jedno od mogućih rešenja je 1969 kocki ivice 1, 15 kocki ivice 2 i 4 kocke ivice 3 cm.

KLUB MLADIH MATEMATIČARA "ARHIMEDES"
XIV MATEMATIČKI TURNIR

21. 05. 1988.

V RAZRED

1. Odrediti skupove A, B i C ako su ispunjeni sledeći uslovi:
(1) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(2) $B \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8\}$
(3) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
(4) $A \cap B = \{2\}$
(5) $B \cap C = \{2, 4, 8\}$
(6) $A \cap C = \{2\}$

2. U svakoj "jednakosti" na crtežu premestiti po jedno palidrvce tako da se dobiju ispravne (tačne) jednakosti:

IV — V = I
X + X = I
XXV + XXV = I

3. U trougle i kvadrate na ovom crtežu upisati prvih devet prirodnih brojeva (i to u trougle neparne, a u kvadrate parne brojeve), tako da svih dvanaest nejednakosti (šest čitanih horizontalno i šest čitanih vertikalno) budu tačne.

$$\begin{array}{ccccc} \triangle & < & \square & > & \triangle \\ \vee & & \vee & & \wedge \\ \triangle & < & \triangle & < & \square \\ \vee & & \vee & & \wedge \\ \square & < & \square & < & \triangle \end{array}$$

4. Od 32 učenika jednog odeljenja V razreda njih 4 imaju odličnu ocenu iz matematike. Koliko je to u procentima?

5. Umesto zvezdica stavite odgovarajuće brojeve, tako da se dobiju tačne jednakosti.
a) $\frac{5}{*} - \frac{*}{3} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{9}{*} - \frac{*}{21} = \frac{17}{42}$

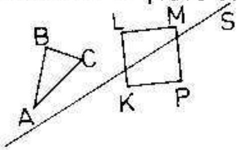
c) $\frac{1}{2} + \frac{*}{4} = \frac{*}{4}$

d) $\frac{*}{8} - \frac{1}{*} = \frac{3}{8}$

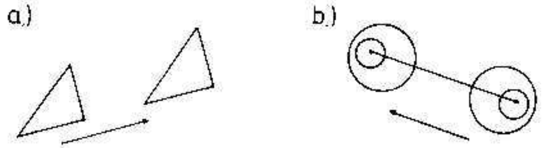
6. Na pismenom zadatku iz matematike, koji su radili svi učenici jednog odeljenja V razreda, uspeh je bio sledeći: $\frac{1}{6}$ svih učenika dobilo je ocenu "odličan", $\frac{1}{4}$ - ocenu "vrlo dobar", $\frac{1}{3}$ - ocenu "dobar", $\frac{1}{6}$ - ocenu "dovoljan", dok su 3 učenika dobila ocenu "nedovoljan". Koliko je bilo ukupno učenika u tom odeljenju?

7. Slova azbuke (latinice) podeljena su na pet grupa:
I grupa: A, M, T, U, V
II grupa: B, C, D, DJ, E, K
III grupa: N, S, Z
IV grupa: Ć, Č, DŽ, F, G, J, L, LJ, P, R, Š, Ž, NJ
Prema kojem principu je izvršena ta podela, tj. koje svojstvo imaju sva slova u odredjenoj grupi?

8. Konstruisati figure simetrične datim figurama (trouglu ABC i kvadratu KLMP) u odnosu na pravu s.



9. Nacrtani su parovi figura: sl. a) i b). U kojem slučaju (a, b, ili oba) jedna od figura može da se preslika u drugu translacijom u naznačenom pravcu i smeru?



10. Nacrtati proizvoljan trougao ABC.
a) Na pravoj AB odrediti (konstruisati) tačku M koja je jednako udaljena od temena B i C.
b) Na stranici AB odrediti tačku M koja je jednako udaljena od pravih AC i BC. (ove konstrukcije možete izvršiti na jednoj slici ili na posebnim slikama).

II

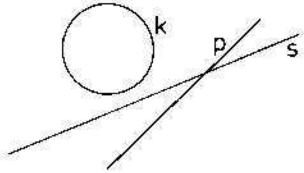
11. a) Proizvod tri uzastopna prirodna broja je 336. Koji su to brojevi?

b) Za svakog učenika u jednom odeljenju V razreda nabavljeno je po 5 svezaka iste vrste. Ukupno je za sve nabavljene sveske plaćeno 15 655 dinara. Koliko svega ima učenika u tom odeljenju i kolika je bila cena jedne sveske?

12. a) Naći presek skupa dvocifrenih brojeva koji su deljivi sa 3 i skupa dvocifrenih brojeva koji se završavaju cifrom 3.

b) Koliko svega ima dvocifrenih brojeva kod kojih je cifra desetica veća od cifre jedinica (po broj. vrednosti)?

13. Date su prave p i s i kružnica k (kao na slici). Na pravoj p i kružnici k naći (konstrukcijom tačke koje su jedna drugoj simetrične u odnosu na pravu s.



14. U flaši, čaši, bokalu i tegli nalaze se mleko, jogurt, limunada i voda; pri tome voda i mleko nisu u flaši, sud s limunadom nalazi se izmedju bokala i suda s jogurtom, u tegli nije limunada i nije voda, a čaša se nalazi pored tegle i suda s mlekom. Utvrditi u koji je sud usuta svaka od pomenutih tečnosti.

15. Kvadrat je podeljen na 25 kvadratića (polja). U svakom takvom polju (kvadratiću) čuči bilo mačka bilo mačka bilo mači (na slici su mačke bele, a mačići crni). Ako se na pravoj izmedju dva mačića nalazi mačka, onda mačići koji su na toj pravoj ne vide jedno drugo. Koliki je najveći broj mačića koje možemo postaviti na polja datog kvadrata, tako da nijedno mače ne vidi ostale mačiće? Taj raspored mačaka i mačića prikažite na crtežu. (Umesto crtanja mački i mačića, možete mače označiti slovom A, a mačku slovom B, pa polja popuniti na traženi način tim slovima).

I

VI RAZRED

1. Naći sve vrednosti za x u skupu Z tako da budu tačne ovde navedene formule. U svakom od tih primera tražene vrednosti za x označi (markiraj) kružićima na brojevnoj pravoj.

   a) $|x| = 3$
   b) $|x-1| = 3$
   c) $|x-1| \leqslant 3$
   d) $|x| > 2$
   e) $|x| = x$
   f) $|x| = -2$

2. a) (1) Koji je broj veći od svoje sedmine?
   (2) Koji je broj jednak svojoj sedmini?
   (3) Koji je broj manji od svoje sedmine?

   b) Može li razlomak čiji je brojilac manji od imenioca da bude jednak razlomku čiji je brojilac veći od imenioca?

3. Neka su a, b, c, d prirodni brojevi koji zadovoljavaju uslov $a \cdot d < b \cdot c$. Koji od znakova < ili > treba staviti umesto "?" da bi se dobile tačne nejednakosti?

   (1) $\frac{a}{b}\ ?\ \frac{c}{d}$, (2) $\frac{b}{a}\ ?\ \frac{d}{c}$, (3) $-\frac{a}{b}\ ?\ -\frac{c}{d}$, (4) $-\frac{b}{a}\ ?\ -\frac{d}{c}$?

4. Za koje celobrojne vrednosti promenljive x će i vrednosti izraza $\frac{3x+2}{x}$ takodje biti celi brojevi?

5. Ne vršeći računanja, utvrditi koji znak (>, <, =) treba umesto * da bi se dobio tačan iskaz u sledećim primjerima:

   a) $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} * \frac{7}{8} - \frac{1}{3}$
   b) $\frac{11}{12} + \frac{3}{4} * \frac{11}{12} + \frac{5}{8}$
   c) $\frac{17}{11} - \frac{24}{25} * \frac{34}{22} - \frac{35}{36}$
   d) $4\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} * 4\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$
   e) $\frac{11}{13} : \frac{11}{15} * \frac{1}{13} : \frac{1}{15}$
   f) $-3,3:8 * -3,4 : 8$

6. Visina AD, povučena na krak BC jednakokrakog trougla ABC (gde AC = BC), deli ugao na osnovici na dva dela čije se veličine razlikuju za 30°. Odrediti unutrašnje uglove tog trougla.

7. a) U jednakokrakom trouglu jedan ugao je 100°, a drugi 40°. Koji od njih leži na osnovici trougla?

   b) U jednakokrakom trouglu jedna stranica je 100 cm, a druga 40 cm. Koja je od njih osnovica trougla?

8. a) Stranica AB trougla ABC ima dužinu 5 cm, a visina CD na nju dugačka je 3 cm. Može li obim tog trougla biti jednak 10 1/3 cm?

   b) Dužine stranica AB i AC trougla ABC su redom 5 cm i 4 cm, a površina mu je 10 cm^2. Odrediti ugao CAB tog trougla.

9. Nacrtaj bilo kakav trougao, pa ga podeli (sa tri pravolinijska reza, tj. povlačenjem tri duži u trouglu):
   a) na 4 podudarna trougla, b) na 4 jednaka trougla.

10. Odrediti površinu upisanog trougla AEC u kvadrat ako je stranica kvadrata a= 6 cm, BE = EC, gdje je E polovište BC.

II

11. Koji broj treba oduzeti od brojioca razlomka $\frac{537}{463}$ i dodati ga njegovom imeniocu, da bi se dobio razlomak jednak $\frac{1}{9}$?

12. Neka imamo devet brojeva: a, b, c, d, e, f, g, h, k. Ako nijedan od tih brojeva nije jednak nuli, dokazati da se medju brojevima aek, dch, bfg, -gec, -afh, -bdk nalazi bar jedan pozitivan i bar jedan i bar jedan negativan broj.

13. Dat je ugao od 63°. Pomoću šestara i lenjira podeliti ga:
    a) na 7 jednakih delova;
    b) na 3 jednaka dela

14. Ako se svaka stranica pravougaonika produži za njenu dužinu (krećući se uvek u istom smeru), tada će krajnje tačke ovih produžetaka biti temena paralelograma čija je površina 5 puta veća od površine datog pravougaonika. Dokazati.

15. Nad svakom stranicom trougla ABC konstruisani su pravougaonici iste širine. Prave kojima pripadaju "spoljašnje" stranice tih pravougaonika odredjuju novi trougao $A_1B_1C_1$. Dokazati da se prave AA_1, BB_1 i CC_1 (koje su povučene kroz odgovarajuća temena trouglova ABC i $A_1B_1C_1$) seku u jednoj tački.

VII RAZRED

I

1. Zamenite slova ciframa tako da se dobiju tačne jednakosti. Pri tome istim slovima svuda treba da odgovaraju iste cifre, a različitim slovima - različite cifre.

2. Koje od sledećih rečenica su tačne, a koje netačne? Iza tačne rečenice napišite reč "tačno", a iza netačne - reč "netačno".
(1) $\sqrt{a^2} = |a|$ za svako $a \in R$
(2) $-1988x^3$ je uvek negativan broj
(3) Svaki broj oblika $3k+1$ je deljiv sa 3, $(k \in Z)$
(4) Proizvod dva različita iracionalna broja je uvek iracionalan broj
(5) Zbir dva različita iracionalna broja je uvek iracionalan broj
(6) Zbir racionalnog i iracionalnog broja uvek je iracionalan broj.

3. a) Jedan je broj veći od drugog 1,3 puta. Za koliko procenata je taj broj veći od drugog?
b) Jedan je broj veći od drugog 10 puta. Za koliko procenata je taj broj veći od drugog?
c) Cena neke robe je prvo povećana za 20%, a zatim je novodobijena cena snižena za 20%. Kako se i za koliko procenata promenila cena te robe u odnosu na prvobitnu cenu? Zaokruži i dopuni odgovor:

4. Posle povećanja za 15% cena jednog odela je 48 300 dinara. Kolika mu je bila cena pre tog poskupljenja?

5. a) Obim jednog kruga je $O = 2\pi$ cm. Kolika mu je površina?
b) Površina jednog kruga je $P = 3,14$ cm^2. Koliki mu je obim?

6. U pravouglom koordinatnom sistemu x0y nacrtati četverougao čija su temena u tačkama A(4,0), B(17,0), C(12,12) i D(0,3), pa mu izračunati obim i površinu.

7. Koji deo kvadrata zauzima crna figura na ovoj slici

8. Napiši kraće ("izračunaj") sledeće izraze:
(1) $x+x+x+x =$
(2) $3x^2+3x^2 =$
(3) $(-2x^3)\cdot(-3x^2) =$
(4) $(-2x^3)^2 =$
(5) $x \cdot x \cdot x \cdot x =$
(6) $3x^3:(-3x) =$

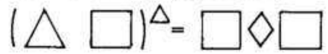
9. a) Rastaviti na ("proste") činioce izraz: $6ab+3b$
b) Izračunati na najjednostavniji način: $15,75^2 - 14,25^2$

10. Odrediti vrednost izraza $(4x-3y)^2 - (2x-y)(8x-9y)$ za $x=-1,5$ i $y=0,2$

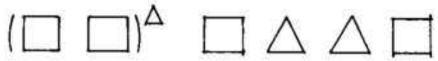
II

11. a) Na koliko se načina u odeljenju od 33 učenika mogu izabrati:
(1) predsednik, sekretar i blagajnik razredne zajednice;
(2) tri delegata za školsku zajednicu?
b) Koliko ukupno brojeva manjih od 1 000 000 možemo napisati pomoću cifara 2,5,9?

12. a) U primeru na ovoj slici cifre su zamenjene geometrijskim figurama. Iza svake figure krije se po jedna cifra: iste figure znače iste cifre, a različite figure - različite cifre. Dešifrovati tu jednakost.

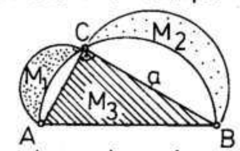


b) Dešifrovati i sledeću jednakost u kojoj su cifre zamenjene geometrijskim figurama.



13. Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka $x^2 = a^2 + b^2 - c^2$, ako su a,b, c date duži

14. Hipokrat iz Hiosa (oko 440. god. pre n. e.) utvrdio je da je zbir površina dvaju mesečića M_1 i M_2 (na slici su oni "poprskani" tačkicama) jednak površini pravouglog trougla ABC, tj. $M_1+M_2 = M_3$. Dokazati tu tvrdnju.



15. Dokazati da u ma kojem konveksnom sedmouglu postoje dve dijagonale koje grade ugao manji od 13°.

VIII RAZRED

I

1. a) Koje od navedenih rečenica (formula) su iskazi, a koje nisu? Zaokruži brojeve ispred rečenica (formula) koje su iskazi.
(1) x je jednocifren broj
(2) $4^2 = 8$
(3) $10 \leqslant 10$

(4) $8 + 2 : 2 > 6$

(5) $n^2 - n$ je paran broj za svako $n \in N$

(6) $a+b = b+a$ za svako a i b

(7) Ma koje tri duži mogu biti stranice trougla

(8) $x - 5 < 15$.

b) Koje od navedenih rečenica (formula) su tačne, a koje netačne?

2. Neka su x i y prirodni brojevi. U sledećim primerima treba upitnike (?) zameniti znacima $>$, $<$ ili $=$, tako da se dobiju tačne rečenice:

a) Ako je $x > 8$, onda je $x+3 ? 10$
b) Ako je $50x = 60y$, onda je $x ? y$
c) Ako je $5x > 10$ i $y > x$, onda je $y ? 3$
d) Ako je $x > y$, onda je $y+2 ? x+5$
e) Ako je $x = y$, onda je $50 - x ? 65 - y$
f) Ako je $y < 5$, onda je $3y ? 16$.

3. Napišite jedan za drugim prvih 10 prostih brojeva u rastućem poretku. U tako dobijenom višecifrenom broju precrtajte (izostavite) polovinu cifara tako da broj kojeg čine preostale cifre bude:
a) najmanji;
b) najveći.

4. Dokazati da kvadrat celog broja pri deljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1.

5. Dato je nekoliko formula koje sadrže znak apsolutne vrednosti.
(1) Svaku od tih formula zapisati bez znaka apsolutne vrednosti.
(2) Za svaku formulu napisati skup rešenja u okviru skupa R.
(3) Za svaku formulu na brojevnoj pravoj prikazati skup njenih rešenja, tj. označiti sve one tačke koje su pridružene brojevima koji se mogu staviti umesto x da bi formula bila tačna. /To možete učiniti tako da istaknete odgovarajuće tačke ili delove brojevne prave (kružićima - za pojedinačne brojeve, podebljavanjem odgovarajućeg dela brojevne prave/.

a) $|x| = 2$
b) $|x+1| = 2$
c) $|x-1| \leqslant 2$
d) $|x| > 2$
e) $|x| = x$
f) $|x| = -2$.

6. Pod kojim uslovima je proizvod dva cela broja jednak njihovom količniku? Navedite nekoliko parova takvih brojeva (bar tri para).

7. Na jednom kvizu takmičaru je postavljeno 10 pitanja. Za svaki tačan odgovor dobijao je 5 bodova, a za svaki netačan odgovor oduzimalo mu se 8 bodova. Koliko tačnih odgovora je dao takmičar, ako je na kraju bio sakupio 11 bodova?

8. a) Reši po x jednačinu $Ax = B$ (u skupu R)

b) Rešiti po x jednačinu $B \cdot R \cdot 0 \cdot J \cdot x = M \cdot A \cdot T \cdot M \cdot A \cdot T \cdot I \cdot K \cdot A$, gde ostala slova (štampana) znače cifre (pri čemu različita slova znače različite cifre, a ista slova - iste cifre).

9. Data je nejednačina: $\frac{2x+1}{5} < \frac{3x+2}{8}$.

a) Rešiti datu nejednačinu u skupu realnih brojeva (R)
b) Napisati (navodeći mu sve elemente) skup P_1 svih rešenja date nejednačine u okviru skupa $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
c) Napisati (navodeći sve elemente) skup P_2 rešenja date nejednačine u celim brojevima, koja zadovoljavaju i uslov $-4 < x < 1$
d) Napisati skup M svih brojeva koji su u skupu P_1 i skupu P_2.

10. a) Cene su povećane za 25%. Ako je lični dohodak Ratka Jugovića istovremeno povećan za 29%, za koliko procenata je porasla njegova kupovna moć?

b) Neka je roba poskupela za 25%. Za koliko procenata treba smanjiti tu novu cenu da bi se dobila predjašnja cena (ona koja je bila pre poskupljenja)?

II

11. Odrediti takve prirodne brojeve x, y i z da budu istovremeno tačne sledeće tri formule:

$x \cdot y = 10, \quad x \cdot z = 14 \quad i \quad x \cdot y \cdot z = 70.$

12. Naći najmanje prirodne brojeve x i y koji zadovoljavaju jednačinu $500x - 7y = 1$.

13. Postoji li neki ceo broj a za koji je $a^2 + a + 1$ deljivo sa 1988?

14. Na nekoj djačkoj igranci prisustvovale su 32 osobe (devojčice i dečaci). Devojčica D_1 igrala je sa 5 dečaka, devojčica D_2 sa 6 dečaka, devojčica D_3 sa 7 dečaka, i tako dalje - do poslednje devojčice D_n koja je igrala sa svim dečacima prisutnim na igranci. Koliko je devojčica i koliko dečaka bilo na toj igranci?

15. Simetrala hipotenuze AB pravouglog trougla ABC odseca trougao čija je površina 3 puta manja od površine trougla ABC. Odrediti unutrašnje uglove trougla ABC.

R E Š E N J A

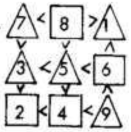
V RAZRED

Prva grupa zadataka

1. $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{1,2,4,8\}$.

2. $IV = V - I$, $X - IX = I$, $XXVI - XXV = I$.

3.



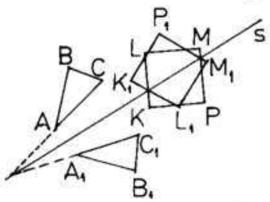
4. 12,5%.

5. $5/6 - 2/3 = 1/6$
$9/14 - 5/21 = 17/42$
$1/2 + 1/4 = 3/4$
$5/8 - 1/4 = 3/8$

6. Nedovoljni čine $1 - (1/6 + 1/4 + 1/3 + 1/6) = 1/12$ svih učenika, a to je 3 učenika, pa u odeljenju ima 36 učenika. Odličnih je 6, vrlo dobrih 9, dobrih 12, te dovoljnih 6 učenika.

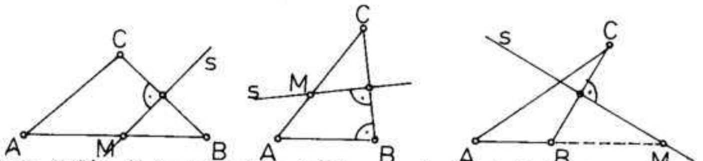
7. Slova prve grupe su osnosimetrična (i to samo osnosimetrična), pri čemu je njihova osa simetrije vertikalna.
Slova druge grupe su takodje osnosimetrična (i to samo osnosimetrična), ali im je osa simetrije horizontalna.
Slova treće grupe su centralno simetrična (i to samo centralno simetrična).
Slova četvrte grupe su centralno simetrična i osnosimetrična (sa dve osi simetrije).
Slova pete grupe su nesimetrične figure.

8.



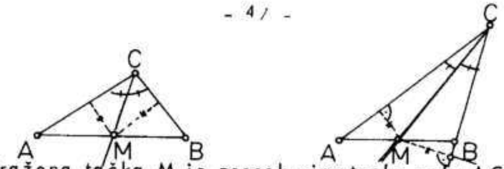
9. a).

10.
a)



Tražena tačka M je presečna tačka simetrale duži BC i prave AB.
U slučaju $BC \perp AB$ nema rešenja.

b)

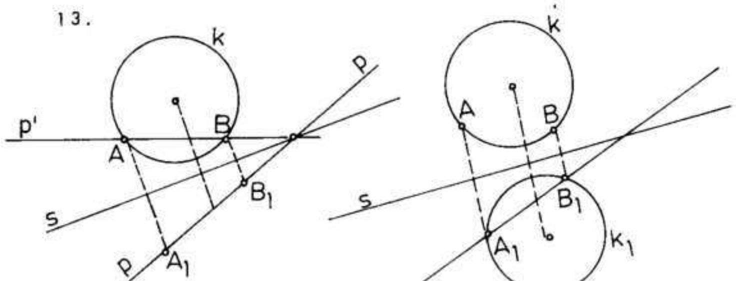


Tražena tačka M je presek simetrale ugla ACB i stranice AB.
Zadatak uvek ima rešenje.
II

11. a) $336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 6 \cdot 7 \cdot 8$.
b) $1655 = 5 \cdot 31 \cdot 101$.
U odeljenju ne može biti 101 učenik (a ni $31 \cdot 101$), pa je, dakle, bio 31 učenik i svaki je za sveske dao 505 dinara.

12. a) $\{33,63,93\}$.
b) Ukupno ih ima $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.

13.



I način:
Data prava p preslikava se osnosimetrično u odnosu na datu pravu s. Preseci dobivene prave p' sa k su tražene tačke A i B na k. Simetrične im tačke A_1 i B_1 na p se onda lako dobivaju.

II način:
Konstruiše se osnosimetrična slika k' date kružnice k u odnosu na pravu s. Presečne tačke k' sa datom pravom p su A_1 i B_1 kojima je lako konstruisati simetrične tačke A i B.

14. Zadatak se najlakše rešava pomoću tablice.

	mleko	jogurt	limun.	voda
flaša	—			—
čaša	—			
bokal		—	—	
tegla	—		—	—

	mleko	jogurt	limun.	voda
flaša	—	—	+	+
čaša	—	—	—	+
bokal	+	—	—	—
tegla	—	+	—	—

Mleko je u bokalu, jogurt u tegli, limunada u flaši, a voda u čaši.

15.

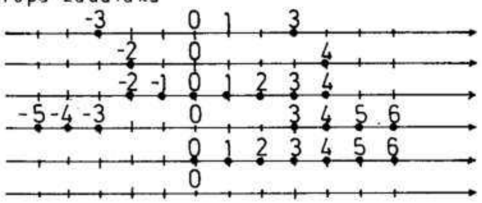
A	B	A	B	A
B	B	B	B	B
A	B	A	B	A
B	B	B	B	B
A	B	A	B	A

Ako na centralnom polju kvadrata čuči mače (A), onda u 8 susednih mu polja moraju čučati mačke. Lako se uveravamo da na ostalim poljima možemo imati ne više od 8 mačića, dakle, ukupno će ih biti 9.
Ako, pak, na centralnom polju čuči mačka, a na jednom od susednih mu polja čuči mače, onda njega moraju okruživati 8 mačaka. Nije se teško uveriti da se u tom slučaju na ostala polja može razmestiti ne više od 7 mačića. Dakle, ukupno 8.

VI RAZRED

Prva grupa zadataka

1. a) b) c) d) e) f)



2. a) (1) Svaki pozitivan broj
(2) Nula
(3) Svaki negativan broj.

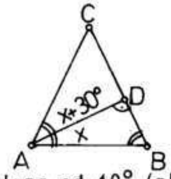
b) Može ($\frac{3}{5} = \frac{-3}{-5}$; $\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$.

3. (1) $<$, (2) $>$, (3) $>$, (4) $<$.

4. $\frac{3x+2}{x} = 3+\frac{2}{x}$. Mora biti $\frac{2}{x} \in Z$, tj. $x|2 \Rightarrow x \in \{-2,-1,2,1\}$.

5. a) $<$, b) $>$, c) $>$, d) $<$, e) $=$, f) $>$.

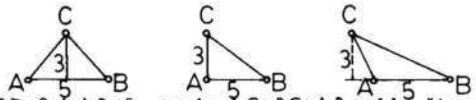
6.



Neka je $\measuredangle BAD=x$; tada: $\measuredangle DAC=x+30^\circ$, $\measuredangle B=90^\circ-x$. Zbog $\measuredangle A=\measuredangle B$ imamo: $2x+30^\circ=90^\circ-x \Rightarrow x=40^\circ$. U tom slučaju je: $\measuredangle A=\measuredangle B=70^\circ$ i $\measuredangle C=180^\circ-140^\circ=40^\circ$.

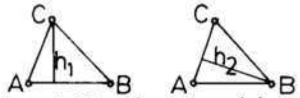
7. a) Ugao od 40° (zbir uglova trougla je 180°).
b) Stranica od 40 cm. (zbir dve stranice trougla mora biti veći od treće).

8. a) Mogući slučajevi:



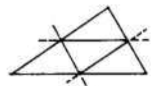
Uvek je: $AC \geq 3$, $BC \geq 3$ i $AB=5$, pa je $AC+BC+AB \geq 11$, što znači da obim ne može biti $10\ 1/3$.

b) Mogući slučajevi:



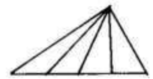
Visina na stranicu AB ima dužinu $h_1 = 4cm$ (sledi iz $P = 10\ cm^2$) i jednaka je stranici AC, što znači da je trougao ABC pravougli: $\measuredangle A = 90^\circ$.
Slično visina na stranicu AC ima dužinu $h_2 = 5cm$ (što sledi iz $P = 10\ cm^2$) i jednaka je stranici AB, što znači da je i u tom slučaju ΔABC pravougli: $\measuredangle A = 90^\circ$.

9. a)



Povući sve tri srednje linije.

b)



Jednu stranicu trougla podeliti na četiri jednaka dela. Dobijeni trouglovi imaju istu osnovicu i zajedničku visinu.

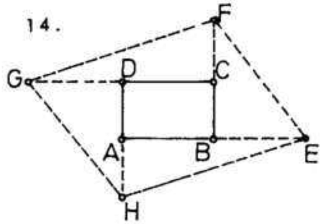
10. $P_{\Delta AEC} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4}$.

11. $\frac{537-x}{463+x} = \frac{1}{9} \Rightarrow (537-x) \cdot 9 = 463+x \Rightarrow 10x = 4370 \Rightarrow x = 437$.

12. Proizvod svih 6 navedenih brojeva jednak je $(aek)\cdot(dch)\cdot(bfg)\cdot(-gec)\cdot(-afh)\cdot(-bdk) = -a^2b^2c^2d^2e^2f^2g^2h^2k^2$, tj. negativan je. Znači, šest posmatranih brojeva ne mogu biti svi pozitivni ili svi negativni, drugim rečima medju tim brojevima bar jedan je pozitivan i bar jedan negativan.

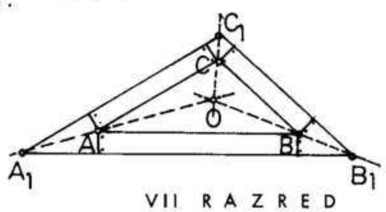
13. $63^\circ - 60^\circ = 3^\circ \cdot 3 = 9^\circ$; $90^\circ - 60^\circ - 9^\circ$ 21°.

14.



Pravougli trouglovi BEF i HDG su podudarni (jer su im katete jednake); otuda je EF = GH. Isto tako se dokazuje da je HE = FG. Odatle sledi: EFGH je paralelogram. Taj paralelogram je sastavljen od datog pravougaonika ABCD i četiri pravougla trougla od kojih je svaki jednak pravougaoniku ABCD. Prema tome: $P_{\square EFGH} = 5 \cdot P_{\square ABCD}$.

15. Četverouglići u uglovima $\Delta A_1B_1C_1$ su deltoidi. Prave koje sadrže dijagonale AA_1, BB_1 i CC_1 tih deltoida su simetrale uglova $\Delta A_1B_1C_1$ (takodjer i ΔABC), a one se seku u jednoj tački.



VII RAZRED

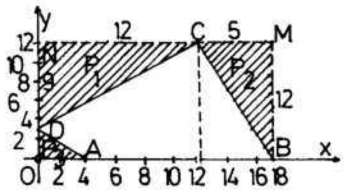
Prva grupa zadataka

1. $2 \cdot 1 = 8 - 6 = 2:1 = 8:4 = 3-1$.

2. Tačne su (1) i (6) rečenica.

3. a) 30 %; b) 900 %; c) 4%.

4. $x + 0{,}15x = 48300 \Rightarrow x = 42000$.



5. a) $O = 2r\pi$; $2r\pi = 2\pi \Rightarrow r = 1$.
$P = r^2\pi$; $P = \pi$.

b) $P = r^2\pi$; $r^2\pi = 3{,}14 \Rightarrow r = 1$.
$O = 2r\pi$, $O = 2\pi$.

6. $|AB| = |17 - 4| = 13$

$|BC|^2 = 12^2 + 5^2 = |BC| = 13$

$|CD|^2 = 12^2 + 9^2 = |CD| = 15$

$|DA|^2 = 3^2 + 4^2 = |DA| = 5$

$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 46$.

$P_1 = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54$; $P_2 = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$; $P_3 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$; $P_1 + P_2 + P_3 = 90$.

$P_{ABCD} = P_{OBMN} - (P_1 + P_2 + P_3)$ $17 \cdot 12 - 90 = 140$.

7. Data crna figura se lako pretvara u kvadrat koji čini polovinu datog kvadrata. Prema tome zauzima 50%.

8. (1) $4x$; (2) $6x^2$; (3) $6x^5$; (4) $4x^6$; (5) x^4; (6) $-x^2$.

9. a) $3b(2a+1)$; b) $(15{,}75 + 14{,}25) \cdot (15{,}75 - 14{,}25) = 30 \cdot 1{,}5 = 45$.

10. $A = 2xy$; $A = 2 \cdot (-1{,}5) \cdot 0{,}2 = -0{,}6$.

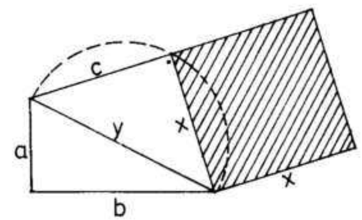
II grupa zadataka

11. a) (1) $33 \cdot 32 \cdot 31 = 32736$; (2) $\frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5456$.

b) Jednocifrenih ima $3^1 = 3$
dvocifrenih ima $3 \cdot 3 = 9$
trocifrenih ima $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
četverocifrenih $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
peterocifrenih $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
šesterocifrenih $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$
Ukupno ih ima 1092.

12. a) $26^2 = 676$; b) $11^3 = 1331$.

13. (1) $y^2 = a^2 + b^2$; (2) $x^2 = y^2 - c^2$; $x^2 = a^2 + b^2 - c^2$.



14. $M_1 + M_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$

$M_1 + M_2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 + \frac{ab}{2} - \frac{\pi}{8}c^2$

$M_1 + M_2 = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{ab}{2}$

Pošto je $a^2 + b^2 = c^2$, izraz u zagradama je jednak 0, pa dobijamo:
$M_1 + M_2 = \frac{ab}{2} = M_3$,

15. Sedmougao ima ukupno $\frac{n(n-3)}{2} = 14$ dijagonala. Ako su dve dijagonale paralelne, ugao izmedju njih je $0^\circ < 13^\circ$. Pretpostavimo da nije takav slučaj. Izaberimo u ravni sedmougla neku tačku S i kroz nju provucimo 14 pravih koje su paralelne dijagonalama sedmougla. Ove prave dele ravan na 28 uglova čiji je zbir 360°. Ako bi pretpostavili da ni jedan od ovih uglova nije manji od 13°, onda im zbir nebi bio manji od $28 \cdot 13^\circ = 364^\circ$, medjutim, njihov zbir stvarno iznosi 360°, pa je ova pretpostavka neodrživa. Prema tome, postoji ugao izmedju dijagonala koji je manji od 13°.

VIII RAZRED

Prva grupa zadataka

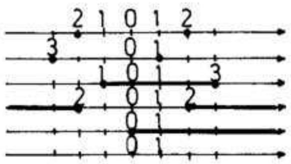
1. Tačne su 3,4,5,6; a netačne 2 i 7.

2. a) $>$, b) $>$, c) $>$, d) $<$, e) $<$, f) $<$.

3. a) Najmanji 11111229; b) Najveći 77192329.

4. Ako je broj paran, tj. oblika $2k$, njegov kvadrat $4k^2$ je djeljiv sa 4 (ostatak je 0).
Ako je broj neparan tj. oblika $2k+1$, njegov kvadrat je $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1 = 4m+1$, pa se vidi da pri deljenju sa 4 daje ostatak 1.

5. a) $x=-2$ ili $x=2$ $\{-2,2\}$
b) $x+1=-2$ ili $x+1=2$ $\{-3,1\}$
c) $-2 \leqslant x-1 \geqslant 2$ $[-1,3]$
d) $x<-2$ ili $x>2$ $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$
e) $x \geqslant 0$ $[0,\infty)$
f) nema takvih brojeva $\emptyset$



6. $xy = \frac{x}{y} = xy^2 = x \Rightarrow xy^2 - x = 0 \Rightarrow x(y^2-1)=0 \Rightarrow x(y-1)(y+1) = 0$.
Tu jednačinu zadovoljavaju vrednosti:
a) $x=0$, y ma koji ceo broj različit od 0;
b) x je ma koji ceo broj, $y=1$;
c) x je ma koji ceo broj, $y=-1$.

7. $\left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ 5x-8y=11 \end{array}\right\} \Rightarrow x=7$ i $y=3$. Učenik je dao 7 tačnih odgovora.

8. a) (1) Za $A \neq 0$ je $x = \frac{B}{A}$ jedinstveno rešenje

(2) Za $A=0$ i $B \neq 0$ jednačina je nemoguća.

(3) Za $A=B=0$ jednačina je neodredjena.

b) Imamo 10 različitih slova i 10 cifara, pa jedno od tih slova mora značiti 0. Pošto mora biti $B \cdot R \cdot O \cdot J \neq 0$, to nulu može značiti samo neko od slova u proizvodu $M \cdot A \cdot T \cdot E \cdot M \cdot A \cdot T \cdot I \cdot K \cdot A$, pa je taj proizvod jednak 0. Imamo jednačinu oblika $n \cdot x = 0$, $n \neq 0$, čije je rešenje 0.

9. a) $x < 2$ i $x \in R$; b) $P_1 = \{0,1\}$; c) $P_2 = \{-3,-2,-1,0\}$
d) $M = P_1 \cap P_2 = \{0\}$

10. a) 3,2 %; b) 20 %.

II grupa zadataka

11. Iz $xy = 10$ i $xz = 14$ i $xyz = 70$ proizlazi $10z = 70$, odnosno $z = 7$. Uvrštavanjem u drugu jednačinu dobivamo $x = 2$. Dakle $x = 2$, $y = 5$, $z = 7$.

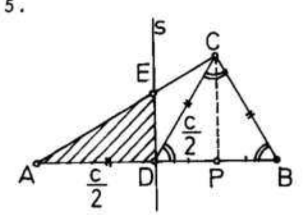
12. $500x-7y = 1 \Rightarrow 7y = 500x-1 \Rightarrow y = 71x + \frac{3x-1}{7} = 71x+u$, $u \in Z$;
$3x-1=7u \Rightarrow x = \frac{7u+1}{3} = 2u + \frac{u+1}{3} = 2u+t$, $t \in Z$;

$u+1 = 3t \Rightarrow u = 3t-1$, $t \in Z$ i $t > 0$ $(t \in N)$
tada $x = 2(3t-1)+t = 7t-2$ i
$y = 71(7t-2)+3t-1 = 500t-143$.
Najmanji prirodni brojevi x i y su za $t = 1$ i iznosi $x = 5$, $y = 357$.

13. $a^2+a+1 = a(a+1)+1 = 2n+1$ - neparan broj za svako $a \in Z$, pa nije deljiv sa 1988.

14. $32-n=n+4 \Rightarrow n = 14$. Ukupno imamo 14 devojčica i 18 dečaka.

15.



$P_{\Delta ADE} = \frac{1}{3} P_{\Delta ABC}$, tj. $\frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot ED = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CP \Rightarrow \frac{CP}{ED} = \frac{3}{2}$, pa je $\frac{AP}{AD} = \frac{CP}{ED} = \frac{3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow AP = \frac{3}{2} AD = \frac{3}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{3}{4} AB$ i $DP = AP - AD = \frac{1}{4} AB = BP$, pa je ΔDBC jednakokraki, znači $BC=CD$; a zbog $DB=DC$ taj Δ je jednakostran, što znači da je $\measuredangle ABC = \measuredangle BDC = 60^\circ$ i $\measuredangle BAC = 30^\circ$.

Uglovi su 30°, 60° i 90°.

SR BOSNA I HERCEGOVINA

DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA BOSNE I HERCEGOVINE
PODRUŽNICA ZENICA

OPŠTINSKO TAKMIČENJE

Zenica, 12. 03. 88.

VI RAZRED

1. Odrediti prirodan broj n tako da bude $n(n+1)\cdot(2n+1) = 84$.

2. Dat je paralelogram ABCD. Ako su duži CF i DE (paralelne) visine paralelograma, onda su trouglovi AED i BCF podudarni. (Dokaži!)

3. Tri ugla imaju veličine redom $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{20}$ od pravog ugla. Mogu li ti uglovi biti unutrašnji uglovi nekog trougla?

4. Ako je a racionalan broj, onda vrijednost $|a| - a$ ne može biti negativna. Dokaži!

VII RAZRED

1. Dokaži da je broj $\sqrt{2} + 2$ iracionalan!

2. Izračunati površinu i obim (približno na dvije decimale) trougla kome su dužine stranica $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ i $\sqrt{26}$.

3. Izračunaj površinu i obim četverougla koji je odredjen graficima funkcija $y = \pm\ 0.5\,x \pm 4$. (Pazi: četiri funkcije).

4. Koeficijenti polinoma P(x) drugog reda su tri cifre (dekadskog brojnog sistema). Ako je $P(10) = 245$ izračunaj $P(100)$ i $P(-10)$.

VIII RAZRED

1. Zadan je pravougli trougao ABC. Ako je duž CD visina trougla na hipotenuzu AB, onda su trouglovi ADC i BDC slični. Dokaži? Ako je omjer kateta trougla ABC 3 : 4 koji je omjer površina trougla ADC i trougla BDC?

2. Kolika je vrijednost izraza $R(x) = (x^3 - x):(x^2-2x+1)$ za $x = 10^4+1$?

3. Biciklista od mjesta A do mjesta B ima brzinu 15 km/sat, a od mjesta B do mjesta A (u povratku) ima brzinu 12 km/sat. Razlika u trajanju puta BA i puta AB je 12 minuta. Izračunaj dužinu puta ABA!

4. Data je jednačina : $(5x - 3)/5 : 4/3 = m/2$.
   a) Riješi jednačinu po x i odredi m tako da bude $x = 5$!
   b) Za koje cjelobrojne vrijednosti m će biti $0 < x < 1$?

5. Poslije završetka školske godine učenici su medjusobno izmijenili fotografije. Koliko je bilo učenika ako su izmijenili 870 fotografija?

REGIONALNO TAKMIČENJE

Tuzla, 23. 04. 1988.

VII RAZRED

1. Oluja prelomi stablo visine 16 m i pri tome vrh drveta dodirne zemlju 8 m daleko od podnožja stabla. Na kojoj visini od zemlje je prelomljeno stablo?

2. Za koje vrijednosti m i n $(m, n \in N)$ izraz:

$$\frac{1-(3m-n-2)^2}{(2m+3n-5)^2+1}$$

ima maksimalnu (najveću) vrijednost?

3. Osnovice trapeza su $a = 25$ cm i $b = 15$ cm, a krak c je 8 cm. Odrediti krak d i površinu P toga trapeza ako je poznato da je zbir uglova na većoj osnovici pravi ugao.

4. Elektronski (digitalni) sat pokazuje vrijeme u satima i minutama (npr. 23:12). Koliko vremena u 24 sata je cifra 2 na bar jednom mjestu?

5. Odredi četverocifren prirodan broj (broj sa različitim ciframa) koji pomnožen sa 9 daje četverocifren broj sa istim ciframa ali obrnutog redoslijeda, tj. dešifrovati broj $\overline{xyzt} \cdot 9 = \overline{tzyx}$

VIII RAZRED

1. Dati su polinomi:
   $A(x) = x^3+x^2 - 9x - 9$
   $B(x) = (x-2)^2 - (x-4)^2$
   a/ Uprosti razlomak $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$
   b/ Odredi nul -tačke funkcije f(x)
   c/ Za koje vrijednosti x, funkcija f(x) nije definisana?

2. Dimenzije kvadra su 2, 6, 12 cm. Odredi ivicu takve kocke da se površine tih tijela odnose kao njihove zapremine.

3. Ako je $f(x) + 5 \cdot f(-x) = 6x+12$, odrediti $f(x)$ i $f(-x)$.

4. Trougao je ograničen koordinatnim osama i pravom $5x+12y = 60$. Odrediti:

a/ Koordinate tjemena tog trougla
b/ Obim trougla
c/ Površinu i zapreminu tijela koje nastaje rotacijom tog trougla oko y- ose.

5. Ako je zbir dva trocifrena prirodna broja $A = \overline{abc}$ i $B = \overline{def}$ djeljiv sa 37, tada je sa 37 djeljiv i šestocifreni broj $\overline{abcdef}$, gdje su a,b,c,d,e,f cifre. Dokazati!

REPUBLIČKO TAKMIČENJE

VII RAZRED

1. Odredi najmanji cijeli broj takav da je kvadratni korijen iz proizvoda tog broja i broja 1988 prirodni broj!

2. Izračunati površinu pravouglog trougla hipotenuze c = 4 cm, ako se mjerni brojevi oštrih uglova odnose kao 3 : 1 !

3. Površina jednakokrakog trapeza jednaka je kvadratu srednje linije (srednjice). Izračunati udaljenost presjeka dijagonala od veće osnovice trapeza!

4. Dokazati da je za $a \neq \pm \frac{1}{2}$ izraz

$$4a^2\left[\left(\frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{2a+1}\right) - \left(\frac{1}{2a-1} - \frac{-1}{2a+1}\right)\right]$$ pozitivan!

5. Časovnik dnevno kasni 6 minuta. Koliko je tačno vrijeme ako sat pokazuje 17 časova i 52 minuta i ako se zna da je juče u 10 časova bio tačan!

VIII RAZRED

1. U tri grada B(rčko), G(radačac) i O(rašje) živi 35.000 stanovnika. Kada bi u gradu B bilo dvostruko više stanovnika nego što ih ima, onda bi ukupan broj stanovnika u sva tri grada bio jednak petom stepenu razlike broja stanovnika u gradu G i broja stanovnika u gradu O. Odredi broj stanovnika u svakom od gradova B, G i O.

2. Dati polinom $P(z) = z^3+5z^2+3z-9$
a) rastavi na proste faktore,
b) dokaži da je za svaki neparan prirodni broj z, izaz P(z) djeljiv sa 8.

3. Dužine strana pravouglog trougla su prirodni brojevi. Odredi obim i površinu onog trougla koji ima minimalnu (najmanju) dužinu hipotenuze, ako je dužina jedna katete 55.

4. Rješenje jednačine $(x+2)^3-(x-2)^3-x = 12x^2+8$ je mjerni broj dužine kraka jednakokrakog trapeza, kod koga je oštar ugao 45° i krak jednak manjoj osnovici trapeza. Izračunati površinu tijela koje nastaje rotacijom trapeza oko jednog kraka.

5. Dat je izraz $M = (m^2+5m)(m^2+5m+10) + 24$, gdje je $m \in Z$. Dokazati da se dati izraz može predstaviti kao proizvod četiri uzastopna prirodna broja.

RJEŠENJA

OPĆINSKO NATJECANJE

VI RAZRED

1. $n(n+1)\cdot(2n+1) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 = 3\cdot 4\cdot 7 \Longrightarrow n = 3.$

2. $\Delta AED \cong \Delta BCF$ (IV).

3. $\frac{3}{4}\cdot 90^\circ + \frac{4}{5}\cdot 90^\circ + \frac{9}{20}\cdot 90^\circ = 90^\circ\left(\frac{15+16+9}{20}\right) = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ.$

4. $a < 0 \Longrightarrow |a| - a > 0;\quad a > 0 \Longrightarrow |a| - a = 0.$

VII RAZRED

1. Pretpostavimo da je $\sqrt{2} + 2$ racionalan broj, tj. da je

$$\sqrt{2} + 2 = R$$

Kvadriranjem i sređivanjem datog izraza dobivamo da je

$\sqrt{2} = \frac{R^2 - 6}{2}$, tj. da je iracionalan broj jednak racionalnom.

Dakle, $\sqrt{2} + 2$ je iracionalan broj.

2. Kako je $(\sqrt{26})^2 = (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$, to je zadani trokut pravokutan.

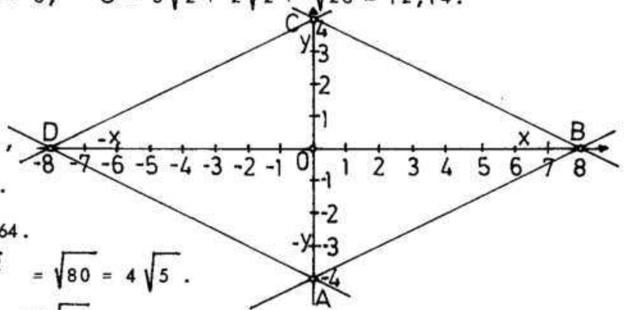
$P = \frac{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2} = 6;\qquad O = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{26} \approx 12{,}14.$

3. $y_1 = \frac{1}{2}x + 4,$

$y_2 = \frac{1}{2}x - 4,$

$y_3 = -\frac{1}{2}x + 4,$

$y_4 = -\frac{1}{2}x - 4.$



$P = \frac{8\cdot 4}{2}\cdot 4 = 64.$

$CD = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$

$O = 4\cdot 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5}.$

4. $P(x) = ax^2 + bx + c.$

$P(10) = 100a + 10b + c \Longrightarrow a = 2,\ b = 4\ \ c = 5.$

$P(-10) = 100\cdot 2 - 4\cdot 10 + 5 = 165.$

$P(100) = 10000\cdot 2 + 100\cdot 4 + 5 = 20405.$

VIII RAZRED

1. 1) $\Delta ABC \sim \Delta ADC$
2) $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

Iz (1) i (2) $\Longrightarrow$ $\Delta ADC \sim \Delta BDC$

$P_2 : P_1 = a^2 : b^2 \Longrightarrow P_2 : P_1 = 9 : 16.$

2. $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{x(x+1)}{x-1} = \frac{(10^4+1)(10^4+2)}{10^4} = 10003{,}0002.$

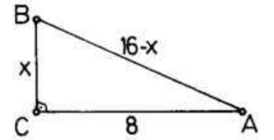
3. Neka je x vrijeme u minutama za koje biciklista prijeđe put AB.
1) $15x = 12(x+12) \Longrightarrow x = 48$ minuta,
2) $15\cdot\frac{48}{60} = 12$ km.
Dakle, dužina puta ABA iznosi $12 + 12 = 24$ km.

4. a) Ako je $x = 5$, imamo:
$\frac{22}{5} : \frac{4}{3} = \frac{m}{2} \Longrightarrow m = \frac{33}{5}.$
b) $m \in \{1, 2\}$.

5. Tri učenika mogu izmijeniti $(2+1)\cdot 2 = 6$ fotografija.
Četiri učenika mogu izmijeniti $(3+2+1)\cdot 2 = 12$ fotografija.
Pet učenika mogu izmijeniti $(4+3+2+1)\cdot 2 = 20$ fotografija.
. . . .
Trideset učenika mogu izmijeniti $(29+28+\ldots+1)\cdot 2 = 870.$

REGIONALNO NATJECANJE

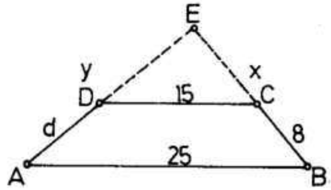
1. $(16-x)^2 = x^2 + 8^2,$
$32x = 192,$
$x = 6.$
Na visini 6 m.



2. Da bi zadani izraz imao maksimalnu vrijednost mora biti
$3m - n - 2 = 0$ i $2m + 3n - 5 = 0$.
Dakle, imamo sistem:

$$\left.\begin{array}{l} 3m - n - 2 = 0 \\ 2m + 3n - 5 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow n = 1,\quad m = 1.$$

3. 1) $\Delta ABE \sim \Delta DCE$
$25 : (8 + x) = 15 : x \Longrightarrow x = 12.$
2) Iz pravokutnog trokuta ABE imamo:
$25^2 = 20^2 + y^2 \Longrightarrow y = 16.$
3) $25 : 15 = 16 : (16 - d) \Rightarrow d = \frac{32}{5}.$



4. Znamenka 2 se pojavljuje kad sat pokazuje 02,12,20,21,22,23 h i 02,12,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,32,42, 52 minute. Dakle, ukupno 6h + 18 · 15 min = 10h i 30 min.

5. Odmah zaključujemo da je $x=1$, $t=9$, $y=0$. Prema tome imamo $\overline{10z9}\cdot 9=\overline{9z01}$. Lako se uočava da je $z=8$. Dakle, $1089\cdot 9=9081$.

VIII RAZRED

1. a) $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{x^3+x^2-9x-9}{(x-2)^2-(x-4)^2}=\frac{(x+1)(x^2-9)}{4\,(x-3)}=\frac{(x+1)(x+3)}{4}$.

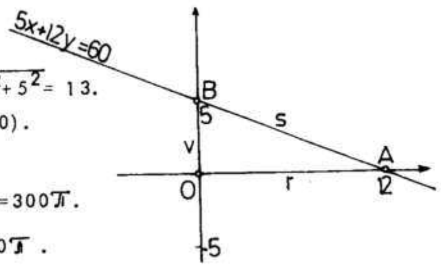
b) $x_1=-1$, $x_2=-3$.

c) Funkcija je neodređena za $x=3$.

2. $O_{kv}=2ab+2ac+2bc=24+48+144=216$.
$V_{kv}=a\cdot b\cdot c=2\cdot 6\cdot 12=144$.
$O_{ko}=6a^2$; $V_{ko}=a^3$.
$6a^2:216=a^3:144 \Rightarrow 216a=864 \Rightarrow a=4$.

3. Neka je $f(x)=ax+b$. Tada je:
$ax+b+5(-ax+b)=6x+12$,
$-4ax+6b=6x+12 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$, $b=2$.
$f(x)=-\frac{3}{2}x+2$,
$f(-x)=\frac{3}{2}x+2$.

4. Iz pravokutnog trokuta OAB izračunamo stranicu $AB=\sqrt{12^2+5^2}=13$.



a) $O=(0,0)$; $B=(0,5)$; $C=(12,0)$.
b) $O_{OAB}=5+12+13=30$.
c) $O=r\pi(r+s)=12\pi\cdot(12+13)=300\pi$.
$V=\frac{r^2\pi\cdot v}{3}=\frac{144\cdot 5\cdot\pi}{3}=240\pi$.

5. Neka su $\overline{abc}$ i $\overline{def}$ zadani troznamenkasti brojevi. Ako ih dopišemo jedan iza drugog dobijemo broj $\overline{abcdef}$. Dakle, imamo:
$\overline{abcdef}=\overline{abc}\cdot 1000+\overline{def}$.
Dodajmo i oduzmimo desnoj strani $\overline{abc}$, dobit ćemo

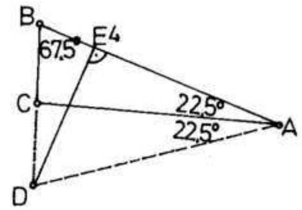
$\overline{abcdef}=\overline{abc}\cdot 999+\overline{abc}+\overline{def}$.
Pošto je 999 djeljivo sa 37, a $\overline{abc}+\overline{def}$ po pretpostavci, to je i $\overline{abcdef}$ djeljiv sa 37.

REPUBLIČKO NATJECANJE

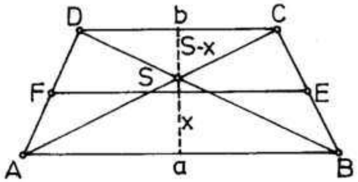
VII RAZRED

1. $\sqrt{x\cdot 1988}=n \Rightarrow \sqrt{x\cdot 4\cdot 7\cdot 71}=n \Rightarrow x=7\cdot 71=497$.

2. $3x+x=90^\circ \Rightarrow x=22{,}5^\circ \Rightarrow \measuredangle A=22{,}5^\circ$, $\measuredangle B=67{,}5^\circ$.
Konstruirajmo simetričan trokut trokutu ABC s obzirom na stranicu AC. Povucimo visinu DE u trokutu ABD.
Imamo:
$DE=\frac{DA}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.
$P_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot DE}{4}=\frac{4\cdot 2\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{2}$.



3. 1) $P=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$;
2) $P=\frac{a+b}{2}\cdot v$;
Iz (1) i (2) $\Rightarrow v=\frac{a+b}{2}=s$.



$\Delta ABS \sim \Delta DSC$
$a:x=b:(s-x) \Rightarrow ax+bx=as \Rightarrow$
$x=\frac{a\cdot s}{a+b}=\frac{a}{2}$.
Jednaka je polovini osnovice.

4. $4a^2\left[\frac{4a^2+1}{4a^2-1}-\frac{+2}{4a^2-1}\right]=4a^2\cdot\frac{4a^2-1}{4a^2-1}=4a^2$, a to je veće od 0.

5. Ako dnevno kasni 6 minuta, to znači da svaki sat kasni 15 sekundi. Za 32 sata će kasniti 480 sekundi ili 8 minuta. Dakle, bilo je 18 h.

VIII RAZRED

1. Neka x,y,z redom označavaju brojeve stanovnika u B,G,O. Tada je $x+y+z=35000$, odnosno $y+z = 35000-x$, pa iz: $2x+y+z = (y-z)^5$ dobivamo: $x+35000=(y-z)^5$. Kako je $1< x<35000$, izlazi da je $35000< (y-z)^5< 70000$. Znamo da je: $8^5=32768 < 35000<59049=9^5<70000<10^5$, pa je $y-z=9$. Otuda je $x=24049$, pa dalje jednostavno izračunavamo: $y=5480$ i $z=5471$.

2. a) $P(z) = z^3+6z^2-z^2+9z-6z-9=z(z^2+6z+9)-(z^2+6z+9) = (z+3)^2(z-1)$.

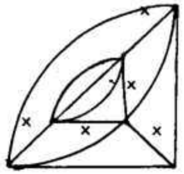
   b) Neka je $z=2k+1$. Tada je $P(z) = P(2k+1) = 8k(k+2)^2 = 8p$, što je i trebalo dokazati.

3. Prema Pitagorinoj teoremi, za $b=55$ bit će: $c^2-a^2= 55^2$, odnosno $(c-a)(c+a) = 5\cdot 5\cdot 11\cdot 11$. Odavde dobivamo sistem jednadžbi:

   $c-a = 1$ $c-a = 5$ $c-a = 11$ $c-a = 25$
   $c+a = 3025$, $c+a=605$, $c+a=275$, $c+a = 121$,

   jer mora biti $c-a<c+a$. Najmanja hipotenuza, $c=73$, dobiva se za $a=48$. Tada je opseg $O=176$, a površina $P = 1320$.

4. Rješenje dane jednadžbe je $x=8$, pa je duža osnovica $a=x(1+\sqrt{2})$. Dobiveno tijelo je stožac polumjera $R=8+4\sqrt{2}$, iz koje je izvadjen, drugi stožac, polumjera $r = 4\sqrt{2}$. Površina ovog tijela je $P= (R^2-r^2)\pi+ R\pi a + r\pi x$, tj. $P=192(1+\sqrt{2})\pi$.



5. Ako stavimo: $m^2+5m=n$, dobit ćemo: $M= n(n+10)+24 = n^2+10n + 24 = (n+6)(n+4)$, tj. $M=(m^2+5m+6)(m^2+5m+4)$. Kako je $m^2+5m+6 = (m+2)(m+3)$ i $m^2+5m+4 = (m+1)(m+4)$, slijedi da je $M= (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$, što se i tvrdilo.

SR SLOVENIJA

ZAVOD SR SLOVENIJE ZA SOLSTVO
in DMFA SR SLOVENIJE

OBČINSKO TEKOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNAJE

16. april 1988.

VI RAZRED

1. Trgovec je kupil za 212100 din blaga. Prodal je $\frac{2}{3}$ tega blaga s 5 % dobička. Ostanek blaga je prodal z $\frac{1}{70}$ izgube. Koliko din je znašal končni dobiček?

2. Neko naravno število je deljivo s 7. Če ga delimo s 4, 5 ali 6, dobimo vedno ostanek 2. Poišči najmanjše tako število.

3. Neko naravno število ima na mestu enic cifra 0. Če to cifra 0 crtamo, dobimo število, ki je za 27405 manjše od prvotnega. Katero je prvotno število?

4. V trikotniku $\triangle ABC$ meri kot $\gamma = 40^\circ$. Simetrali kota γ in zunanjega kota γ', sekata premico AB v točkah D in E, tako da leži točka B med točkama A in E. Trikotnik $\triangle CDE$ je enakokrak. Izračunaj notranja kota α in β trikotnika $\triangle ABC$.

5. Načrtaj trapez ABCD s podatki AB = 7 cm, CD = 3 cm, $\measuredangle A = 90^\circ$ in $\measuredangle BAC = 45^\circ$.

PRIJEVOD

1. Trgovac je kupio za 212100 din robe. Prodao je 2/3 te robe sa 5% dobiti. Ostatak robe je prodao sa 1/70 gubitka. Koliko iznosi konačni dobitak?

2. Neki prirodni broj je djeljiv sa 7. Pri dijeljenju tog broja sa 4, 5 ili 6 dobijemo ostatak 2. Odredi najmanji takav broj.

3. Neki prirodni broj ima na mjestu jedinica znamenku 0. Ako tu znamenku izostavimo dobijemo broj koji je za 27405 manji od prvobitnog broja. Odredite prvobitni broj.

4. U trokutu ABC kut $\gamma = 40^\circ$. Simetrale kuta γ i vanjskog kuta γ_1 sijeku pravac AB u točkama D i E, tako da B leži između D i E. Trokut CDE je jednakokračan. Izračunati unutrašnje kuteve α i β trokuta ABC.

5. Konstruiraj trapez ako je zadano: AB=7cm, CD=3cm, $\measuredangle DAB=90$, $\measuredangle BAC=45$.

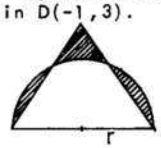
VII RAZRED

1. Osnovna množica je Z. Poišči množico rešitev neenačbe
$$\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{22}{33}.$$

2. Avtomobilist prevozi z 2 litroma bencina 35 km poti. Vozi s stalno hitrostjo in sicer prevozi v 3 urah 280 km poti. Koliko časa bo vozil s 5 litri bencina?

3. Izračunaj ploščina štirikotnika, ki ima za oglišča točke s koordinatami A(-3,-1), B(3,-1), C(3,5) in D(-1,3).

4. Nad premerom polkroga je narctan enakostranični trikotnik kot kaže risba. Izrazi s polmerom r ploščina črtkanega lika.



5. Stranica pravilnega večkotnika, ki ima 252 diagonal, meri 10 cm. Koliko meri njegov obseg?

PRIJEVOD

1. Riješi nejednadžbu u skupu Z:
$$\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{22}{33}.$$

2. Automobil prevali 35 km sa 2 litre benzina. Vozi konstantnom brzinom i predje 280 km puta za 3 sata. Koliko sati bi vozio sa 5 litara benzina?

3. Izračunaj površinu četverokuta sa slijedećim koordinatama: A(-3,-1), B(3,-1), C(3,5), D(-1,3).

4. Nad promjerom polukruga nacrtan je jednakostranični trokut slici. Izrazi površinu iscrtkanog lika pomoću polumjera r.

5. Stranica pravilnog mnogokuta sa 252 dijagonala iznosi 10 cm. Koliko iznosi njegov opseg?

VIII RAZRED

1. Rešitev enačbe
$$\frac{4x-2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(x+9) - \frac{3x-1}{4}\right) = 3 - \frac{2(6-x)}{3}$$
je abscisa presečišća premice p z abscisno osjo. Iz premica seče ordinatno os v točki A(0,4).
Zapiši linearno funkcijo, ki ima za graf premico p.

2. a) Izračunaj kvadrat števila 19999999993 tako, da uporabiš obrazec za kvadriranje dvočlenika.

b) Izračunaj produkt števil 130000000003 in 129999999997 tako, da uporabiš obrazec za razliko kvadratov.

3. Na zemljevidu Julijskih Alp, narisanem v merilu 1:75000, so vrhovi Triglava (visok je 2864 m), Razorja (2601 m) in Prisojnika (2547 m) na eni premici. Razor je med Triglavom in Prisojnikom. Razdalja med Prisojnikom in Razorjem meri na zemljevidu 30 mm, razdalja med Razorjem in Triglavom pa 70 mm. Ali lahko z vrha Prisojnika vidimo vrh Triglava? Nariši ustrezno skico in odgovor preveri z računom.

4. Diagonalo kvadrata s stranico a podaljšamo preko oglišča A za njeno dolžino. Če oglišče C prezrcalimo preko oglišča A, dobimo točko E. Ko točko E zvežemo z ogliščema B in D, dobimo štirikotnik BCDE.
Izrazi z a ploščino in obseg tega štirikotnika.

5. Večja kocka ima za 50 % daljši rob kot manjša. Za koliko odstotkov se razlikujeta površini obeh kock in za koliko odstotkov prostornini?

P R I J E V O D

1. Rješenje jednadžbe

$$\frac{4x-2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(x+9) - \frac{3x-1}{4}\right) = 3 - \frac{2(6-x)}{3}$$

je apscisa presjecišta pravca p i apscisne osi. Taj pravac siječe ordinatu u točki A(0,4). Napišite jednadžbu pravca p.

2. a) Izračunati kvadrat brojeva 19999999993 i 129999999997 tako da upotrebiš obrazac za razliku kvadrata.

3. Na karti Julijskih Alpa, nacrtanoj u mjerilu 1:75000, su vrhovi Triglav (visok 2864 m), Razor (visok 2601 m) i Prisojnik (visok 2547 m) na jednom pravcu. Razor je izmedju Triglava i Prisojnika. Udaljenost izmedju Prisojnika i Razora na karti iznosi 30 mm, a udaljenost izmedju Triglava i Razora 70 mm. Da li sa vrha Prisojnika vidimo vrh Triglava? Nacrtaj skicu i odgovor provjeri računom.

4. Dijagonala kvadrata stranice a je produžena preko vrha A za svoju duljinu. Tako dobijemo točku E koja je simetrična točki C u odnosu na A. Spojimo li B i D sa E dobijemo četverokut BCDE. Odredi površinu tog četverokuta.

5. Veća kocka ima za 50 % dulji brid nego manja kocka. Odredite razliku oplošja i volumena tih kocaka.

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

14. maj 1986.

VII R A Z R E D

1. Mojca Pokrajculja je za svoje prijatelje skuhala poln lonec kaše. Muha je prišla prva. Dobila je eno desetino kaše. Za muho je prišla žaba. Tej je Mojca dala eno devetino preostale kaše. Zajec, ki je potem priskakljal, je dobil osmino kaše, ki je še ostala. Lisica je dobila sedmino preostale kaše, volk šestino kaše, ki je ostala, koje lisica pojedla svoj delež, medved pa je postrgal lonec do konca.
Izračunaj, koliko kaše je dobil vsak.

2. Dokaži, da ima izraz

$$\frac{7^{2n+3} \cdot 7^{3n+2}}{7^{5n+2}}$$

enako vrednost za vse vrednosti spremenljivke n.

3. Kakšne oblike naj bo naravno število b, da bo izraz

$$b^4 - 4b^3 + 4b^2$$

deljiv s 3 ? Poišči vse rešitve.

4. Središče kroga je oglišče kvadrata s stranico a.
Kolikšen mora biti polmer kroga, da bo ploščina preseka kroga in kvadrata enaka 50 % ploščine kvadrata?

5. Enaki krožnici s polmerom 3 cm se sekata tako, da sta v vsakem presečišču tangenti na obe krožnici pravokotni druga na drugo.
Načrtaj krožnici in opiši postopek.
Izračunaj obseg preseka obeh krogov.

P R I J E V O D

1. Mojca Pokrajculja je za svoje prijatelje skuhala pun lonac kaše. Prva je došla muha. Dobila je jednu desetinu kaše. Za njom je došla žaba. Mojca joj je dala devetinu preostale kaše. Zec, koji je potom doskakutao, dobio je osminu kaše što je još preostala. Lisica je dobila sedminu preostale kaše, vuk šestinu kaše, koja je ostala nakon što je lisica pojela svoj dio, a medvjed je polizao ostatak u loncu.
Izračunaj, koliko je svaki dobio kaše.

2. Dokaži da izraz:

$$\frac{7^{2n+3}\ 7^{3n+2}}{7^{5n+2}}$$

ima jednaku vrijednost za sve vrijednosti varijable $n \in N$.

3. Kojeg oblika mora biti prirodni broj b da bi izraz
$$b^4 - 4b^3 + 4b^2$$
bio djeljiv sa 3? Nadji sva rješenja.

4. Središte kruga je vrh kvadrata stranice a. Koliki mora biti polumjer kruga, da bi površina presjeka kruga i kvadrata bila jednaka 50% površine kvadrata?

5. Jednake kružnice polumjera 3 cm sijeku se tako da su u svakom sjecištu tangente na obje kružnice medjusobno okomite. Izračunajte opseg presjeka krugova.

VIII R A Z R E D

1. Delavec dobi 4000 din na uro. Sprejme delo, ki naj bi ga opravil v 16 urah. Če to naredi prej, mu plačajo vsako uro 75% dražje.
V kolikšnem času mora opraviti to delo, da bo zaslužil 5000 din na uro?

2. Katera trimestna naravna števila se povečajo za 54, če zamenjamo cifri na mestu enic in desetic, in se zmanjšajo za 360, če zamenjata svoji mesti cifri stotic in desetic?

3. Iz enakostraničnega valja s polmerom r izrežemo kvader. Osnovna ploskev kvadra ima eno stranico enako polmeru osnovne ploskve valja.
Izrazi z r prostornino in površino kvadra.

4. Stranica pravilne petkrake zvezde meri 1 m. Če stranico podaljšamo za 1 cm, se ploščina zvezde poveča za 2,13864 dm^2.
Izračunaj ploščino prvotne zvezde.

5. Mravlja se odpravi po zunanjosti kvadraste škatle ABCDEFGH z odprtino EFGH iz točke E proti točki C po najkrajši poti.
Dolžine robov so
AB = 6 cm, BC = 18 cm in BF = 10 cm.
V točko C pride 2 sekundi prej, kot če bi šla po robovih EF, FG in GC. (škatla stoji z osnovno ploskvijo ABCD na tleh.)
S kolikšno hitrostjo se premika?

P R I J E V O D

1. Radnik dobije 4000 din na sat. Dobije posao koji može završiti za 16 sati. Ukoliko završi posao prije, plaća mu se 75 % naknade za svaki sat skraćenja rada.
Koliko sati mora radnik raditi da bi dobio 5000 din na sat?

2. Koji troznamenkasti brojevi se povećaju za 54, ako im znamenke desetica i jedinica zamijene mjesta, a smanje se za 360 ako zamijene mjesta znamenke stotica i desetica?

3. Iz jednakostraničnog valjka polumjera r izrežemo kvadar. Osnovica kvadra ima jednu stranicu jednaku polumjeru valjka. Izrazi volumen i oplošje kvadra pomoću r.

4. Stranica pravilne peterokrake zvijezde je 1 m. Ako stranicu produljimo za 1 cm, površina zvijezde se poveća za 2.13864 dm. Izračunaj površinu prvobitne zvijezde.

5. Mrav se uputi po unutrašnjosti kvadra ABCDEFGH iz točke E prema točki C najkraćim putem. Dužine bridova su AB= 6 cm, BC=18 cm, BF = 10 cm. U točku C stigne 2 sekunde prije nego što bi stigao kad bi išao rubovima EF, FG i GC. (Kvadar stoji s osnovicom ABCD na tlu.). Kojom brzinom se kreće?

R J E Š E N J A

OPĆINSKO NATJECANJE

VI R A Z R E D

1. (2/3).212100=141400
   5% od 141400 = 7070 dobiti
   Gubitak na ostatku (1/3)(212100)(1/70)=1010
   Konačni dobitak iznosi 7070-1010=6060 dinara.

2. V(4,5,6) = 2.2.3.5 = 60
   60+2 i 120+2 nisu djeljivi sa 7.
   180+2 je djeljiv sa 7 i to je najmani takav broj.

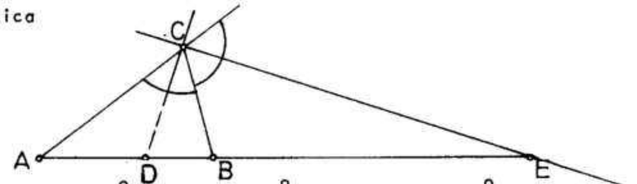
3. 1. način
   x-(1/10)x=27405 ; (9/10)x=27405 ; (1/10)x=3045
   (10/10)x=30450 ; x=30450.

   2. način
   Traženi broj prikažemo kao $\overline{abcd0}$.

$$\begin{array}{r} abcd \\ +\ 27405 \\ \hline abcd0 \end{array}$$

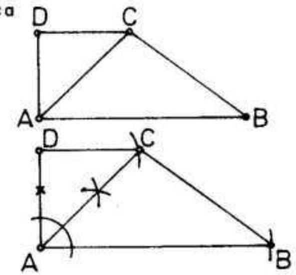
   Tada je d=5, c=4, b=0 i a=3. Traženi broj je 30450.

4. skica



$\measuredangle DCB = 20°$, $\measuredangle BCE = 70°$, $\Longrightarrow \measuredangle DCE = 90°$
zato mora biti $\measuredangle EDC = \measuredangle DEC = 45°$
$\measuredangle DCB = 20°$ i $\measuredangle EDC = 45° \Longrightarrow \measuredangle DBC = 115°$
$\measuredangle ACB = 40°$ i $\measuredangle ABC = 115° \Longrightarrow \measuredangle BAC = 25°$
Kut $\alpha = 25°$, kut $\beta = 115°$.

5. skica



Jer je ABCD trapez i $\measuredangle BAC = 45°$ takodjer je $\measuredangle ACD = 45°$, pa zbog $\alpha = 90° \Longrightarrow \measuredangle CAD = 45°$
Odavde je AD = CD.

Konstruiramo osnovicu, pravi kut i kut $\measuredangle BAC$, sa šestarom izmjerimo AD i DC i vrhove povežemo

VII R A Z R E D

1. $\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{22}{33}$

$$\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{15} < \frac{3(1-n)}{15} < \frac{10}{15}$$

$$5 < 3(1-n) < 10$$

$$1-n \in \{2,3\}$$

$$n \in \{-1,-2\}$$

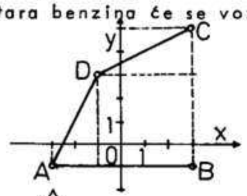
2.

litre (l)	km (s)	sat (t)
2	35	
	280	3
5		

l=k.s , k=l/s , k=2/35
l=(2/35).280=16
t=k .s , k=t/s , k=3/16
t=(3/16). 5=15/16

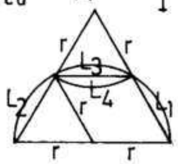
S 5 litara benzina će se voziti 15/16 sata (56 min 15 sek)

3. skica



$P = P_1 + P_2 + P_3$
P = 4.4+ (2.4/2)+ (2.4/2)
P=16+4+4=24

4. skica



Kružni odsječak L_1 je sukladan odsječku L_3, odsječak L_2 odsječku L_4, pa je površina iscrtkanog lika jednaka šestini površine kruga.
$P = (\pi r^2)/6$.

5. Broj dijagonala n-kuta je n(n-3)/2;
   n(n-3)/2= 252; n(n-3)=504;
   504=2.2.2.3.3.7=24.21 $\Longrightarrow$ n=24
   O=24.a=24.10=240 cm

VIII R A Z R E D

1. $\frac{4x-2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(x+9) - \frac{3x-1}{4}\right) = 3 - \frac{2(6-x)}{3}$

$$\frac{4x-2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{x+9}{3} - \frac{3x-1}{4}\right) = 3 - \frac{2(6-x)}{3}$$

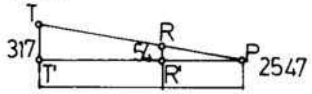
$$\frac{4x-2}{5} - \frac{x+9}{6} + \frac{3x-1}{8} = 3 - \frac{2(6-x)}{3} \quad / \cdot 120$$

$96x-48-20x-180+45x-15 = 360-480+80x$
$121x-243 = -120+80x$
$41x = 123$
$x = 3$
$A(0,4),\ B(3,0),\ y=kx+n.$
$4 = k.0+n \Rightarrow n = 4$
$0 = k.3+4 \Rightarrow k = -4/3$
$y = (-4/3).x+4$

2. a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$a = 20000000000,\ b = -7$
$19999999993 = 400000000000000000000-14.20000000000+49$
$= 400000000000000000049-280000000000$
$= 399999999720000000049$

b) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$a = 130000000000,\ b = 3$
$130000000003.129999999997 = 16900000000000000000000-9$
$= 16899999999999999999991$

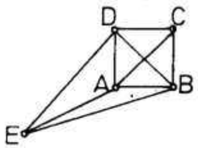
3. skica



$l' = k\cdot l$
$30=l/75000,\ l=30\cdot 75000=225000$
$70=l''/75000,\ l''=70\cdot 75000=525000$
$l=225$ m, $l''=525$

$TT':PT'=RR':PR',\quad TT'=(PT'\cdot RR')/PR'=(7500\cdot 54)/2250=180$
Triglav se sa Prisojnika ne vidi jer je TT u prirodi 317 m

4. skica



$EB^2 =(d/2)^2 + ((3/2)d)^2$
$EB^2 = 2a^2/4 + 9.2a^2/4$
$EB^2 = 20a^2/4$
$EB^2 = 5a^2,\quad EB = a\sqrt{5}$
$P = 2d.d/2=d.d=2a.a$,
$O=2a+2a\sqrt{5} =2a(1+\sqrt{5})$

5. $a' = (3/2)a$
$P' = 6a\ .a$
$P' = 6(3/2)a.(3/2)a$
$P' = 6(9/4)a.a$
$P' = (9/4)P$
$P' - P = (5/4)P = 125\%\ P$

$V' = a'.a'.a'$
$V = (27/8).a.a.a$
$V' = (27/8)V$
$V - V' = (19/8)V=237,5\%\ V$

REPUBLIČKO NATJECANJE

VII RAZRED

1.

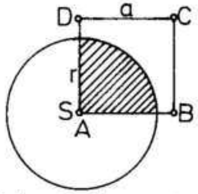
	dobije	ostane
muha	1/10	9/10
žaba	1/9 od 9/10=1/10	8/10
zec	1/8 od 8/10=1/10	7/10
lisica	1/7 od 7/10=1/10	6/10
vuk	1/6 od 6/10=1/10	5/10
medvjed	5/10 = 1/2	

Svaki je dobio 1/10 kaše, osim medvjeda koji je dobio 1/2 kaše.

2. $\dfrac{7^{2n+3}\cdot 7^{3n+2}}{7^{5n+2}} = \dfrac{7^{5n+5}}{7^{5n+2}} = 7^3.$

3. $b^4 - 4b^3 + 4b^2 = b^2(b^2 - 4b + 4) = b^2(b-2)^2.$
Broj b mora biti oblika 3k odnosno 3k+2.

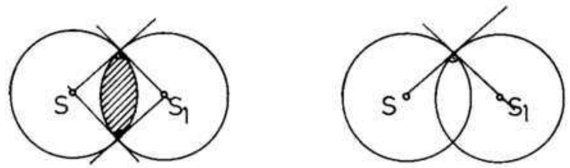
4.



$\dfrac{\pi r^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$
$\pi r^2 = 2a^2$
$r^2 = \dfrac{2a^2}{\pi}$
$r = a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

Polumjer kruga je $r = a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

5.



$O = 2\,\dfrac{2\pi r}{4}$
$O = \pi r\ ;\quad O = 3\pi\ .$

VIII RAZRED

1. $4000x + \frac{3}{4}\cdot 4000(16-x)=5000x$,
$4x + 3(16-x) = 5x,$
$x = 12.$

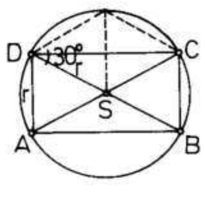
2. $100a + 10b + c + 54 = 100a + 10c + b$

$$9b - 9c = -54$$
$$c = b + 6$$
$$100a + 10b + c - 360 = 100b + 10a + c$$
$$90a - 90b = 360$$
$$b = a - 4$$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b=a-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
c=b+6	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Traženi brojevi su 406, 517, 628 i 739.

3.



$AD = r\ ,\ AB = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$

$P = 2r\sqrt{3} \cdot r + (2r\sqrt{3}\ 2r + 2r \cdot 2r)$

$P = 2r^2\sqrt{3} + 4r^2\sqrt{3} + 4r^2$

$P = 2r^2(3\sqrt{3} + 2)$

$P = 2r^2(3\sqrt{3} + 2)$

$V = (r \cdot r\sqrt{3}) \cdot 2r$

$V = 2r^3\sqrt{3}$

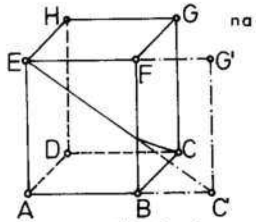
4. $l' = k \cdot l\ ,\ K = \frac{l'}{l} = \frac{101}{100} = 1{,}01.$

$p' = k^2 \cdot p\ ,\ p' = 1{,}0201 \cdot p$

$p' = p + 2{,}13864$

$$1{,}0201p = p + 2{,}13864$$
$$1{,}0202p - p = 2{,}13864$$
$$0{,}0201p = 2{,}13864$$
$$p = 106{,}4\ dm^2$$
$$p = 1{,}064\ m^2$$

5.



najkraći put

$s^2 = (18+6)^2 + 10^2$

$s^2 = 576 + 100$

$s^2 = 676$

$s = 26$

$\frac{26}{v} + 2 = \frac{6+18+10}{v}$

$26 + 2v = 34$

$2v = 8$

$v = 4$

Mrav se giba brzinom 4 cm u sekundi.

SR MAKEDONIJA

"N U M E R U S"
SR MAKEDONIJA

09. 04. 1988. godine

REGIONALNO NATJECANJE

V RAZRED

1. Zadani su skupovi:
$A = \{x \mid x \in N \text{ i } x \leq 10\}$;
$B = \{x \mid x \in N \text{ i } 5 \leq x < 15\}$;
$C = \{x \mid x \in N \text{ i } x \text{ je paran broj i } x \leq 12\}$.
Formiraj ih, prikaži tabelom, a zatim dokaži da za njih vrijedi jednadžba: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2. Četiri biciklista kreću se kružnim putem različitim brzinama. Prvi ga obidje za 10, drugi za 12, treći za 15 i četvrti za 18 minuta. Ako krenu sa iste početne točke, nakon koliko vremena će se naći na početnoj točki? Koliko će puta za to vrijeme svaki od njih obići krug?

3. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva čiji je zbroj 3?

4. Da bi se njiva, čija je dužina dvaput veća od širine, ogradila sa tri reda žice, bilo je upotrebljeno 720 metara žice. Njiva je zasijana pšenicom. Koliko kilograma pšenice će se dobiti sa ove njive, ako se sa jednog ara dobije 50 kg?

ORIGINAL

1. Dadeni se množestvata:
$A = \{x \mid x \in N \text{ i } x \leq 10\}$;
$B = \{x \mid x \in N \text{ i } 5 \leq x < 15\}$;
$C = \{x \mid x \in N, \text{ x e paren broj i } x \leq 12\}$.
Formiraj gi, zapiši gi na tabelaren način i pokaži deka za niv važi pravenstvoto: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2. Četiri belosipedisti se dvižat po kružna pateka so različni brzini: prviot ja obikoluva za 10, vtoriot za 12, tretiot za 15 i četvrtiot za 18 minuti. Ako trgnat od ista početna točka, posle kolku vreme ke bidat site na početnata točka? po kolku pati meguvreme sekoj od niv ja pominad patekata?

3. Kolku petcifren broevi ima na koi zbirot na cifrite im e 3?

4. Edna niva, vo koja dolžinata e dvapati pogolema od širinata e zagradena so tri reda žica, za koe bile upotrebeni 720 metri žica. Nivata e poseana so pčenica. Kolku kilogrami pčenica se dobieni od nivata, ako od 1 ar se dobieni 50 kg. pčenica?

VI RAZRED

1. Nadji razlomak jednak 5/7 kod kojeg je zbroj brojnika i nazivnika jednak 60.

2. Kvadratna njiva površine 6162.25 m^2 treba se zagraditi sa tri reda žice. Koliko je žice potrebno za ogradjivanje njive?

3. Koliko strana ima mnogokut ako mu je broj strana dva puta veći od broja dijagonala povučenih iz jednog vrha?

4. U jednakokračnom trokutu ABC (AC=BC) sa opsegom 22 cm povučena je težišnica AA_1. Opsezi trokuta ABA_1 i AA_1C iznose redom 17 cm i 19 cm. Odredite duljine stranica trokuta ABC.

ORIGINAL

1. Najdi dropka ednakva na 5/7, na koja zbirot od broitelot i imenitelot ke i bide 60.

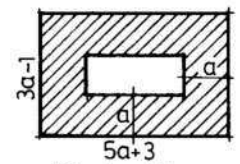
2. Kvadratna niva so ploština 6162,25 m^2 treba da se zagradi so 3 reda žica. Kolku žica e potrebna za zagraduvanjeto na nivata.

3. Kolku strani ima mnoguagolnikot ako brojot na stranite mu e dvapati pogolem od brojot na dijagonalite povlečeni od edno teme?

4. Vo ramnokrakiot triagolnik ABC (AC = BC), so perimetar 22 cm, e povlečena medijana AA_1. Perimetrite na triagolnicite ABA_1 i AA_1C soodvetno se 17 cm i 19 cm.
Da se opredelat dolžinite na stranite na $\triangle ABC$.

VII RAZRED

1. Zapiši u obliku polinoma normalnog oblika formulu za računanje površine šrafiranog dijela crteža.



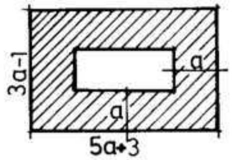
2. U jednadžbi $(k+2)x - ky = (k-1)y + x - 15$ odredite parametar k tako da bude zadovoljena za $x=2$ i $y=3$.

3. Konstruiraj jednakokračan trapez ako je dana veća osnovica a, krak c i dijagonala f.

4. Promjer AB kružnice k produžen je do proizvoljne točke C, a kroz C je povučena sekanta CDE na kružnicu k, tako da je dužina $CD=(1/2)AB$. Dokaži da je kut$\measuredangle ADE = 3\measuredangle OCD$.

ORIGINAL

1. Zapiši ja vo vid na polinom vo normalen vid formulata za presmetuvanje na ploštinata na šrafiraniot de od crtežot.



2. Vo ravenkata $(k+2)x - ky = (k-1)y + x - 15$ opredeli go parametarot k, taka što taa da bide zadovolena za $x=2$ i $y=3$.

3. Konstruiraj ramnokrak trapez ako e dadena pogolemata osnova a, krakot c i dijagonalata f.

4. Dijametarot AB na kružnicata k e prodolžen do proizvolnata točka C, a niv C e povlečena sekanta CDE na kružnicata k, taka što $CD = 1/2\ AB$.
Dokaži deka $\measuredangle AOE = 3\measuredangle OCD$.

VIII RAZRED

1. Dokaži da je broj $\overline{xyxy}$ djeljiv sa 101.

2. Stranice a, b, c trokuta ABC odnose se kao 4:6:7. Trokut $A_1B_1C_1$ sličan je danom i ima opseg $L_1 = 102$ cm.
Naći stranice trokuta $A_1B_1C_1$.

3. Neki indijski maharadža je za svojih 6 sinova ostavio dijamante jednake vrijednosti i naredio da ih podijele tako da najstariji sin dobije 1/7 dijamanata i još 1, drugi 1/7 ostatka i još 2, treći 1/7 ostatka i još 3 itd. i najmladji 1/7 ostatka i još 6 dijamanata. Na kraju se ustanovilo da su svi sinovi dobili isti broj dijamanata. Koliko je dijamanata ostavio maharadža i koliko je dobio svaki sin?

4. Na stranici AC trokuta ABC nanesen je odsječak $AM=AB$, a na produžetku CA, preko A, počevši od A odsječak $AP=AB$.
Dokaži da:
a) su BM i PM okomiti na simetrale kutova $\measuredangle CAB$ i $\measuredangle BAP$.
b) je trokut PBM pravokutan i izračunati njegov opseg ako je $AB= 3$ cm i kut $\measuredangle MPB=30^\circ$.

ORIGINAL

1. Dokaži deka brojot $\overline{xyxy}$ e deliv so 101.

2. Stranite a,b,c na ABC se odnesuvaat kako 4:6:7. Triagolnikot $A_1B_1C_1$, sličen so dadeniot, ima perimetar $L_1 = 102$ cm. Najdi gi stranite na $\triangle A_1B_1C_1$.

3. Eden indiski maharadja na svoite 6 sinovi im ostavil dijamanti so ednakva vrednost i naredil da gi podelat taka što najstariot

sin da dobi 1/7 od dijamantite i ušte 1, vtoriot 1/7 od ostanatite i 2 dijamanti, tretiot 1/7 od ostanatite i ušte 3 dijamanti itn.
I deka site sinovi dobile po ist broj dijamanti.
Kolku vkupno dijamanti ostavil maharadjata i po kolku dobil sekoj od sinovite?

4. Na stranata AC na $\triangle ABC$ e nanesena otsečkata $AM=AB$, a na prodolženieto na stranata CA, preku A, počnuvajki od A, otsečkata $AP = AB$. Da se dokaže deka:
a) BM i BP se normalni na simetralite na aglite $\measuredangle CAB$, odnosno BAP,
b) $\triangle PBM$ e pravougaolen, i da se presmeta negoviot perimetar, ako $AB = 3$ cm i $\measuredangle MPB = 30^\circ$.

REPUBLIČKO NATJECANJE

07. 05. 1988. god.

VII RAZRED

1. Jedan broj pri dijeljenju sa 8 daje ostatak 5, a drugi pri dijeljenju sa 8 daje ostatak 3. Dokaži da produkt tih dvaju brojeva pri dijeljenju sa 8 daje ostatak 7.

2. Jedna brigada traktorista treba poorati komad zemlje za odredjeno vrijeme, pri čemu im je dnevna norma 360 dekaari. Traktoristi su nadmašili normu za 16 2/3 %, pa im je posljednjeg dana odredjenog roka ostalo da pooru još 60 dekaari. Koliko dekaari je komad zemlje?

3. U pravokutnom trokutu ABC konstruirana je visina CD (h_c) na hipotenuzu i u trokute ABC, ADC, BDC upisane su kružnice ($k(O,r)$, $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$. Dokaži da je zbroj polumjera triju kružnica jednak visini CD na hipotenuzu.

4. Od točke M, što leži na pravcu p, povuci polupravac MN. Povuci pravac q, paralelan sa p, koji simetrale dobijenih suplementnih kuteva siječe u točkama P i Q, a polupravac MN u točki S. Dokaži da je točka S središte odsječka PQ.

ORIGINAL

1. Eden broj pri delenjeto so 8 dava ostatok 5, a drug pri delenjeto so 8 dava ostatok 3.
Dokaži deka proizvodot na tie dva broja pri delenjeto so 8 dava ostatok 7.

2. Edna brigada traktoristi treba da izorat blok zemja za opredeleno vreme, pri što dnevnata norma im bila 360 dekari. Traktoristite ja natfrlile normata za 16 2/3 % i posledniot den od opredelenoto vreme im ostanalo da izorat 60 dekari

Presmetaj kolku dekari bil brokot.

3. Vo pravoagolniot $_\Delta ABC$ konstruirana e visinata CD (hc) na hipotenuzata i vo triagolnicite ABC, ADC i BDC vpišani se kružnicite $k(O,r)$ $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$. Da se dokaže deka zbirot od radiusite na trite kružnici e ednakov na visinata na hipotenuzata CD.

4. Od točkata M, što leži na pravata p, povleči poluprava MN. Povleči prava q, paralelna so p, koja simetralite na dobienite naporedni agli gi seče vo točkite P i Q, a polupravata MN vo točkata S.
Dokaži deka točkata S e sredina na otsečkata PQ.

VIII R A Z R E D

1. Nakon što je prešao polovinu puta izmedju mjesta A i B, vozač kamiona je povećao brzinu za 25%, zbog čega je u mjesto B stigao pola sata ranije.
Za koliko sati je prešao čitav put izmedju mjesta A i B,

2. Zbroj tri realna broja je 0. Dokaži da je zbroj kubova tih triju brojeva jednak trostrukom produktu tih brojeva.

3. Konstruiraj kvadrat čija dva nasuprotna vrha leže na zadanom pravcu p, a druga dva na dvije zadane kružnice.

4. Zadan je pravokutni trokut ABC sa pravim kutem u vrhu C.
Nad katetama CA i CB konstruirani su izvana kvadrati CDEA i CBFK.

1° . Spoji vrhove D i K, pa dokaži da produžena hipotenuzina visina CC_1 prolazi kroz središte M odsječka DK.

2° . Iz vrhova E i F spusti okomice na EE_1 i FF_1 na produženje hipotenuze AB, pa dokaži da su ove okomice jednake hipotenuzinim odsječcima: $EE_1 = AC_1$, $FF_1 = C_1B$.

O R I G I N A L

1. Otkako pominal polovina od patot megu mestata A i B, vozačot na kamionot je zgolemil brzinata za 25%, poradi što vo mestoto B stignal polovina čas porano.
Za kolku časa avtomobilot go pominal patot od A do B.

2. Zbirot na tri realni broja e 0. Dokaži deka zbirot na kubovite na tie broevi e ednakov na trikratniot proizvod na tie broevi.

3. Da se konstruira kvadrat čii dve sprotivni teminja ležat na dadena prava p, a drugite dve na dve dadeni kružnici.

4. Daden e pravoagolen triagolnik ABC so prav agol vo temeto C. Nad katetite CA i CB, odnadvor, konstruirani se kvadrati CDEA i CBFK.

1° . Svrzi gi teminjata D i K, pa dokaži deka prodolženata hipotenuzina visina CC_1 minuva niz sredinata M na otsečkata DK.

2° . Od teminjata E i F na kvadratite spušteni normalni EE_1 i FF_1 na prodolženieto na hipotenuzata AB, pa dokaži deka ovie normali se ednakvi na hipotenuznite otsečki: $EE_1 = AC_1$, $FF_1 = C_1B$.

R J E Š E N J A

V RAZRED

1. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
   $B = \{5,6,7,8,9,10,11,12,,13,14\}$
   $C = \{2,4,6,8,10,12\}$.
   $A \setminus (B \cup C) = \{1,3\}$
   $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5,7,9\} = \{1,3\}$.

2. V $(10,12,15,18) = 180$. Za 180 minuta. Prvi će prijeći 18, drugi 15, treći 12 i četvrti 10 krugova.

3. 11100, 11010, 11001, 10101, 10011, 12000, 10200, 10020, 10002, 21000, 20100, 20010, 20001, 30000.

4. $3\,(2x+4x) = 720 \Rightarrow x = 40$ m. Dakle, površina njive iznosi $40 \cdot 80 = 3200\ m^2 = 32$ ara.
   Pšenice će se dobiti $32 \cdot 50 = 1600$ kg.

VI RAZRED

1. $\frac{x}{60-x} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7x = 300-5x \Rightarrow x=25$.
   Traženi razlomak je $\frac{25}{35}$.

2. $a = \sqrt{6162{,}25} = 78{,}5$; $O = 4a = 4 \cdot 78{,}5 = 314$ m.
   Potrebno je $3 \cdot 314 = 942$ m žice.

3. $2(n-3) = n \Rightarrow n = 6$.

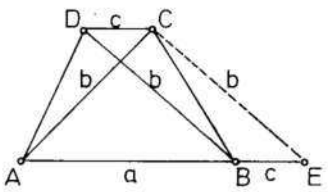
4. $AC = BC = 8$ cm, $AB = 6$ cm.

VII RAZRED

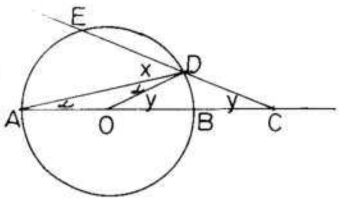
1. $P = (5a+3)\cdot(3a-1)-(3a+3)\cdot(a-1)$,
   $P = 12a^2 + 4a - 2$.

2. Uvrštavanjem $x=2$, $y=3$ u zadanu jednadžbu, imamo:
   $(k+2)\cdot 2 - 3k = (k-1)\cdot 3 + 2 - 15 \Rightarrow k = 5$.

3. Neka je ABCD jednakokračan trapez. Povucimo CE∥DB. Trokut ACE se lako konstruira $(a+c,\ f,f)$. Na stranicu AE $(a+c)$ nanesimo a i dobijemo točku B. Točku D dobijemo kao sjecište c i f.



4. U trokutu ACD je $x = \angle + y$ (vanjski kut). U trokutu AOD je $y = 2\angle$ (vanjski kut).
   Dakle, $x = \angle + y = \angle + 2\angle = 3\angle A$
   što je i trebalo dokazati.



VIII RAZRED

1. $\overline{xyxy} = 1000x+100y+10x+y = 1010x+101y = 101(10x+y)$.

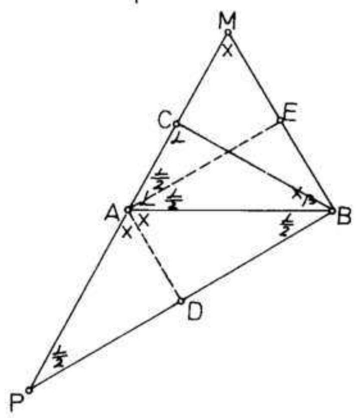
2. $k = \frac{O'}{O} = \frac{102}{17} = 6$; $a' = 6 \cdot 24$; $b' = 6 \cdot 6 = 36$; $c' = 6 \cdot 7 = 42$.

3. Ostavio je 42 dijamanta, a svaki sin je dobio 7 dijamanata.

4. a) Pošto su trokuti APD i ADB sukladni, AD je ujedno simetrala stranice PB, pa je $AD \perp PB$. Analogno se dokazuje da je $BM \perp AE$.

   b) $\measuredangle PBM = \frac{\angle}{2} + x = 90^\circ$.

   Ako je $\measuredangle MPB = 30^\circ \Rightarrow \angle = 60^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$.
   Dalje se lako dokazuje da je:
   $PB = 3\sqrt{3}$; $MB = 3$; $PM = 6$.
   $O = 9 + 3\sqrt{3}$.



REPUBLIČKO NATJECANJE

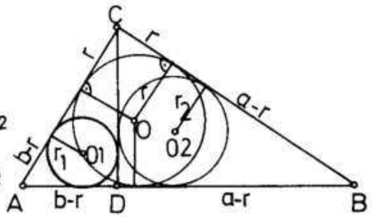
VII RAZRED

1. $x = 8m + 5$, $y = 8n + 3$.
$xy = (8m + 5)(8n + 3) = 8 \cdot 8mn + 3 \cdot 8m + 5 \cdot 8n + 15 =$
$= 8 \cdot 8mn + 3 \cdot 8m + 5 \cdot 8n + 8 + 7 = 8(8mn + 3m + 5n + 1) + 7.$
$xy = 8k + 7$, $k = 8mn + 3m + 5n + 1$.

2. $16\frac{2}{3}$ % od 360 je $\frac{50}{300} \cdot 360 = 60$.

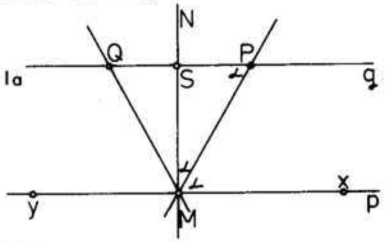
Znači brigada dnevno poore $360 + 60 = 420$ dekaari. Neka je ukupna površina x dekaari. Broj dana za koji se, sa normom od 360 dekaari, trebala poorati čitava površina je $x/360$. Za jedan dan manje, oruči 420 dekaari dnevno, brigada poore $x - 60$ dekaari. Znači:
$\frac{x}{360} - 1 = \frac{x - 60}{420} \Rightarrow x = 2160$ dekaari.

3. 1. Iz trokuta ABC $\Rightarrow$
$b - r + a - r = c$
$r = (a + b - c)/2$
2. Analogno, iz trokuta ADC $\Rightarrow$
$r_1 = (AD + CD - AC)/2 = (AD + h_c - b)/2$
3. Analogno, iz trokuta DBC $\Rightarrow$
$r_2 = (BD + CD - BC)/2 = (BD + h_c - a)/2$



Iz 1, 2 i 3 $\Rightarrow r + r_1 + r_2 =$
$(a + b - c + AD + h - b + BD + h - a)/2 = (-c + AD + BD + 2h)/2 = h$

4. 1. $\measuredangle SPM = \measuredangle PMX$, naizmjenični kutovi;
2. $\measuredangle SMP = \measuredangle PMX$, MP je simetrala SMX;
3. $\measuredangle SPM = \measuredangle SMP \Rightarrow$ trokut SPM je jednakokračan i $PS = SM$;
4. Analogno, trokut SMQ je jednakokračan i $SQ = SM \Rightarrow$
$\Rightarrow PS = SQ$.



VIII RAZRED

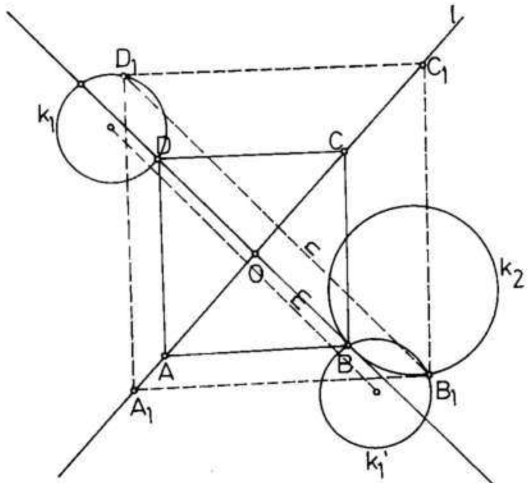
1. Neka je s udaljenost izmedju A i B, a t potrebno vrijeme uz prvobitnu brzinu. Brzina na prvoj polovici puta je s/t. Drugu polovicu puta predje u pola sata kraćem vremenu $(t/2 - 1/2)$, sa za 25% većom brzinom $((5/4)(s/t))$. Pa imamo:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{s}{t} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{t}{2} - \frac{1}{2}} \quad ; \quad \frac{5}{4}\,\frac{s}{t} = \frac{s}{t - 1}$$

$4t = 5t - 5 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow$ Put je prešao za 4,5 sata.

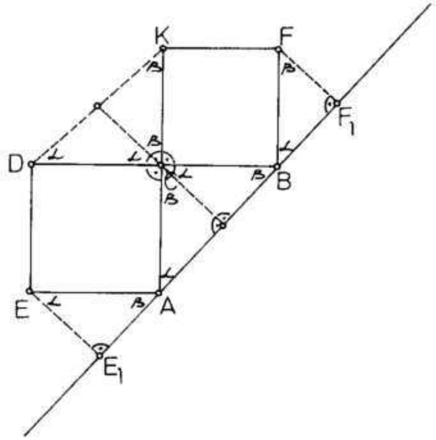
2. Neka $a, b, c \in R$.
$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$;
$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + (-a-b)^3 = a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 =$
$= 3ab(-a - b) = 3abc$.

3. Neka je zadan pravac l i dvije kružnice k_1 i k_2 u različitim poluravninama pravca l.
Analiza:
Konstruirajmo kružnicu k_1' koja je osno simetrična kružnici k_1 u odnosu na pravac l. Iz sjecišta kružnica k_2 i k_1' (B i B_1) povucimo okomice m i n na pravac l. Presjek pravca m odnosno n sa kružnicom k_1 su točke D i D_1. Pošto je $OD = OB = OA = OC$ lako dobijemo točke A i B. Analogno dobijemo A_1 i C_1.
Diskusija:
Ako su k_1 i k_2 u istoj poluravnini nema rješenja.
Ako je $k_2 \cap k_1' = \emptyset$ nema rješenja.
Ako je $k_2 \cap k_1' = \{B, B_1\}$ zadatak ima dva rješenja.
Ako je $k_2 \cap k_1' = \{B\}$ zadatak ima jedno rješenje.
Ako je $k_2 = k_1'$ zadatak ima beskonačno mnogo rješenja.



4\. 1° Sa slike uočavaom da su trokuti ABC i CDK sukladni, odnosno da je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle KDC = \alpha$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDK = \beta$. Pošto je $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle MCK = \beta$ i $\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle DCM = \alpha$ proizlazi da je $CM = DM = MK$.

2° Iz sukladnosti trokuta AEE_1 i ACC_1 odnosno CC_1B i BF_1F proizlazi da je $EE_1 = AC_1$, odnosno $FF_1 = C_1B$.



SR CRNA GORA

OPŠTINSKO TAKMIČENJE

VII RAZRED

1. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz koordinatni početak i tačku M (3,4), a zatim odrediti površinu i obim figure koju ograničavaju ta prava, Ox osa i ordinate tačaka M i N (6,y). Riješiti jednačinu: $|f(x)| - x = 5$, gdje je f(x) funkcija nadjena u prethodnoj tački.

2. Za koliko procenata se povećava površina kvadrata, ako se njegov obim povećao za 40%?

3. U trouglu ABC čije su stranice a=20 cm, b = 13 cm i c = 21 cm. Tačka M je podnožje visine h_c. Neka su N, P, Q središta stranica AB, BC i CA. Dokazati da je četvorougao MNPQ jednokraki trapez. Izračunati odnos površina trougla ABC i dobijenog trapeza.

4. U kružnom isječku veličine šestine kruga upisan je novi krug. Odrediti odnos površine isječka i kruga koji je u njega upisan.

5. Proizvod koja četiri uzastopna cijela broja je 3024.

VIII RAZRED

1. Data je prava $y=kx+n$
   a) Odrediti parametre k i n tako da prava prolazi kroz tačke A(1,4) i B(+2,1), a zatim za nadjene vrijednosti k i n riješiti nejednačinu $\frac{kx+n}{x} < 2$;

   b) Ako je n=3 koliko mora biti k ako se zna da prava dijeli skup tačaka $\{(x,y) | 0 \leq x \leq 4,\quad x \leq y \leq 2\}$ na dva dijela jednake površine.

2. Neki trocifreni broj se povećava za 45 ako cifre jedinica i desetica zamijene mjesta. Isti broj se smanji za 270 ako cifre stotina i desetica zamijene mjesta. Ako cifre stotina i jedinica zamijene mjesta dobiće se broj koji je veći od datog. Za koliko?

3. Bočne ivice trostrane piramide su uzajamno normalne, a površine bočnih strana su 6 cm^2, 4 cm^2 i 3 cm^2. Odrediti ivice i zapreminu piramide.

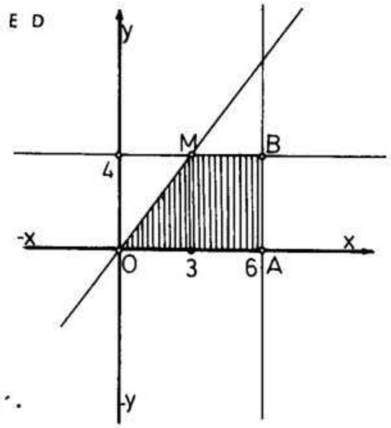
4. Površina lopte i površina prave kupe opisane oko te lopte odnose se kao 1:3. Naći odnos njihovih zapremina.

5. Odrediti sve parove cijelih brojeva x i y za koje važi jednost $x^2+y^2 = 2x$.

RJEŠENJA

OPĆINSKO NATJECANJE

VII RAZRED



1. $f(x) = \frac{4}{3}x$, $OM = 5$.

   $O_{OABM} = 3+4+6+5 = 18$.

   $P_{OABM} = \frac{(6+3)\cdot 4}{2} = 18$.

   Iz $|\frac{4}{3}x| = x+5 \Rightarrow$

   1° $\frac{4}{3}x = x + 5 \Rightarrow x = +15$.

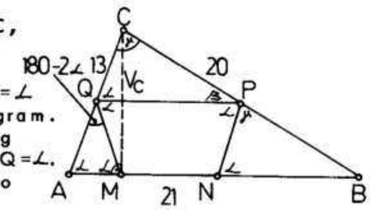
   2° $-\frac{4}{3}x = x+5 \Rightarrow x = -\frac{15}{7}$.

   Dakle, $x_1 = 15$, $x_2 = -\frac{15}{7}$.

2. $P = a^2$; $O = 4a$; $P' = a'^2$; $O' = 4a'$.

   $O' = 1,4O = 1,4 \cdot 4a = 5,6a$.

   $4a' = 5,6a$,
   $a' = 1,4a$.
   $P' = (a')^2 = (1,4a)^2 = 1,96a^2 = P + 0,96a^2 = P + 96\%P$.
   Povećala se za 96%.



3. Kako je PQ srednjica trokuta ABC, to je PQ||AB. Dakle, četverokut MNPQ je trapez.
   Neka je $\measuredangle CAB = \angle$, tada je $\measuredangle NPQ = \angle$ jer je četverokut ANPQ paralelogram.
   Kako je MQ težišnica pravokutnog trokuta AMC, to je $\measuredangle QAM = \measuredangle AMQ = \angle$.
   Tada je $\measuredangle MQA = 180 - 2\angle$, odnosno $MQP = \angle$.
   Dakle, trapez MNPQ je jednakokračan. Iz pravokutnih trokuta AMC i MBC dobivamo:

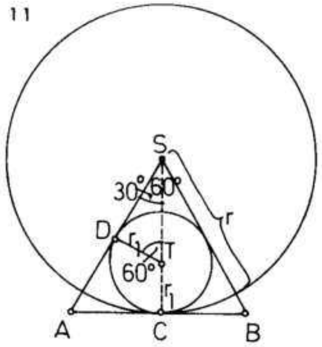
   $$\left.\begin{array}{l} v^2 = 13^2 - (21-x)^2 \\ v^2 = 20^2 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 20^2 - x^2 = 13^2 - (21-x)^2 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow v_c = 12 \text{ cm}.$$

   $P_{\Delta ABC} = \frac{21\cdot 12}{2} = 126 \text{ cm}^2$; $P_{\Delta NBP} = P_{\Delta QPC} = \frac{12\cdot 6}{4} = \frac{63}{2} \text{ cm}^2$;

   $P_{\Delta AMQ} = \frac{5\cdot 12}{2} = 30 \text{ cm}^2$.

$P_{\square MNPQ} = 126 - 2 \cdot \frac{63}{2} - 30 = 33\ cm^2$.

$P_{\Delta ABC} : P_{\square MNPQ} = 126:33 = 42 : 11$



4. Neka je $TC=TD=r_1$. Tada je $ST=2r_1$, a $SC = 3r_1$ (polovina istostraničnog trokuta). Kako je $SC=3r_1$, to je $3r_1=r$ (polumjer datog kruga).

$P_\Delta = \frac{r^2\pi}{6} = \frac{(3r_1)^2\pi}{6} = \frac{3}{2}r_1^2\pi$.

$P_O = r_1^2\pi$.

$P_\Delta : P_O = \frac{3}{2}r_1^2\pi : r_1^2\pi = 3 : 2$.

5. $3024 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7 = (2\cdot3)\cdot7\cdot(2\cdot2\cdot2)\cdot(3\cdot3) =$
$= 6\cdot7\cdot8\cdot9$.

VIII RAZRED

1. a) Uvrštavanjem zadanih koordinata iz točaka A i B dobivamo:

$\left.\begin{matrix} 4 = k+n \\ 1 = 2k+n \end{matrix}\right\} \Rightarrow k=-3, \quad n=7.$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za k i n u zadanu nejednadžbu imamo:

$\frac{-3x+7}{x} < 2 \Rightarrow \frac{-3x+7-2x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{-5x+7}{x} < 0$.

$1^\circ \quad \left.\begin{matrix} -5x+7<0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x > \frac{7}{5}.$

$2^\circ \quad \left.\begin{matrix} -5x+7>0 \\ x<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x < \frac{7}{5}.$

$x = R \setminus \left\{\frac{7}{5}\right\}$

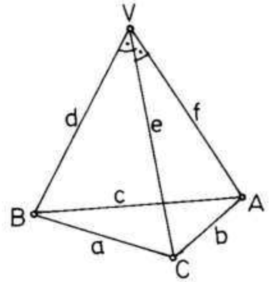
b) $y = -x+3$.

2. Neka je zadani troznamenkasti broj $\overline{abc}$. Iz uvjeta zadatka je:

$\left.\begin{matrix} 1)\ \overline{abc} + 45 = \overline{acb} \Rightarrow c-b = 5 \\ 2)\ \overline{abc} - 270 = \overline{bac} \Rightarrow a-b = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c-a = 2.$

Kako je $\overline{abc} + A = \overline{cba} \Rightarrow A = 99(c-a) = 198$ (gdje je A razlika ta dva broja). Dobiveni broj je veći za 198.

3. Iz pravokutnih trokuta BCV, CAV i BAV imamo:



$\left.\begin{matrix} 1.\ \frac{d\cdot e}{2} = 6 \\ 2.\ \frac{e\cdot f}{2} = 4 \\ 3.\ \frac{f\cdot d}{2} = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow e = 4,\ d = 3,\ f = 2\ cm.$

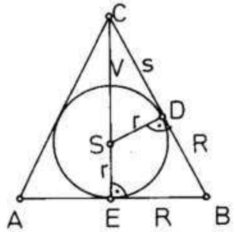
$P_\Delta = \frac{P_{\Delta\, BCV} \cdot f}{3} = \frac{6\cdot2}{3} = 4\ cm^2$.

4. 1. $\Delta EBC \sim SDC$
$R:v = r:(s-R)$
$R(s-R) = v\cdot r$.

2. $v^2 = s^2 - R^2$.

3. $V_o = \frac{4}{3}r^3\pi$.

4. $V_\Delta = \frac{R^2\pi\cdot v}{3}$.



$\frac{O_o}{O_\Delta} = \frac{4r^2\pi}{R\pi(R+s)} \cdot \frac{R}{R} \cdot \frac{(s-R)}{(s-R)} \cdot \frac{r}{r} \quad \frac{4r^3\pi \cdot R(s-R)}{R^2\pi(s^2-R^2)\cdot r} =$

$= \frac{V_o}{V_\Delta} \cdot \frac{R(s-R)}{v\cdot r} \Rightarrow \frac{V_o}{V_\Delta} = \frac{1}{3}$ (pošto je $\frac{R(s-R)}{v\cdot r} = 1$ iz (1)).

5. Iz $x^2+y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

$1^\circ \quad \left.\begin{matrix} x-1 = 0 \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1. \end{matrix}$

$2^\circ \quad \left.\begin{matrix} x-1 = 1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 0. \end{matrix}$

$3^\circ \quad \left.\begin{matrix} x-1 = 0 \\ y = -1 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ y = -1. \end{matrix}$

$4^\circ \quad \left.\begin{matrix} x-1 = -1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0. \end{matrix}$

SAP VOJVODINA

DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I
ASTRONOMA SAP VOJVODINE

OPŠTINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
19. 03. 1988.

IV RAZRED

1. O skupovima A, B i C prirodnih brojeva poznato je sledeće:
a) $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$; d) $A \cap B = \{2\}$;
b) $B \cup C = \{1,2,4,6,8\}$; e) $B \cap C = \{2,4,8\}$;
c) $C \cup A = \{1,2,3,4,5,7,8\}$; f) $C \cap A = \{2\}$.
Odrediti skupove A, B i C.

2. U nizu neparnih brojeva: 1,3,5,7,9,11,... na prvom mestu je broj 1, na drugom broj 3,..., na petom broj 9, itd.
Koji broj u tom nizu se nalazi na
a) 6666. mestu;
b) 66666. mestu?

3. Letele su vrane. Spazile su grane.
Po tri vrane - grana više.
Po dve vrane - vrana više.
Koliko vrana? Koliko grana?

4. Ako se stranica datog kvadrata uveća za 8 cm njegova površina se uveća za 160 cm^2. Odrediti površinu i obim datog kvadrata.

5. Dva časovnika navijena su 19. marta 1988. godine u 9 sati izjutra. Jedan od njih radi tačno, a drugi napreduje 10 minuta svakog sata. Kog dana i u koliko sati će oba časovnika ponovo pokazivati isto vreme?

V RAZRED

1. Umesto zvezdica u broju 523 *** napiši odgovarajuće cifre tako da dobijeni broj pri deljenju sa 7, 8 i 9 daje ostatak 6.

2. Nina može neki posao da zvarši za 9 dana. Ako bi taj posao sa njom radio i Vlada, onda bi posao završili za 6 dana. Za koje bi vreme Vlada sam uradio posao?

3. Petina ugla x jednaka je sedmini njemu suplamentnog ugla y .
Koliki je ugao za koji je komplementaran sa x ?

4. Skup A čine svi prirodni brojevi manji od 500 deljivi sa 2;
skup B čine svi prirodni brojevi manji od 500 deljivi sa 3;
skup C čine svi prirodni brojevi manji od 500 deljivi sa 4 i
skup A čine svi prirodni brojevi manji od 500 deljivi sa 5.
Odrediti $A \cap B \cap C \cap D$.

5. Prave a i b seku se u tački O pod oštrim uglom. Na pravoj a data je tačka A tako da je OA = 4 cm.
Konstruisati krug koji prolazi kroz datu tačku A i dodiruje prave a i b. Koliko takvih krugova ima?

VI RAZRED

1. Racionalan broj $-\frac{4}{7}$ nastao je skraćivanjem racionalnog broja čiji brojilac i imenilac imaju zbir 885.
Odrediti prvobitan racionalan broj.

2. U tri bureta bilo je ukupno 1560 litara ulja. U slučaju da iz prvog bureta odlijemo $\frac{3}{7}$, iz drugog $\frac{1}{4}$, a iz trećeg $\frac{1}{5}$ ulja u sva tri bureta biće jednake količine ulja. Koliko je ulja u svakom buretu?

3. Odrediti brojeve a,b,c ako se zna da je njihov zbir veći od broja a za $\frac{5}{2}$, od broja b za $\frac{59}{6}$ i od broja c za $\frac{5}{3}$.

4. U jednakokrakom trouglu simetrala spoljašnjeg ugla na vrhu i simetrala unutrašnjeg ugla na osnovici seku se pod uglom od 28°. Izračunaj uglove tog trougla.

5. Dokazati da je težišna duž trougla
a) manja od poluobima trougla;
b) manja od poluzbira stranica koje polaze iz istog temena.

VII RAZRED

1. Odrediti vrednost izraza
$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d}, \text{ ako je } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

2. Koji je broj veći 31^{11} ili 17^{14}?

3. Odrediti četiri uzastopna cela broja čiji je proizvod 3024.

4. U pravouglom trouglu jedna kateta je dužine 12 cm, a hipotenuza je za 8 cm duža od dužine druge katete. Izračunati površinu tog trougla.

5. Nad stranicama jednakokrakog pravouglog trougla ABC nacrtaj kvadrate. Spajanjem preseka dijagonala tih kvadrata dobija se trougao $A_1B_1C_1$ površine 36 cm^2. Izračunaj dužinu kateta trougla ABC.

VIII RAZRED

1. Obim romba je 68 cm, a dijagonale se odnose kao 15:8. Odrediti površinu njemu sličnog romba čija je stranica 34 cm.

2. Ako za realne brojeve a, b, c važe uslovi:
$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=1$, $a^3+b^3+c^3=1$, dokazati da je $abc=0$.

3. Otac je imao dva sina, tako da kada se zbiru njihovih godina doda proizvod dobija se 14. Koliko godina imaju njegovi sinovi?

4. Ako se saberu svih šest dvocifrenih brojeva koje je moguće formirati od cifara jednog kućnog broja, tada je polovina tog zbira upravo jednaka tom kućnom broju.
Koji je taj kućni broj?

5. Dat je paralelogram abcd. Prava R odseca od duži $[ab]$ jednu trećinu, a od stranice $[ad]$ jednu četvrtinu, računajući od tačke a. U kom odnosu prava R deli dijagonalu $[ac]$?

POKRAJINSKO NATJECANJE

16. 04. 1988.

VII RAZRED

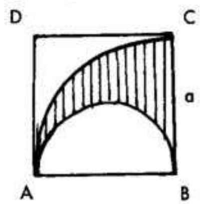
1. Rastavi izraz: $4b^2(b-2)+4a^2(2-a)+a^2b^2(a-b)$.

2. Dokazati da je broj $3^{1988}+3^{1990}$ deljiv sa 10.

3. Neka je ABCDEFGHIJ pravilan desetougao. Dokazati da je $AD = a+r$, gde je AD dijagonala, a stranica desetougla, a r poluprečnik opisanog kruga.

4. Dužina jedne katete pravouglog trougla je $a = 5$ cm, a hipotenuza je za 1 cm duža od druge katete. Odrediti obim i površinu kruga opisanog oko toga trougla.

5. U kvadratu A B C D sa stranicom dužine a nacrtana su dva kružna luka: prvi sa centrom u temenu B poluprečnika a, a drugi nad prečnikom AB. Obim tako dobije figure (šrafirana na slici) je $10(\pi+1)$ cm.
Odrediti površinu te figure.



VIII RAZRED

1. Odrediti najmanji prirodan broj kod koga je proizvod cifara jednak 75600.

2. Prvi biciklista krenu je iz mesta A u mesto B. Istovremeno je iz mesta B prema mestu A krenuo drugi biciklista. Posle susreta prvi biciklista je vozio do cilja još 27 minuta, a drugi još 12 minuta. Koliko je vremena preveo na putu prvi biciklista a koliko drugi, ako je svaki od njih vozio stalnom brzinom?

3. Ako jednu katetu pravouglog trougla povećamo za 1 cm a drugu smanjimo za 2 cm površina trougla se neće promeniti. Ako jednu katetu povećamo za 2 cm a drugu za 8 cm, površina će se povećati za 24 cm^2 odrediti dužine kateta.

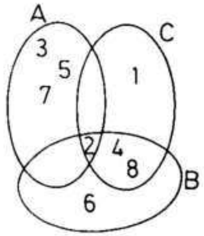
4. Odredi rastojanje izmedju ortocentra i težišta u jednakokrakom trouglu osnovica a i kraka b.

5. Jedno teme kocke udaljeno je od telesne dijagonale kocke 7 cm. Izračunati površinu kocke.

R E Š E N J A

OPŠTINSKO TAKMIČENJE

IV R A Z R E D

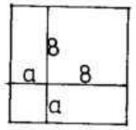


1. $A = \{2,3,5,7\}$
   $B = \{2,4,6,8\}$
   $C = \{1,2,4,8\}$

2. Na prvom mestu je: $2\cdot 1 - 1 = 1$;
   Na drugom mestu je: $2\cdot 2-1=3$;
   Na trećem mestu je: $2\cdot 3-1 = 5$;
   Na 6666 mestu je $2\cdot 6666-1 = 13331$;
   Na 66666. mestu je $2\cdot 66666-1 = 133331$

3. Ako vrana ima $3x$, onda je broj grana $x+1$. Ako vrane rasporedimo po 2 na granu, imaćemo $2(x+1)$ vrana i još jedna vrana neće imati mesta. Prema tome $3x = 2(x+1)+1$. $x=3$ - vrana je 3, a grana $x+1 = 4$.

4. Ako je stranica datog kvadrata dužine a, tada njenim uvećavanjem za 8 cm dobijemo dva pravougaonika čije su stranice a i 8 cm i kvadrat stranice 8 cm. Površina kvadrata stranice 8 cm je 64 cm^2. Površina dva pravougaonika je $160-64=96$ cm^2, a površina jednog je 48 cm^2, a površina jednog je 48 cm^2. Odatle sledi da je $a=6$ cm $(48:8=6)$.
   P kvadrata je $6\cdot 6=36$ cm^2
   $O = 4a = 24$ cm.



5. Časovnici će pokazivati isto vreme kada se obe kazaljke ponovo poklope, a to je kada onaj koji napreduje dostigne napredak od 12 sati. Kako je 12 sati 720 minuta, zato će mu trebati $720:10=72$ sata = 3 dana. Prema tome časovnici će ponovo pokazivati isto vreme 22. marta 1988. godine u 9 sati.

V R A Z R E D

1. Kako je ostatak pri deljenju broja 523000 brojem 504 NZS (7,8,9) jednak 352 to su traženi brojevi jednaki $523000-352+504+6=523158$ i $523158+504=523662$.

2. Nina za jedan dan završi $\frac{1}{9}$ posla, a Nina i Vlada zajedno $\frac{1}{6}$ posla. Znači da Vlada za jedan dan završi posao: $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ Vlada bi sam završio posao za 18 dana.

3. Ugao x čini $\frac{5}{12}$, a ugao y je $\frac{7}{12}$ od opruženog ugla. Kako je

$\frac{1}{12}$ opruženog ugla 15°, to je $x=75^\circ$, $y = 105^\circ$, $z = 15^\circ$

4. Skup $A \cap B \cap C \cap D$ čine brojevi deljivi sa NZS $(2,3,4,5) = 60$. Traženi skup je $\{60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480\}$.

5. Centar traženog kruga S leži na simetrali a ugla aob i na normali n iz tačke A na pravu a. Prema tome S se dobija u preseku pravih n i s.
   Postoje dva rešenja, jer postoje dve simetrale ugla aob (simetrala oštrog i simetrala tupog ugla).

VI R A Z R E D

1. Pre skraćivanja racionalni broj $-\frac{4}{7}$ je imao oblik $-\frac{4k}{7k}$ (k - ceo broj). Kako je $-4k+7k = 885$, to je $k=295$.
   Traženi razlomak je: $-\frac{4.295}{7.295} = -\frac{1180}{2065}$.

2. Iz uslova zadatka $\frac{4}{7}$ prvog bureta, $\frac{3}{4}$ drugog bureta i $\frac{4}{5}$ trećeg bureta predstavljaju jednake zapremine. Neka je ta zapremina x, tj. $(x + \frac{3}{4}x) + (x + \frac{x}{3}) + (x + \frac{x}{4}) = 1560$, odnosno $x = 360$ litara, pa u prvom buretu ima 630 l ulja, u drugom 480 l ulja, a u trećem 450 l ulja.

3. Ako je zbir brojeva a,b,c od broja a veći za $\frac{5}{2}$ to znači da je $b+c = \frac{5}{2}$. Slično zaključujemo da je $a+c = \frac{59}{6}$ i $a+b = \frac{5}{3}$. Tada je
   $(b+c)+(a+c)+(a+b) = \frac{5}{2} + \frac{59}{6} + \frac{5}{3}$, tj.
   $a + b + c = 7$. Dakle: $a = 7-\frac{5}{2} = \frac{9}{2}$
   $b = 7 - \frac{59}{6} = -\frac{17}{6}$
   $c = 7 - \frac{5}{3} = \frac{16}{3}$.

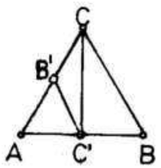
4. Simetrala spoljašnjeg ugla pri vrhu paralelna je sa osnovicom jednokrakog trougla. Zbog toga je ugao između simetrale spoljašnjeg i simetrale ugla na osnovici jednak polovini ugla na osnovici. Znači da je ugao na osnovici $2\cdot 28^\circ = 56^\circ$, a ugao pri vrhu je tada 68°.

5. a) Iz $\Delta ACC'$ sledi $CC' < AC' + AC$, a iz $\Delta BCC'$ dobijemo $CC' < BC' + BC$. Sabiranjem dobijenih nejednakosti dobijemo
   $2\,CC' < AC' + BC' + AC + BC$
   $2\,CC' < AB + BC + CA$.

b) Iz $\Delta B'C'C$: $CC' < B'C' + B'C$

$AB' = B'C$

$C'C < \frac{1}{2}(AC + BC)$



VII RAZRED

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$; $c = kd$, $a = kb$

pa izraz prelazi u

$$\frac{k\,(b+d)\;(b+d)}{k\;(b+d)+\;b+d} - \frac{b^2k}{kb+b} - \frac{kd^2}{kd+d} = \frac{k(b+d)}{k+1} - \frac{bk}{k+1} - \frac{dk}{k+1} =$$

$$= \frac{k\;(b+d-b-d)}{k+1} = 0.$$

2. Očevidno je $31^{11} < 32^{11}$ i $17^{14} > 16^{14}$.

Kako je: $32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55}$, a $16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56}$ sledi $2^{56} > 2^{55}$.

Zbog $31^{11} < 32^{11}$ i $17^{14} > 16^{14}$ proizilazi $17^{14} > 31^{11}$.

3. Kako je $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$

Traženi brojevi su 6,7,8,9.

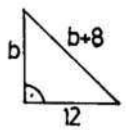
4. $(b+8)^2 = b^2 + 12^2$

$b^2 + 16b + 64 = b^2 + 144$

$16\,b = 80$

$b = 5$ cm

$P = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ cm^2



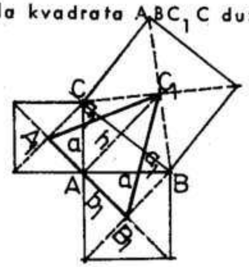
5. $\frac{b_1 \cdot h}{2} = 36$ cm^2

$b_1 = a \cdot \sqrt{2}$ ($b_1 = \overline{BC}$ _ dijagonala kvadrata ABC_1C dužine a)

$h = a \cdot \sqrt{2}$ (h je dijagonala kvadrata ABC_1C dužine a)

$\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = 36$

$a^2 = 36$, $a = 6$ cm.



VIII RAZRED

1. Stranica romba je 17 cm (68:4=17). Kako se dijagonale odnose kao 15:8 to se i njihove polovine odnose kao 15:8. Iz Pitagorine teoreme je $(15x)^2 + (8x)^2 = 289$, $x=1$; pa su dijagonale $d_1 = 16$ i $d_2 = 30$. Sličan romb ima dva puta veću stranicu, pa i dva puta veće dijagonale. Njegova površina je 960 cm^2.

2. Kvadrirajmo obe strane prve jednačine i primenimo drugu jednačinu: $/a+b+c/^2 = 1^2 \Leftarrow\; a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = 1 \Longleftrightarrow ab+ac+bc = 0$../x

Pomnožimo odgovarajuće strane prve i druge jednačine i primenimo treću jednačinu:

$(a+b+c/\cdot/a^2+b^2+c^2/ = 1 \Longleftrightarrow a^3+b^3+c^3+ab^2+ac^2+a^2b+a^2c+b^2c = 1$

$\Longleftrightarrow ab/a+b/ + ac/a+c/ + bc/b+c/ = 0$

/Zbog $a+b+c=1$, imamo:

$a+b=1-c$,

$b+c+1-a$ $\quad\Longleftrightarrow ab/1-c/+ac/1-b/ + bc/1-a/ = C$

$\Longleftrightarrow ab/a+b/ + ac/a+c/ + bc/b+c/ = 0$

Na osnovu /x/ imamo da je $abc = 0$.

3. Neka sinovi imaju: satriji x, a mladji y godina.

Tada je $x+y+xy=14$. Tada je $x+y+xy+1=15$, odnosno $(x+1)(y+1)=15$. Jedino realna rešenja dobijamo za $x+1 = 5$ i $y+1 = 3$, tj. $x=4$ i $y=2$.

4. Kako se iz traženog broja može formirati 6 dvocifrenih to je traženi broj trocifreni recimo oblika $100a + 10b+c$.

Od cifara a, b, c moguće je formirati ovih 6 dvocifrenih brojeva: $10a+b$, $10a+c$, $10c+b$, $10b+a$, $10c+a$ i $10b+c$.

Njihov zbir jednak je $22/a+b+c/$.

Uz uslova zadatka proizilazi da je:

$11/a+b+c/ = 100a+10b+c$ ili

$10b+c+10c+b = 100a+10b+c-11a$

$10c+b = 89\,a$.

No, $10c+b$ je dvocifreni broj, pa proizilazi da je $a=1$.

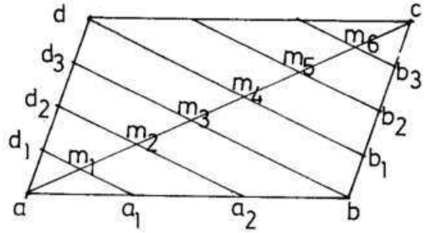
Stoga je $c=8$, $b=9$, pa traženi kućni broj je 198.

5. Neka je $[a\,a_1] = [a_1\,a_2] = [a_2\,b]$ i neka je $[ad_1] = [d_1\,d_2] = [d_2d_3] = [d_3d]$.

Ako je $[a_1d] \cap [ac] = [m_1]$, onda je zbog Talesova teorema $am_1 = [m_1m_2] = [m_2m_3]$. Kako je $[d_3d]$ jednako i paralelno sa $[b\,b_1]$ (kao četvrtina duži $[ad] = [b\,c]$), to je $bb_1\,dd_3$ paralelogram, pa je $[bd_3] \parallel [b_1\,d]$. Zbog $[d_2d_3] = [d_3d]$ i

Talesova teorema $[m_2m_3]=[m_3m_4]$. Dalja je $[bb_1]=[b_1b_2]=[b_2b_3]=[b_3C]$, pa je i $[m_3m_4]=[m_4m_5]=[m_5m_6]=[m_6C]$.

Dakle, data prava deli dijagonalu $[ac]$ u odnosu 1:6.



POKRAJINSKO TAKMIČENJE

VII RAZRED

1. Množenjem zadanog izraza dobijemo:

$4b^3-8b^2+8a^2-8a^3+a^3b^2-a^2b^3 \Rightarrow$

$-4(a-b)(a^2+ab+b^2)+8(a-b)(a+b)+a^2b^2(a-b) \Rightarrow$

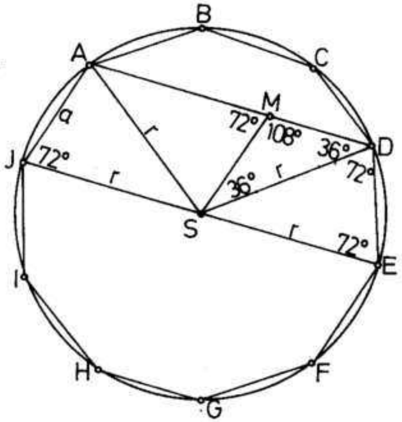
$(a-b)\left[-4(a^2+ab+b^2)+8(a+b)+a^2b^2\right] \Rightarrow$

$(a-b)(b-2)\left[a^2(b+2)-4a-4b\right] \Rightarrow$

$(a-b)(b-2)(a-2)(ab+2a+2b)$.

2. $3^{1988}+3^{1990}=3^{1988}(1+3^2)=10\cdot 3^{1988}$.

3. Povucimo duž SM||AJ. Četverougao AJSM je paralelogram. Duž AM=r, a MD = a (zašto). Prema tome AD = a + r.

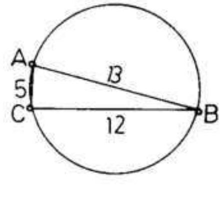


4. $5^2+x^2=(x+1)^2 \Rightarrow x=12 \Rightarrow$

$a=12,\ b=5,\ c=13.$

$P=(\frac{13}{2})^2\pi=42{,}25\pi$.

$O=2(\frac{13}{2})\pi=13\pi$.



5. Obim šrafiranog dela iznosi:

$10(\pi+1)=\frac{2a\pi}{4}+\frac{2(\frac{a}{2})\pi}{2}+a \Rightarrow a=10.$

$P=\frac{a^2\pi}{4}-\frac{a^2\pi}{8}=12{,}5\pi$.

VIII RAZRED

1. $75600=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7$

Najmanji broj je 556789.

2. Iz zadanih uvjeta imamo:

$s:\left(\frac{s}{t+27}+\frac{s}{t+12}\right)=t \Rightarrow \frac{(t+12)(t+27)}{2t+39}=t \Rightarrow t=18.$

Prvi je proveo 18+27 = 45 min, a drugi 18+12 = 30 min.

3. Imamo:

$\left.\begin{array}{l} ab=(a+1)(b-2) \\ ab+24=(a+2)(b+8) \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{1}{3},\quad b=\frac{8}{3}.$

4. Kako je $CD=\sqrt{b^2-(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$, to je $TD=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{6}$

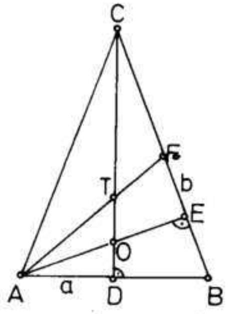
(jer je $TD=\frac{1}{3}CD$). Trougli DBC i OAD su slični pa imamo:

$OD:DA=DB:DC=x:\frac{a}{2}=\frac{a}{2}:\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2} \Rightarrow$

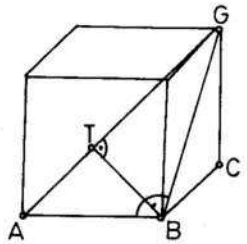
$x=\frac{a^2}{2\sqrt{4b^2-a^2}}$ (gdje je x = OD).

Prema tome, tražena udaljenost izmedju težišta i ortocentra je:

$OT=DT-OD=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{6}-\frac{a^2}{2\sqrt{4b^2-a^2}}=\frac{2(b-a)(b+a)(\sqrt{4b^2-a^2})}{3(4b^2-a^2)}$



5. Neka je AG dijagonala kocke i BT udaljenost temena od dijagonale. Tada su trougli ABT i AGB slični pa je $BT : AB = BG : AG$, odnosno: $7 : a = a\sqrt{2} : a\sqrt{3}$, odakle je $a = 7\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm. Površina kocke je $P = 6a^2 = 6 \cdot 49 \cdot \frac{3}{2} = 441$ cm^2.

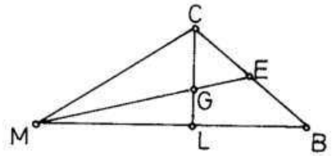


SAP KOSOVO

OPŠTINSKO TAKMIČENJE

V RAZRED 17. 04. 1986.

1. Uoči i zapiši sve nekonveksne mnogouglove na datoj slici.



2. Reši jednačinu:

$$\frac{\frac{3y}{2}-1}{0{,}3} - 50\% = 5\frac{1}{2}.$$

3. Simetrale susednih uglova A i B su normalne jedna na drugu. Izračunati uglove A i B, ako je A - B = $32^\circ 2' 22''$.

4. Dat je 6-cifreni broj 5xy3zt. Izračunaj vrednosti cifara x, y, z, t tako da broj bude deljiv sa 4, 9 i 25.

VI RAZRED

1. Na što kraći način nadji zbir prirodnih brojeva od 1 do 100.

2. Reši jednačinu:

$$\frac{\frac{3y}{2}-1}{0{,}3} + 50\% = -5\frac{1}{2}$$

3. U trouglu ABC centri upisanog i opisanog kruga su simetrični u odnosu na stranicu AB. Izračunati unutrašnje uglove tog trougla.

4. Jedan radnik je završio 3/8 svog posla. Ako bi radio još 3+2/3 časova, završio bi 5/6 posla. Za koliko vremena završi čitav posao?

VII RAZRED

1. Nad stranicama jednakostraničnog trougla ABC konstruisani su kvadrati, zatim su slobodna temena tih kvadrata spojena dužima tako da se dobija šestougao. Naći površinu i obim tog šestougla ako je stranica trougla a = 4 cm.

2. Dat je polinom $P(x) = 4x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 4$

a) Rastavi polinom na dva polinoma drugog stepena.
b) Dokazati da je vrednost polinoma deljiva sa dva za bilo koju vrednost $x \in N$.

3. Cifra jedinica dvocifrenog broja je 2. Razlika kvadrata tog broja i proizvoda njemu prethodnog i narednog broja je 1. Dokaži!

4. Uprosti izraz:

$$\frac{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{x-y}{x+y}-1\right)}{\left(\frac{x-y}{x+y}+1\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)}$$

VIII RAZRED

1. Naći obim i površinu figure koja je ograničena pravama:
$3x - 4y = -5$, $3x + 4y = 11$, $x = 5$.

2. Dat je polinom $P(x) = 4x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 4$.
a) Rastavi polinom na dva polinoma drugog stepena.
b) Dokazati da je vrednost polinoma deljiva sa dva za bilo koju vrednost $x \in N$.

3. Ako u jednoj klupi u prirodi sede po 7 učenika, ostaće bez mesta 8 učenika. Ako bi u jednoj klupi sedelo po 9 učenika ostale bi 4 klupe prazne. Odredi broj klupa i broj učenika.

4. Jedno dete kupilo je 20 kuglica (bele, crvene i plave) za 20 dinara. Bele kuglice platilo je po 0,5 dinara, crvene kuglice po 2 dinara, a plave po 3 dinara. Po koliko kuglica je kupilo od svake boje?

POKRAJINSKO TAKMIČENJE

V - VI RAZRED

1. Izračunati: $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{6} : \frac{4}{3}$.

2. Zbir dva broja je 43210. Ako se jednom od njih izostavi prva cifra sa leve strane dobije se drugi broj. Koji su to brojevi?

3. Data je duž i prava paralelna njoj. Naći središte te duži koristeći samo lenjir. Postupak opisati.

4. Dat je kvadar volumena 32 sa celobrojnim stranicama. Kolika je površina tog kvadra ako se on može podeliti na četiri jednake kocke. Naći sva rešenja.

5. Izračunati zbir svih parnih brojeva od 1 do 40. Može i algoritam na programskom jeziku.

VII RAZRED

1. Tačno u 12 h sa vrha kule u raznim pravcima poletele su 4 muhe. Svaka je letela pravolinijski i konstantnom brzinom. Brzina prve je 8m/min, druge 12m/min, treće 15/m/min, a četvrte 18 m/min. Posle 9 minuta sve četiri muhe su se našle u istoj ravnini. Kada će se ponovo naći u istoj ravnini?

2. Kako ćemo iz reke izvaditi 6 l vode ako imamo samo dve posude od 4 i 9 litara?

3. Na stranici AB jednakostranog trougla ABC data je tačka D koja stranicu deli u odnosu 1:3. Iz ove tačke su povučene normale DE i DF na AC i BC. Naći odnos DE:DF ako je površina trougla ABC $16\sqrt{3}$.

4. Dat je pravilan tetraedar sa visinom v= 3 cm. Naći volumen tetraedra.

5. Izračunati zbir svih parnih brojeva od 50 do 100. Može i algoritam na programskom jeziku.

VIII RAZRED

1. Isti kao 1. zadatak za VII razred.

2. U dve posude ima 35 litara tečnosti. Ako iz leve posude presipamo u desnu onoliko koliko je u desnoj dotada bilo, onda će u jednoj od njih biti 5 litara više nego u drugoj. Odredite količinu tečnosti u svakoj posudi ako se zna da su sadržavale celi broj litara.

3. Date su duži AB i CD. Dužina AB se vidi iz C i D pod kutom od 30°. Duž CD se vidi iz A i B pod kutom od 60°. Naći rastojanje tačaka A i B ako je rastojanje C i D $10\cdot\sqrt{3}$.

4. Izračunati dužinu normale spuštene iz vrha kocke na glavnu dijagonalu, ako je stranica kocke $3\sqrt{2}$.

5. Izračunati zbir svih neparnih brojeva od 50 do 101. Može i algoritam na programskom jeziku.

RJEŠENJA

OPĆINSKO NATJECANJE

V RAZRED

1. MBCG; MLGEC; MGLBC; MBEGC.

2. $y = \frac{28}{15}$.

3. Iz A-B= 32° 2′ 22″ i A+B = 180° => A= 106° 1′ 11″ i B = 73° 58′ 49″.

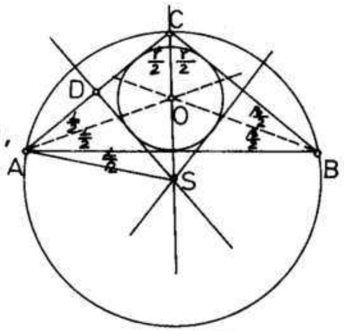
4. Neka je N= $\overline{5xy3zt}$ traženi broj.
Iz 4IN i 25IN => 100IN => z = t = 0 => N = 5xy300.
Iz 9IN => N ∈ {501300, 510300, 591300, 519300, 582300, 528300, 573300, 537300, 564300, 546300, 555300}.

VI RAZRED

1. $1+2+\ldots+99+100 = (1+100)+(2+99)+\ldots+(50+51) = 50\cdot 101 = 5050$.

2. $y = -\frac{8}{15}$.

3. Zbog simetrije O i S u odnosu na AB je $\sphericalangle OAB = \sphericalangle SAB = \alpha/2$, a trokut ABC je jednakokračan, tj. $\alpha = \beta$. Iz sukladnosti trokuta ASD i SCD proizlazi da je $3\alpha/2 = \gamma/2$, pa na osnovu $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ izlazi:
$\alpha + \alpha + 3\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°, \beta = 36°, \gamma = 108°$.

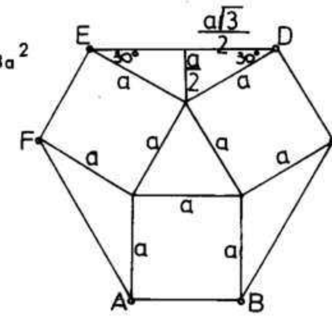


4. Neka je x broj sati za koje radnik završi posao. Imamo:
$\frac{3}{8}x + 3\frac{2}{3} = \frac{5}{6}x \Rightarrow x = 8$.
Cijeli posao završi za 8 sati.

VII RAZRED

1. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 + 3\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} + 3a^2$
$= a^2(3+\sqrt{3}) = 16(3+\sqrt{3})\ cm^2$

$O = 3a + 3\cdot a\sqrt{3} = 3a(1+\sqrt{3}) =$
$= 12\,(1+\sqrt{3})\ cm.$

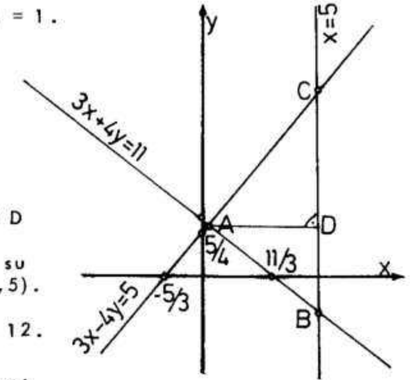


2. a) $P(x) = 4x^4+x^3+8x^2+x+4 = 4x^4+x^3+4x^2+4x^2+x+4 =$
$= x^2(4x^2+x+4) + 4x^2+x+4 = (4x^2+x+4)\ (x^2+1)$

b) Ako je x paran broj onda je izraz u prvoj zagradi djeljiv sa 2, a ako je neparan onda je izraz u drugoj zagradi djeljiv sa 2.

3. Neka je $N = \overline{x2}$ zadani broj. Tada je:
$N^2 - (N-1)(N+1) = N^2 - N^2+1 = 1$.

4. $$\frac{\dfrac{(y^2-x^2)\cdot -2y}{x^2y^2\,(x+y)}}{\dfrac{2x\,(x^2-y^2)}{(x+y)\ yx}} = \frac{1}{x^2}$$



VIII R A Z R E D

1. Presječne točke danih pravaca su
$A = (1,2)$, $B = (5,-1)$ i $C = (5,5)$.

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\,BC\cdot AD = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12$.

2. Isti kao 2. zadatak za VII razred

3. Neka je x broj klupa, a y broj učenika. Tada je:
$$\left.\begin{array}{l} 7x = y-8 \\ 9(x-4) = y \end{array}\right\} \Longrightarrow\quad x = 22,\qquad y = 162.$$

4. Neka je x broj bijelih, y broj crvenih i z broj plavih kuglica koje je kupilo dijete. Tada je $0{,}5x+2y+3z = 20$, tj. $x+4y+6z = 40$.
Ako je dijete kupilo sve 3 vrste kuglica, tada su moguća sljedeća rješenja:
$(x,y,z)\in\{(2,8,1),\ (2,5,3),\ (4,6,2),\ (4,3,4),\ (6,4,3),\ (6,1,5),\ (8,5,2),\ (8,2,4),\ (10,6,1),\ (10,3,3),\ (12,4,2),(12,1,4),\ (14,5,1),\ (14,2,3),\ (16,3,2),\ (18,4,1),\ (18,1,3)\}$.
Pretpostavimo li da dijete ne mora kupiti sve 3 vrste kuglica, tada prethodnom skupu treba još dodati skup $\{(0,17,1),\ (0,14,2),\ (0,11,3),\ (0,2,6),\ (4,0,6),\ (10,0,5),\ (16,0,4),\ (4,9,0),\ (8,8,0),\ (12,7,0),\ (16,6,0),\ (40,0,0),\ (0,10,0)\}$.

POKRAJINSKO NATJECANJE

V-VI R A Z R E D

1. $\frac{43}{60}$

2. Neka su $A = \overline{abcde}$ i $B = \overline{bcde}$ dva broja čiji je zbroj 43210.
Iz $A+B = 43210$ izlazi: $\overline{a0000} + 2B = 43210$

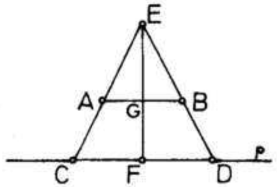
1) $a=4$
$B = \frac{3210}{2} = 1605$

Prema tome, $A = 41605$, $B = 1605$.

2) $a = 3$
$B = \frac{13210}{2} = 6605$; $A = 36605$

Dakle, traženi brojevi su 41605 i 1605, odnosno 36605 i 6605.

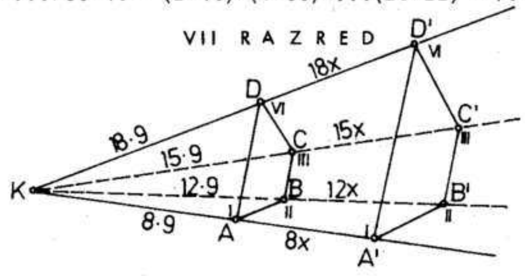
3. Neka je AB zadana dužina i p pravac paralelan sa AB.
Na pravcu p nanesimo dužine CF i FD, čije su duljine jednake duljini AB. Povucimo polupravce CA i DB i njihovo sjecište označimo sa E. Pravac EF raspolavlja dužinu AB.



4. Iz $32 = 2^5$, prema uvjetima zadatka izlazi da je jedino rješenje zadatka kvadar dimenzije $2\cdot 4\cdot 4$. Oplošje tog kvadra je 64.

5. $2+4+\ldots+38+40 = (2+40)+(4+38)+\ldots(20+22) = 10\cdot 42 = 420$.

VII R A Z R E D

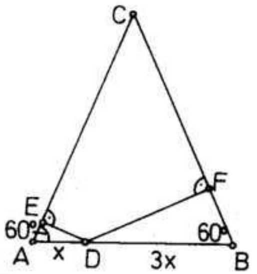


Neka su nakon 9 minuta muhe I, II, III i IV redom u točkama A,B,C,D. Prema uvjetu zadatka točke A,B,C,D su komplanarne. Nakon x minuta muhe će biti u točkama A′,B′,C′,D′. Zbog pravolinijskog kretanja muha, komplanarnosti točaka A,B,C,D prema Talesovom teoremu slijedi da su i točke A',B',C' i D' komplanarne. Slično će biti, prije 9 minuta, pa su muhe u svakom trenutku komplanarne.

2.

4l	− 9l
0	9
4	5
4	1
1	0
1	9
4	6

3. Iz $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 16\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$
$a = 8 \Rightarrow x = 2$.
Pošto su trokuti ADE i DBF slični pa im se stranice odnose
$DE : DF = 1 : 3$.



4. Iz $v = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ izlazi $a = \frac{v\sqrt{6}}{2}$, pa na osnovu

$$V = \frac{v^3\sqrt{3}}{8} = \frac{27\sqrt{3}}{8}\ cm^3.$$

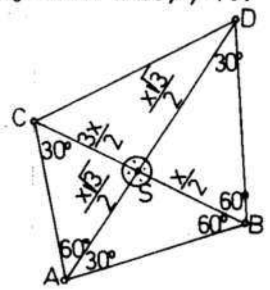
5. $50 + 52 + \ldots + 98 + 100 = 50 + 100 + \ldots + 74 + 76 = 13 \cdot 150 = 1950.$

VIII RAZRED

1. Isti kao 1. zadatak za VII razred.

2. Iz zadanih uvjeta imamo
$x+y = 35$, $x-y = 2y-5$ ili $x+y = 35$, $x-y = 2y-5$
Prvi sistem nema rješenja, a iz drugog izlazi $x=25$, $y=10$.

3. Neka je $AB = x$, tada je
$BS = \frac{x}{2}$, $DS = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $AS = \frac{x\sqrt{3}}{2}$
i $CS = \frac{3x}{2}$. Pošto su dijagonale medjusobno okomite iz trokuta CSO imamo
$(10\sqrt{3})^2 = (\frac{3x}{2})^2 + (\frac{x\sqrt{3}}{2})^2 \Rightarrow x = 10.$



4. Vidi rješenje SAP Vojvodina - pokrajinsko natjecanje - VIII razred.

5. $51+53+\ldots+99+101 = \frac{26\ (51+101)}{2} = 13 \cdot 152 = 1976.$

SFR JUGOSLAVIJA

S. Palanka, 04. 06. 1988.

XIX SAVEZNO TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

VII RAZRED

1. Šestina od ukupne količine neke robe prodata je sa zaradom od 20%, a polovina ukupne količine iste robe prodata je sa gubitkom od 10%. Sa koliko procenata (postotaka) zarade treba prodati ostatak robe da bi se pokrio gubitak?

2. Dan je broj n čije su znamenke (cifre) 60 sedmica i izvjestan broj nula. Dokazati da je vrijednost razlomka $\frac{n-27}{3}$ cio broj, a vrijednost razlomka $\frac{n+27}{9}$ nije cio broj.

3. Odrediti prirodne brojeve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (koji ne moraju biti različiti medju sobom) tako da je $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = 1988$ i $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 1988$. Koliko ima različitih rešenja? $(k>1)$

4. Na simetrali spoljašnjeg ugla (vanjskog kuta) kod temena (vrha) C trougla (trokuta) ABC izabrana je proizvoljna tačka M. Dokazati da je $MA + MB \geq AC + BC$.

5. U jednakokrakom (jednakokračnom) trouglu (trokutu) ABC, AC = BC, kome je ugao (kut) $\sphericalangle ACB = 80^\circ$, data je tačka O, takva da je $\sphericalangle BAO = 10^\circ$ i $\sphericalangle ABO = 30^\circ$. Izračunati ugao $\sphericalangle ACO$.

VIII RAZRED

1. Dva broda kreću iz mjesta A i B jedan drugome u susret. Svaki od njih kad stigne u jedno mjesto vraća se natrag u ono drugo. Prvi put brodovi se susreću na 5 km od A, a drugi put na 3 km od B. Odrediti rastojanje od A do B.

2. Date su linearne funkcije (jednadžbe pravaca) $y = -1$, $y = \frac{3}{2}x - 4$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ i $y = 2x + 7$. Izračunati koordinate temena (vrhova) i površinu četvorougla (četverokuta) kojeg ograničavaju grafovi datih funkcija.

3. Dokazati da razlika broja u zapisu sastavljenog od 100 jedinica i broja u zapisu sastavljenog od 50 dvojki, predstavlja kvadrat cijelog broja.

4. U pravougaoniku (pravokutnik) ABCD tačka M je na stranici CD takva, da je DM = 2 CM. Ako se prave (pravci) AC i BM seku pod pravim uglom (kutom), izračunati ugao $\sphericalangle BOM$, gde je tačka O presek (sjecište) dijagonala.

5. Dan je trokut (trougao) ABC i točka M unutar njega. Dokaži, da je $AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB \geq 4P$, pri čemu je P površina trokuta (trougla) ABC.

REŠENJA

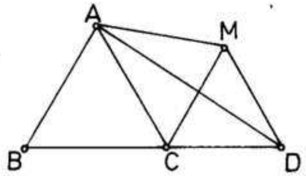
VII RAZRED

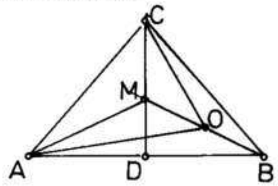
1. Neka je k ukupna količina robe, a c planirana cena. Iz datih podataka dobijamo jednačinu
$$\frac{k}{6} \cdot 0{,}2c + \frac{k}{3} \cdot x \cdot c = \frac{k}{2} \cdot 0{,}1c,$$ gde je x traženi procenat. Rešavajući po x dobijamo $x = 0{,}05 = 5\%$.

2. Zbir cifara broja n je $60 \cdot 7 = 420$. Dakle, n je deljivo sa 3, pa je i n-27 deljivo sa 3. Kako 420 nije deljivo sa 9, to ni n nije deljivo sa 9, pa zbog toga ni n+27 nije deljivo sa 9.

3. Zbog $1988 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71$ i $2+2+7+71 = 82$, jedno od rešenja će biti $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$ (1906 jedinica). Rešenja ima 10 (onoliko koliko ima različitih načina faktorisanja broja 1988).

4. Neka je D tačka na produžetku duži BC, takva da je CD=CA (tj. simetrična sa A u odnosu na CM). Lako se dokazuje da su trouglovi ACM i DCM podudarni, pa je DM=AM. Zbog toga je: $MA + MB = MD + MB > BD = BC + CD = BC + AC$.





5. Neka je M presečna tačka visine CD trougla i prave BO (slika). Trougao ABM je jednakokrak, pa je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 30^\circ$. Prema tome: $\sphericalangle CAM = 20^\circ = \sphericalangle MAO$. Sem toga je $\sphericalangle ACD = 40^\circ$ (polovina od 80°) i $\sphericalangle AOM = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 40^\circ$. Trouglovi AOM i AMC imaju po dva jednaka ugla i zajedničku stranicu AM, pa su podudarni. Zbog toga je AO=AC, pa je AOC jednakokrak trougao i zbog $\sphericalangle CAO = 40^\circ$ dobijamo da je $\sphericalangle ACO = 70^\circ$.

VIII RAZRED

1. Označimo rastojanje od A do B sa x, brzine brodova sa v_1 i v_2, vreme do prvog susreta sa t_1, a vreme od prvog do drugog susreta sa t_2

Onda je $v_1t_1=5$, $v_2t_1=x-5$, $v_1t_2=3+(x-5)$ i $v_2t_2=5+(x-3)$.

Iz $\frac{5}{x-2}=\frac{x-5}{x+2}$ dobijamo $12x-x^2=0$, pa je zbog $x>0$, $x=12$.

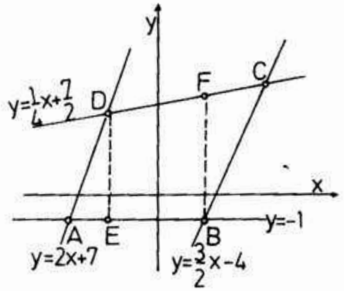
2. Označimo sa A, B, C i D pomenuta temena kao na slici. Njihove koordinate su $A(-4,-1)$, $B(2,-1)$, $C(6,5)$, $D(-2,3)$.

Tražena površina je

$P=\frac{1}{2}AE\cdot ED+\frac{1}{2}(ED+BF)\cdot$

$\cdot EB+\frac{1}{2}BF\cdot h_{BF}=\frac{2\cdot 4}{2}+\frac{4+5}{2}\cdot$

$\cdot 4+\frac{5\cdot 4}{2}=32.$

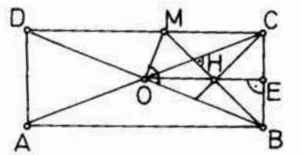


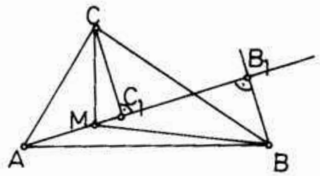
3. $111\ldots11-222\ldots22=\frac{1}{9}(10^{100}-1)-\frac{2}{9}(10^{50}-1)=$

$=\frac{1}{9}(10^{100}-1-2\cdot 10^{50}+2)=\frac{1}{9}(10^{2\cdot 50}-2\cdot 10^{50}+1)=(\frac{10^{50}-1}{3})^2$.

Kako je $10^{50}-1$ deljivo sa 9, to je deljivo i sa 3, pa je tvrdjenje dokazano.

4. Neka je E središte stranice BC. Tada je $OE\perp BC$. Dakle, tačka H (slika) je ortocentar trougla OBC, pa je $CH\perp OB$. Medjutim, OH je srednja linija trougla DBM, pa je $OH=1/2\ DM=MC$. Zbog toga je četvoroogao OHCM paralelogram i $OM\parallel CH$, a otuda i $OM\perp OB$.





5. Neka su B_1 i C_1 podnožja normala iz B i C na pravu AM (slika).

Tada je $P(ABM)=\frac{1}{2}AM\cdot BB_1$ i $P(ACM)=\frac{1}{2}AM\cdot CC_1$, odakle

$P(ABM)+P(ACM)=\frac{1}{2}AM(BB_1+CC_1)\leq\frac{1}{2}AM\cdot BC$. Analogno se dobija

$P(ACM)+P(BCM)\leq\frac{1}{2}CM\cdot AB$ i $P(ABM)+P(BCM)\leq\frac{1}{2}BM\cdot AC$.

Sabirajući te tri relacije dobijamo tvrdjenje koje se dokazuje.