Najtoplije zahvaljujem **prof. Milanu Šariću *i* prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da knjižicu "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1990. godine - za učenike osnovnih škola" skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

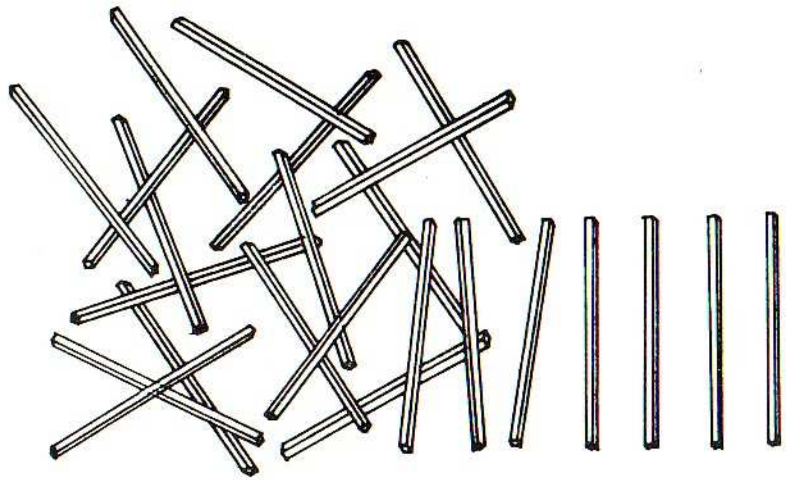
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »P I T A G O R A« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1990. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA



Beli Manastir, 1990.

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1990. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA OSNOVNOŠKOLACA U SFRJ U 1990. GODINI

Izdavač:

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Priredili:

Milan Šarić
Luka Čeliković

Recenzent:

Prof. Ivan Stanić

Korektura:

Anđa Mijatović
Denis Vidović

Urednici:

Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:

Branko Vujaklija

Tiraž:

700 primjeraka

Tisak:

GP »Slovo« Beli Manastir

Oslobođeno plaćanja Saveznog poreza na promet mišljenjem Republičkog komiteta za prosvjetu, kulturu, fizičku i tehničku kulturu ur. broj 532—03/1—90—1 od 30. 05. 1990.

P R E D G O V O R

Ova zbirka zadataka, kao nastavak zbirki iz 1987, 1988. i 1989. godine, sadrži riješene zadatke sa općinskih, regionalnih — međuopćinskih i republičkih matematičkih natjecanja svih naših Republika, te riješene zadatke sa saveznog natjecanja 1990. godine. Posebno ističemo da zbirka sadrži i riješene zadatke sa XVI »Arhimedesovog« matematičkog turnira, koji u SR Srbiji svake godine organizira KMM »Arhimedes« iz Beograda.

Pri izradi zbirke korišteni su materijali natjecateljskih komisija, te časopisi: »Matematički list« (Beograd), »Presek« (Ljubljana) i »Numerus« (Skopje) i »Zbirka zadataka sa takmičenja mladih matematičara osnovnih škola SR Srbije u 1990. godini«. Zadatke i potpuna rješenja (koja su u zbirci skraćena) sa XVI »Arhimedesovog« matematičkog turnira dao je prof. Bogoljub Marinković iz Beograda. Neka rješenja zadataka su u potpunosti preuzeta iz spomenute literature.

Tekstovi zadataka su dani terminologijom koja se koristi u dotičnoj republici, a u rješenjima je korištena terminologija koja se koristi u Republici Hrvatskoj.

Zahvaljujemo se na pomoći u materijalima: prof. Živku Topaloviću (SR Bosna i Hercegovina), dr. Arifu Zoliću (SR Crna Gora), dr. Zdravku Kurniku i prof. Ivanu Staniću (Republika Hrvatska), prof. Kosti Miševskom (SR Makedonija), prof. Aleksandru Potočniku (Republika Slovenija), prof. Bogoljubu Marinkoviću i prof. Vojislavu Andriću (SR Srbija) i drugima.

Nadalje se zahvaljujemo recenzentu prof. Ivanu Staniću, koji je svojim primjedbama i prijedlozima doprineo poboljšanju zbirke, Anđi Mijatović i Denisu Vidović na kontroli kucanja teksta, te radnim ljudima GP »Slovo« Beli Manastir, a posebno Branku Vujakliji, Šanjiki Šnajder i Dragi Pašajliću na štampanju zbirke. Unaprijed se zahvaljujemo i svima onima koji nam ukažu na eventualne greške.

U Belom Manastiru, listopada 1990. godine

Milan Šarić
Luka Čeliković

SR BOSNA I HERCEGOVINA

OPŠTINSKO TAKMIČENJE

FOČA

Z a d a c i :

V razred:

1. Rekonstruisati slijedeće sabiranje, tj. naći cifre koje se kriju iza slova. Svako slovo označava cifru, jednaka slova znače istu, a različita slova različite cifre.
Koju riječ će poslije toga označavati broj 50214 ?

$$\begin{array}{r} PVKR \\ +\ PVAR \\ \hline ARKPR \end{array}$$

2. Odrediti najmanji prirodan broj kod koga je proizvod cifara 5040.
3. Učenik je za 37 dinara kupio knjigu, svesku, nalivpero i olovku. Sveska,nalivpero i olovka koštaju ukupno 19 dinara. Knjiga,nalivpero i olovka koštaju zajedno 35 dinara. Sveska i olovka koštaju 5 dinara. Koliko košta svaki predmet posebno ?
4. U ravni su date točke S_1 i S_2 koje su međusobno udaljene 6 cm.
a) Konstruisati kružnicu K_1 sa centrom S_1 i poluprečnikom 2 cm i kružnicu K_2 sa centrom S_2 i poluprečnikom 3 cm.
b) Odrediti rastojanje između najbližih i najudaljenijih tačaka tih kružnica.
5. Dvije prave se sijeku. Zbir tri od 4 ugla iznosi 250°. Odrediti svaki od dobijenih uglova.

VI razred:

1. Rekonstruisati slijedeće sabiranje, tj. naći cifre koje se kriju iza slova. Svako slovo označava cifru, jednaka slova znače istu, a različita slova različite cifre.
Koju će riječ poslije toga označavati broj 54910 ?

$$\begin{array}{r} VPRA \\ +\ RPRV \\ \hline ARKVK \end{array}$$

2. Za knjigu je plaćeno 10 dinara i još 1/3 vrijednosti te knjige. Koliko košta ta knjiga ?
3. Naći trocifren broj djeljiv sa 9, kome je cifra desetica za 5 veća od cifre jedinica, a proizvod sve tri cifre je nula.
4. Visine jednakokrakog tupouglog trougla povučene na krake, kad se produže čine ugao od 48°. Koliki su unutrašnji uglovi tog trougla ?
5. Data je prava p, tačka A na njoj i tačka M van nje. Konstruisati kružnicu K koja prolazi kroz tačku M i dodiruje pravu p u tački A.

VII razred:

1. Izračunati vrijednost izraza $(m^4+(m^2-1)^2)/(1+m^2(m-1))$ za $m=(2+1/3)^3.(1-1/2)^2.(1-1/7)^3$.
2. Težišnice, koje odgovaraju katetama pravouglog trougla, su dužina 10 i $4\sqrt{5}$. Izračunati hipotenuzu.
3. Pravougli trapez visine $6\sqrt{3}$ ima dijagonalu jednaku dužem kraku i unutrašnji ugao 60°. Izračunati srednju liniju trapeza.
4. Rastaviti na proste faktore x^3+3x^2-4x.

5. Kojim najmanjim prirodnim brojem treba pomnožiti broj 276, da bi se dobio potpun kvadrat nekog broja ?

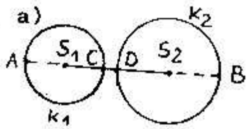
VIII razred:

1. Uprostiti izraz $((x^3+3x^2-4x)/((x-4)^2+16x)):((x-x^2)/(8+2x))$.
2. U jednačini $(x+a)/2-(1-(3x-a)/3)=2$ odrediti vrijednost parametra a za koje je rješenje jednačine jednako 1.
3. Dva radnika mogu da završe neki posao za 12 dana. Poslije zajedničkog rada od 5 dana, jedan radnik se razboli, pa je drugi radnik, da bi sve završio, radio još 17,5 dana. Za koliko dana može taj posao da završi svaki radnik radeći sam ?
4. Izračunati x^2+1/x^2 ako je $x+1/x=3$.
5. Površine baze i omotača prave pravilne šesterostrane piramide odnose se kao $\sqrt{3}:2$. Izračunati udaljenost vrha piramide od baze ako je osnovna ivica piramide $a=10$ cm.

R j e š e n j a :

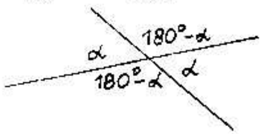
V razred:

1. $\begin{array}{r} PVKR \\ +PVAR \\ \hline ARKPR \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 5240 \\ +5210 \\ \hline 10450 \end{array}$, $50214 \longrightarrow$ PRVAK .
2. $5040=2.2.2.2.3.3.5.7=2.5.7.8.9$. Traženi broj je 25789.
3. Označimo redom cijene knjige, sveske nalivpera i olovke sa k,s,n,o. Tada imamo:
$k+s+n+o=37$ (*), $s+n+o=19$ (**), $k+n+o=35$ (***), $s+o=5$ (****).
Iz (*) i (**) slijedi $k=37-19=18$, iz (*) i (***) je $s=37-35=2$, dok je na osnovu (****) $o=5-2=3$, pa je prema (*) $n=37-(18+2+3)=14$. Dakle cijene knjige, sveske, nalivpera i olovke su redom 18, 2, 3 i 14 dinara.
4. a)



b) Najveća udaljenost dviju točaka kružnica je $|AB|=11$ cm, a najmanja $|CD|=1$ cm.

5.

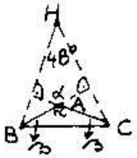


$2\alpha+(180^\circ-\alpha)=250^\circ \Rightarrow \alpha=250^\circ-180^\circ=70^\circ$,
$180^\circ-\alpha=110^\circ$.
Dva kuta imaju vrijednost po 70°, a dva po 110°.

VI razred:

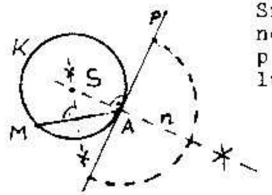
1. $\begin{array}{r} VPRA \\ +RPRV \\ \hline ARKVK \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 9541 \\ +4549 \\ \hline 14090 \end{array}$, $54910 \longrightarrow$ PRVAK.
2. $x=10+x/3 \Rightarrow x=15$ din.
3. Pošto je produkt znamenaka troznamenkastog broja 0, tada je bar jedna znamenka 0. Kako to nije znamenka stotica (jer tada broj ne bi bio troznamenkasti), ni znamenka desetica (jer je za 5 veća od znamenke jedinica), tada slijedi da je znamenka jedinica 0, znamenka desetica 5, a znamenka stotica 4 (jer je taj broj djeljiv sa 9). Traženi broj je 450.

4.



$\alpha+48^\circ=180^\circ \Rightarrow \alpha=132^\circ$,
$\alpha+2\beta=180^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ-\alpha/2=90^\circ-66^\circ=24^\circ$.

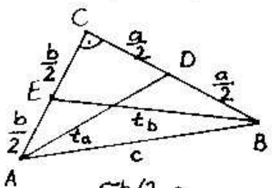
5.



Središte S kružnice K je u sjecištu normale n točkom A okomito na pravac p i simetrale tetive $\overline{AM}$. Duljina polumjera te kružnice jednaka je $|SA|$.

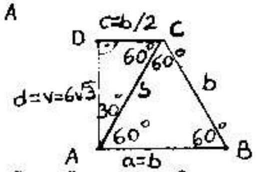
VII razred:

1. $m=2$, pa je vrijednost izraza 5.
2.



Na osnovu Pitagorinog teorema je $(a/2)^2+b^2=t_a^2$ i $a^2+(b/2)^2=t_b^2$. Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo redom: $5(a^2+b^2)/4=t_a^2+t_b^2$, $a^2+b^2=4(t_a^2+t_b^2)/5$, $c^2=4.180/5$, $c^2=144$, $c=12$.

3.

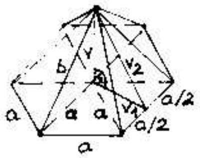


$6\sqrt{3}=v=b\sqrt{3}/2 \Rightarrow b=12$,
$m=(b+b/2)/2=3b/4=9$.

4. $x^3+3x^2-4x=x(x^2+3x-4)=x((x^2-x)+(4x-4))=x(x(x-1)+4(x-1))=x(x-1)(x+4)$.
5. $a=276=2^2.3.23$, $b=a.3.23=69a=(2.3.23)^2=138^2$.
Traženi najmanji prirodni broj je 69.

VIII razred:

1. $((x^3+3x^2-4x)/((x-4)^2+16x)):((x-x^2)/(8+2x))=$
$=(x(x-1)(x+4)/(x+4)^2):(x(1-x)/2(4+x))=$
$=(x(x-1)/(x+4)).(2(x+4)/(-x(x-1)))=-2$.
2. $(x+a)/2-(1-(3x-a)/3)=2$ & $x=1 \Rightarrow (1+a)/2-a/3=2 \Rightarrow a=9$.
3. Neka je x, odnosno y broj dana za koji samo prvi, odnosno samo drugi radnik sam završi cijeli posao. Tada za 1 dan prvi radnih završi 1/x, a drugi 1/y dio posla. Iz uvjeta zadatka slijedi $12.(1/x+1/y)=1$ (oba radnika završe posao za 12 dana) i $7.(1/x+1/y)=17,5.(1/y)$ (umjesto još 7 dana zajedničkog rada, nakon petog dana drugi radnik radi još 17,5 dana), odakle je $x=170$, $y=255$.
4. $x+1/x=3|^2 \Rightarrow x^2+1/x^2+2=9 \Rightarrow x^2+1/x^2=7$.

5. 

$a=10$ cm, $v_1=a\sqrt{3}/2$
$B=3a^2\sqrt{3}/2$, $P=3av_2$,
$B:P=\sqrt{3}:2 \Rightarrow 3a^2\sqrt{3}/2 : 3av_2=\sqrt{3}:2 \Rightarrow$
$\Rightarrow v_2=a$,
$v=\sqrt{v_2^2-v_1^2}=\sqrt{a^2-3a^2/4}=a/2=5$ cm.

REGIONALNO TAKMIČENJE

SARAJEVO

Z a d a c i :

VII razred:

1. Izračunati $(2^{35}.3^{32}-4^{17}.81^8)/(256^4.9^{16})$.
2. Stranice trougla su 3 uzastopna prirodna broja. Izračunati razliku odsječaka što ih obrazuje visina trougla na stranici srednje dužine.
3. Dva pravougla trougla, od kojih jedan ima jednake katete, a drugi ima zbir kateta 20, imaju zajedničku hipotenuzu. Izračunati površinu tako dobivenog konveksnog četverougla.
4. Izračunati $f(3)$ ako je $f(x+1/x)=x^2+1/x^2$.
5. Dva dječaka koračaju pokretnim stepeništem naviše, tako da jedan korača dva puta brže od drugog. Do vrha su uspjeli prijeći 12 i 8 stepenika. Izračunati koliko stepenika ima pokretno stepenište.

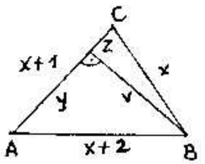
VIII razred:

1. Koliko najviše kilometara može prijeći automobilista sa istim gumama, ako se zna da se prednje gume istroše nakon prijeđenih 50000 km, a zadnje nakon prijeđenih 30000 km ?
2. Izračunati $f(7)$ ako je $f(x^2-2x+8)=4x^2+2x+1$.
3. U jednačini $(x+n)/2-(1-(3x-n)/3)=2$, gdje je n prirodan broj, odrediti sve vrijednosti parametra n, tako da rješenje takođe bude prirodan broj.
4. Izračunati udaljenost tjemena kocke, površine 441 cm^2, od dijagonale.
5. Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka koje na hipotenuzi obrazuje upisana kružnica.

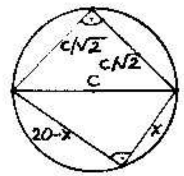
R j e š e n j a :

VII razred:

1. $(2^{35}.3^{32}-4^{17}.81^8)/(256^4.9^{16})=(2^{35}.3^{32}-2^{34}.3^{32})/(2^{32}.3^{32})=$
$=(2^{34}.3^{32})/(2^{32}.3^{32})=2^2=4$.

2. 

Primjenom Pitagorinog teorema (uz oznake kao na slici) dobivamo:
$x^2-z^2=(v^2)=(x+2)^2-y^2 \Rightarrow$
$x^2-(x+1-y)^2=(x+2)^2-y^2 \Rightarrow 2xy+2y=x^2+6x+$
$+5 \Rightarrow 2y(x+1)=(x+1)(x+5) \Rightarrow y=(x+5)/2 \Rightarrow$
$\Rightarrow z=(x-3)/2 \Rightarrow |y-z|=4$.

3. 

Primjenom Pitagorinog teorema izlazi
$c^2=x^2+(20-x)^2$, odakle je
$x(20-x)/2=100-c^2/4$ (*), pa je tražena površina konveksnog četverokuta
$P=c^2/4+x(20-x)/2 \overset{(*)}{=} c^2/4+100-c^2/4=$
$=100$.

4. $f(x+1/x)=x^2+1/x^2=(x+1/x)^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2 \Rightarrow f(3)=3^2-2=7$.

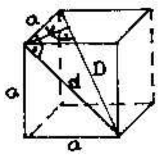
5. Dok je prvi dječak prešao 12 stepenica, drugi dječak je prešao 6 stepenica (jer prvi korača 2 puta brže od drugog dječaka), tj. do vrha je prvom preostalo još 6 stepenica. Od tih 6 stepenica drugi dječak je prešao 2 (ukupno 8), a za 4 stepenice ga je podiglo pokretno stepenište. To znači da se pokretno stepenište giba dvostruko brže od drugog dječaka (odnosno kao prvi dječak). Kako je drugi dječak prešao ukupno 8 stepenica, za to vrijeme će se pokretno stepenište podići za 16 stepenica, pa ukupno ima 8+16=24 stepenica. Do istog rezultata dolazimo i korištenjem činjenice da se pokretno stepenište giba istom brzinom kao i prvi dječak (12+ +12=24).

VIII razred:

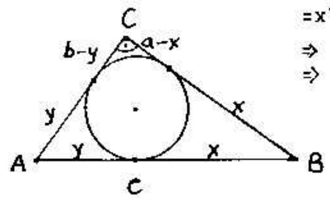
1. Nakon 1 km vožnje prednje gume se istroše za 1/50000 svoje vrijednosti, a zadnje za 1/30000 svoje vrijednosti. Neka je x maksimalno mogući broj prijeđenih km istim gumama. Nakon $x/2$ km međusobno ćemo zamijeniti prednje i zadnje gume. Tada će biti $(x/2).(1/50000+1/30000)=1$, tj. $x=37500$ km. Istim gumama je maksimalno moguće prijeći 37500 km, s tim da se nakon 18750 km međusobno zamijene prednje i zadnje gume.

2. $f(x^2-2x+8)=4x^2+2x+1$,
$x^2-2x+8=7 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$,
$f(7)=4.1^2+2.1+1=7$.

3. $(x+n)/2-(1-(3x-n)/3)=2 \Rightarrow n=18-9x \Rightarrow n=9\in N$ (za $x=1\in N$).

4. 

$6a^2=(O)=441$ cm^2 $\Rightarrow a=7\sqrt{6}/2$ cm,
$d=a\sqrt{2}$, $D=a\sqrt{3}$,
$v=ad/D=a^2\sqrt{2}/a\sqrt{3}=a\sqrt{2/3}=(7\sqrt{6}/2).\sqrt{2/3}=$
$=7$ cm.

5. 

$a-x=b-y \Rightarrow a-b=x-y|^2 \Rightarrow a^2+b^2-2ab=$
$=x^2+y^2-2xy \Rightarrow c^2-2ab=x^2+y^2-2xy \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+y)^2-2ab=x^2+y^2-2xy \Rightarrow 4xy=2ab \Rightarrow$
$\Rightarrow xy=ab/2 \Rightarrow xy=P_\Delta$.

REPUBLIČKO TAKMIČENJE

Z a d a c i :

VII razred:

1. Pokazati da je broj $2+2^2+2^3+...+2^{30}$ djeljiv brojem 7.
2. Izračunati f(1) ako je $f(x+1/x)=x^2+1/x^2$.
3. Paralelne stranice trapeza su 75 i 33, a kraci 45 i 39 cm. Izračunajte ugao između dijagonale i dužeg kraka u tjemenu manje osnovice.
4. Površina ma kog četverougla ABCD jednaka je površini trougla ACM, pri čemu je tačka M četvrto tjeme paralelograma DBCM. Dokazati !
5. Koliko najviše kilometara može prijeći automobil sa istim gumama, ako se zna da se prednje gume istroše nakon prijeđenih 50000, a zadnje nakon prijeđenih 30000 km ?

VIII razred:

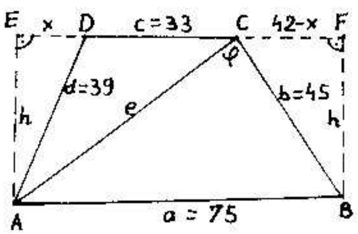
1. Izračunaj vrijednost razlomka $(x+2y)/(x-2y)$, ako je $x^2+4y^2=5xy$ i $0<x<y$.
2. Šestocifreni broj počinje cifrom 1. Ako se prva cifra premjesti na posljednje mjesto, dobija se broj koji je 3 puta veći od polaznog. Koji je to broj ?
3. Dokazati da je zbir $12+12^2+12^3+...+12^{1990}$ djeljiv sa 13.
4. Romb, čija je manja dijagonala jednaka stranici a, rotira oko prave normalne na dužoj dijagonali u njenoj krajnjoj tački. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog rotacionog tijela. (Specijalno: Kolika je površina i zapremina toga tijela za a=6 cm ?)
5. Jedna dijagonala pravouglog trapeza dijeli taj trapez na 2 trougla, od kojih je jedan jednakostraničan. U kom odnosu stoje dijagonale trapeza ?

R j e š e n j a :

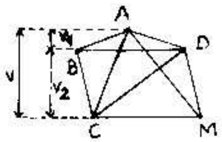
VII razred:

1. $2+2^2+2^3+2^4+...+2^{29}+2^{30}=2((1+2+2^2)+2^3(1+2+2^2)+...+2^{27}(1+2+2^2))=14.(1+2^3+2^6+...+2^{27})$, što je djeljivo sa 7.

2. $f(x+1/x)=x^2+1/x^2=(x+1/x)^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2 \Rightarrow f(1)=1-2=-1$.

3. 

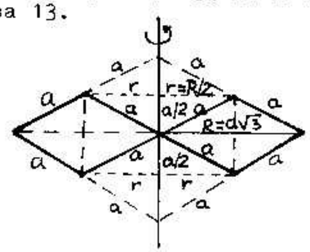
Iz $39^2-x^2=h^2=45^2-(42-x)^2$ slijedi x=15, a odatle h=36 cm, e=60 cm, pa, zbog $a^2=b^2+e^2$, slijedi da je $\measuredangle ACB=90^\circ$.

4. 

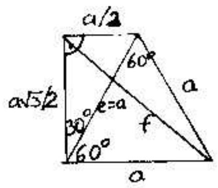
$P_{ABCD}=P_{BCD}+P_{ABD}=P_{CMD}+P_{ABD}=$
$=|CM|v_2/2+|BD|v_1/2=$
$=|CM|v_2/2+|CM|v_1/2=$
$=|CM|(v_1+v_2)/2=|CM|v/2=$
$=P_{ACM}$.

5. Vidi rješenje VIII-1 zadatka REGIONALNOG NATJECANJA.

VIII razred:

1. $x^2+4y^2=5xy \Rightarrow x^2+4y^2+4xy=9xy$ & $x^2+4y^2-4xy=xy \Rightarrow (x+2y)^2=9xy$ & $(x-2y)^2=xy \Rightarrow ((x+2y)/(x-2y))^2=9 \Rightarrow (x+2y)/(x-2y)=\pm 3$.
2. $\overline{x1}=3.\overline{1x} \Rightarrow 10x+1=3.(100000+x) \Rightarrow x=42857 \Rightarrow \overline{1x}=142857$.
3. $12+12^2+12^3+12^4+...+12^{1989}+12^{1990}=12(1+12)+12^3(1+12)+...+12^{1989}(1+12)=13(12+12^3+...+12^{1989})$, što je očito djeljivo sa 13.
4. 

$O=2.P_{s(R=a\sqrt{3},v=a,s=2a)}=$
$=2.a\sqrt{3}\pi.2a=4\sqrt{3}\pi a^2$,
$V=2.V_{s(R=a\sqrt{3},v=a,s=2a)}-$
$-4.V_{s(r=a\sqrt{3}/2,v=a/2,s=a)}=$
$=2.3a^2\pi a/3-4.(3a^2\pi/4).(a/2)/3$
$=3a^3\pi/2$.

   $a=6$ cm $\Rightarrow O=144\sqrt{3}\pi$ cm^2 & $V=324\pi$ cm^3.
5. 

$e=a$, $f=\sqrt{a^2+(a\sqrt{3}/2)^2}=a\sqrt{7}/2$,
$e:f=2:\sqrt{7}$.

SR CRNA GORA

REPUBLIČKO TAKMIČENJE

Z a d a c i :

VII razred:

1. Ako je $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$, dokazati da je $ad=bc$. Dalje, dokazati i obrnuto tvrđenje, tj. ako je $ad=bc$, tada je $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$.
2. Zbir apsolutnih vrijednosti rješenja jednačine $(5+|x-1|)/2=5$ je mjerni broj stranice kvadrata ABCD. Tačka O je sredina stranice AB. Izračunati površinu i obim figure određene presjekom datog kvadrata i kruga čiji je centar tačka O, a poluprečnik jednak dužini stranice kvadrata ABCD.
3. Dokazati da ne postoji polinom trećeg stepena $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sa cjelobrojnim koeficijentima, takav da je $f(7)=11$ i $f(11)=13$.
4. Dokazati da ne postoje cijeli brojevi m i n koji zadovoljavaju jednačinu $m^2+1954=n^2$.
5. Ako su A,B,C i D proizvoljne tačke ravni, tada barem jedan od trouglova ABC, BCD, CDA i DAB nije oštrougli. Dokazati !

VIII razred:

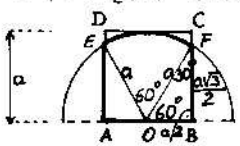
1. Odrediti jednačinu prave p koja je simetrična pravoj $84x+35y+245=0$ u odnosu na pravu $y=-x$.
2. Odrediti koliko godina ima lice 1990. godine, ako je 1970. godine imalo onoliko godina koliko je zbir cifara njegove godine rođenja.
3. Odrediti a i b tako da izraz $5-(1-a^2-4ab-4b^2)/(2+(1+2a+3b)^2)$ ima najmanju vrijednost.
4. Rješenje jednačine $a-12=(2a-3)^2/8-(2a^2-a-3/2)/4$ je mjerni broj u centimetrima ivice kocke ABCDA'B'C'D'. Izračunati površinu i zapreminu tetraedra AB'CD'.
5. Odrediti sve dvocifrene brojeve kod kojih se zbir cifara ne mijenja množenjem sa brojevima 2,3,4,5,6,7,8,9.

R j e š e n j a :

VII razred:

1. $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2b^2+2abcd+c^2d^2=a^2b^2+a^2d^2+b^2c^2+c^2d^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2-2abcd=0 \Leftrightarrow (ad-bc)^2=0 \Leftrightarrow ad-bc=0 \Leftrightarrow ad=bc.$

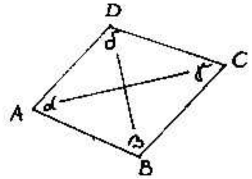
2. $(5+|x-1|)/2=5 \Leftrightarrow 5+|x-1|=10 \Leftrightarrow |x-1|=5 \Leftrightarrow x-1=\pm5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=1\pm5 \Leftrightarrow x\in\{-4,\ 6\}$,
$a=|x_1|+|x_2|=|-4|+|6|=4+6=10$, $O=a+2.\frac{a\sqrt{3}}{2}+a\frac{\pi}{3}=a(1+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})\approx37,79$ cm.



$P=P_{k.i.}(r=a,\ \alpha=60^\circ)+2.P_{\Delta AOE}=$
$=a^2\pi/6+(a\sqrt{3}/2).(a/2)=$
$=(a^2/2).(\pi/3+\sqrt{3}/2)\approx95,66$ cm^2,

3. Neka za polinom $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ vrijedi $f(7)=11$ i $f(11)=13$. Tada je:
$$\left.\begin{array}{l} f(11)=a.11^3+b.11^2+c.11+d=13 \\ f(7)=a.7^3+b.7^2+c.7+d=11 \end{array}\right| - \Rightarrow$$
$\Rightarrow a.(11^3-7^3)+b.(11^2-7^2)+c.(11-7)=13-11 \Rightarrow$
$\Rightarrow a.(11-7)(11^2+11.7+7^2)+b.(11-7)(11+7)+c.4=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4.(247a+18b+c)=2$, gdje su $a,b,c,d\in Z$ (po pretpostavci). Lijeva strana posljednje jednakosti je djeljiva sa 4, a desna nije, pa bar jedna od pretpostavki $f(7)=11$ i $f(11)=13$ nije istinita, čime je tvrdnja zadatka dokazana.

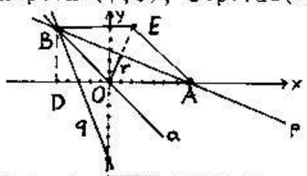
4. $m^2+1954=n^2 \Leftrightarrow 1954=n^2-m^2$ (*). Kako je lijeva strana jednakosti (*) parna, to onda mora to biti i desna, što će biti ispunjeno kada su n^2 i m^2, a s tim i m i n, iste parnosti. Iz (*) slijedi $2.972=(n-m)(n+m)$ (**). Kako su n i m iste parnosti, tada su n-m i n+m parni brojevi, pa je desna strana jednakosti (**) djeljiva sa 4, a lijeva nije, što znači da zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

5. 

Pretpostavimo (suprotno tvrdnji zadatka) da su svi trokuti ABC, ABD, ACD, BCD šiljastokutni. Tada su kutevi $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ šiljasti, pa vrijedi $\alpha+\beta+\gamma+\delta<360^\circ$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$. Time je tvrdnja zadatka dokazana.

VIII razred:

1. $q \equiv 84x+35y+245=0 \equiv x/(-35/12)+y/(-7)=1$,
$a \equiv y=-x$,
$p \equiv 84(-y)+35(-x)+245=0 \equiv 35x+84y-245=0 \equiv x/7+y/(35/12)=1$,
$A=p\cap x=(7,0)$, $B=p\cap a=(-5,5)$, $O(0,0)$,

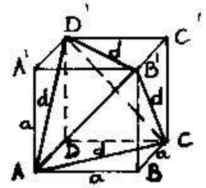


$|OA|=7$, $|OB|=5\sqrt{2}$, $|AB|=\sqrt{12^2+5^2}=13$,
$P_{\Delta OAB}=7.5/2=35/2 \Rightarrow r=2.P_{\Delta OAB}/|AB|=$
$=35/13$,
$O=r\pi(|OA|+|OB|)=35(7+5\sqrt{2})\pi/13\approx$
$\approx 119,015$.
$V=r^2\pi\ |AB|/3=1225\pi/39\approx98,678$.

2. Neka je $\overline{19xy}=1900+10x+y$ godina rođenja lica. Tada je prema uvjetu zadatka $1970-(1900-10x-y)=1+9+x+y$, tj. $y=30-11x/2$. Kako su x i y znamenke, slijedi da je $x=4$ i $y=8$, pa je lice rođeno 1948. godine, a 1990. godine ono ima 42 godine.

3. Vrijednost izraza $5-(1-a^2-4ab-4b^2)/(2+(1+2a+3b)^2)$, tj. izraza $5+((a+2b)^2-1)/(2+(1+2a+3b)^2)$ je minimalna za $a+2b=0$ i $1+2a+3b=0$, tj. za $a=-2$ i $b=1$.

4. $a-12=(2a-3)^2/8-(2a^2-a-3/2)/4 \ |.8 \Rightarrow$
$8a-96=4a^2-12a+9-4a^2+2a+3 \Rightarrow a=6$ cm,
$O=4.(d^2\sqrt{3}/4)=(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}=2a^2\sqrt{3}=72\sqrt{3}$ cm^2,
$V=a^3-4.(a^3/6)=a^3/3=72$ cm^3.



5. Neka je $\overline{xy}$ traženi dvoznamenkasti broj. Broj $9.\overline{xy}$ je djeljiv sa 9. tj. suma znamenaka mu je djeljiva sa 9, pa je (prema uvjetu zadatka) i suma znamenaka x+y traženog broja $\overline{xy}$ djeljiva sa 9. Od svih dvoznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih sa 9, ostale uvjete zadatka zadovoljavaju brojevi: 18, 45, 90 (suma znamenaka im je 9) i 99 (suma znamenaka mu je 18).

REPUBLIKA HRVATSKA

OPĆINSKO NATJECANJE

Z a d a c i :

V razred:

1. a) Izračunaj: $16+4.5-(7-12:3)+8$.
   b) Dani su skupovi: $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,d,f\}$, $C=\{b,e,f,g\}$, $D=\{a,f,g,h\}$. Odrediti skup S ako je $S\subset A$, $S\cap(B\cup D)=\emptyset$, $A\cap C\subset S$ i $C\not\subset S$.
2. U dvjema košarama nalazi se ukupno 33 jabuke. Kada bismo premjestili 4 jabuke iz prve u drugu košaru, onda bi u drugoj košari bilo 2 puta više jabuka nego u prvoj. Koliko je jabuka u svakoj košari ?
3. Riješi jednadžbu: $100:\{[(7.x+24):5].4+36\}=1$.
4. Može li zbroj 4 uzastopna prirodna broja biti prost broj ? Obrazloži !
5. Što sve može biti presjek dva jednaka kvadrata ? Nacrtaj odgovarajuće slike.

VI razred:

1. a) Izračunaj $8-6.(2/3)-(0,5.10-7,5:5)$.
   b) Kvadrat i pravokutnik imaju jednake opsege koji iznose 48 cm. Kolike su duljine stranica pravokutnika, ako je dulja stranica pravokutnika jednaka 3/2 duljine stranice kvadrata ?
2. Prikaži pomoću 4 trojke i 4 računske operacije svaku od 10 znamenaka 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Pri tome smiješ upotrijebiti i zagrade.
3. Put između 2 grada auto je prešao za 3 dana. Prvi dan je prešao 3/8, a drugi dan 5/12 cijelog puta. Treći dan je prešao 45 km više od 1/6 cijelog puta. Kolika je udaljenost ta dva grada ?
4. Odredi najveći šesteroznamenkasti broj $\overline{456abc}$ koji je djeljiv sa 7,8 i 9.
5. Dana su 3 kvadrata čije su površine redom 4 cm^2, 9 cm^2, 36 cm^2. Dva od danih kvadrata treba podijeliti na po 2 dijela, tako da se od svih 5 dobivenih dijelova može sastaviti novi kvadrat. Nacrtaj sliku.

VII razred:

1. Neka su x, y cijeli brojevi. Ako se prvi broj podijeli drugim brojem, dobit će se količnik 2 i ostatak 2. Ako se pak njihov zbroj podijeli njihovom razlikom, dobit će se količnik 2 i ostatak 8. Koji su to brojevi ?
2. Tek oboreno stablo težilo je 2,25 tone i sadržalo je 64% vode. Poslije tjedan dana to stablo je sadržalo 46% vode. Za koliko se smanjila masa stabla tog tjedna ? Izrazi smanjenje u postocima.
3. Razlomak 101/110 prikaži kao zbroj dvaju razlomaka kojima su nazivnici 5 i 22 i brojnici prirodni brojevi.
4. Za koje cjelobrojne vrijednosti parametra m jednadžba $(3/2)x-3=2(1-m)$ ima negativno rješenje ?

5. Dan je pravokutnik ABCD za koji je $|AB| > |BC|$ i dana je točka B_1, simetrična točki B u odnosu na dijagonalu AC. Pravac AB_1 siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki E. Dokaži da je $|AE| = |EC|$.

VIII razred:

1. Izračunaj $(\sqrt{5}-\sqrt{3})/(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + (\sqrt{5}+\sqrt{3})/(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-3)/(\sqrt{3}+3)$.
2. Riješi nejednaDŽBU $(x+4)/(3-x) < 2$.
3. Okomica, spuštena iz vrha B paralelograma ABCD na dijagonalu $\overline{AC}$, dijeli tu dijagonalu na 2 dijela duljina 15 cm i 6 cm. Odredi duljine stranica, ako je razlika duljina dviju susjednih stranica 7 cm.
4. Odredi brojeve a i b za koje vrijedi $a^2+b^2=2(2a-3b)-13$.
5. Dan je paralelogram ABCD, pri čemu je kut kod vrha B tup. Stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CB}$ produžene su preko vrha B i na produžecima su određene točke E i F, tako da su dužine $\overline{BE}$ i $\overline{BF}$ osnovice jednakokračnih trokuta BCE i ABF. Dokaži da je trokut DEF jenakokračan.

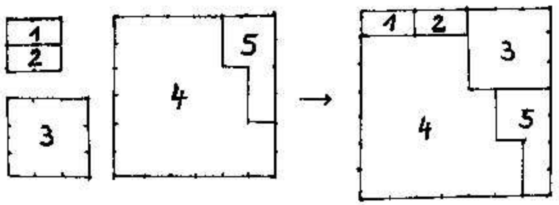
R j e š e n j a :

V razred:

1. a) 41, b) $S=\{b,e\}$. Obrazložite rješenje.
2. $(33-x)+4=2.(x-4) \Rightarrow x=15$. U prvoj košari je 15, a u drugoj 18 jabuka.
3. $x=8$.
4. U skupu od 4 uzastopna prirodna broja uvijek su 2 parna i 2 neparna broja. Zbroj 2 broja iste parnosti je paran broj, pa je zbroj 4 uzastopna prirodna broja paran broj veći od 2, što znači da taj zbroj nije prost broj.
   Drugi način: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=2.(2n+3)$, što je očito složen broj.
5. $\emptyset$, točka, dužina, trokut, četverokut, peterokut, šesterokut, sedmerokut i osmerokut. Nacrtajte pripadne slike.

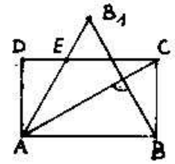
VI razred:

1. a) 0,5.
   b) Stranica kvadrata je $a=12$ cm, dulja stranica pravokutnika ima duljinu $a_1=18$ cm, a kraća $b_1=6$ cm. Obrazložite odgovor.
2. $3.3-3.3=0$, $3:3+3-3=1$, $3:3+3:3=2$, $(3+3+3):3=3$, $(3.3+3):3=4$, $3+3-3:3=5$, $3+3+3-3=6$, $3+3+3:3=7$, $3.3-3:3=8$, $3.3+3-3=9$.
3. $3x/8 + 5x/12 + (x/6+45) = x \Rightarrow x=108$ km.
4. 456624. Obrazložite odgovor.
5.



VII razred:

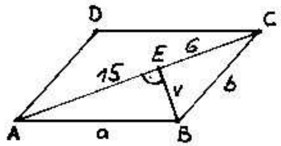
1. Iz $x=2y+2$ i $x+y=2.(x-y)+8$ slijedi $x=22$, $y=10$.
2. Suha tvar stabla je $36\%.2,25=0,81$ tona, što poslije sušenja čini 54% mase stabla. Dakle, masa stabla nakon tjedan dana je $0,81.100/54=1,5$ tone, pa je gubitak mase stabla 0,75 tone, tj. $0,75.100/2,25=33,33\%$.
3. $101/110=3/5+7/22$. Obrazložite odgovor.
4. $3x/2-3=2.(1-m) \Rightarrow x=(10-4m)/3$,
   $x<0 \Rightarrow (10-4m)/3<0 \Rightarrow 10-4m<0 \Rightarrow m>5/2 \Rightarrow m\in\{3,4,5,\ldots\}$.
5.



$\sphericalangle CAB = \sphericalangle B_1AC$ (točke B i B_1 su simetrične u odnosu na AC) i $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ (izmjenični kutevi), pa je $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ECA$, tj. trokut ACE je jednakokračan, što znači da je $|AE|=|EC|$.

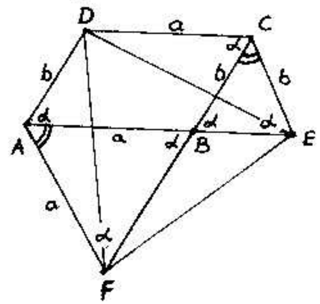
VIII razred:

1. $6+\sqrt{3}$.
2. $(x+4)/(3-x)<2 \Rightarrow (x+4)/(3-x)-2<0 \Rightarrow (3x-2)/(3-x)<0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow (3x-2>0 \wedge 3-x<0) \vee (3x-2<0 \wedge 3-x>0) \Rightarrow$
   $\Rightarrow (x>2/3 \wedge x>3) \vee (x<2/3 \wedge x<3) \Rightarrow x>3 \vee x<2/3 \Rightarrow$
   $\Rightarrow x\in R\setminus[2/3,3]$.
3.



Primjenom Pitagorinog teorema na trokute ABE i BCE slijedi redom:
$a^2-15^2 = v^2 = b^2-6^2$,
$a^2-b^2=256-36$, $(a-b)(a+b)=189$,
$7.(a+b)=189$ (jer je $a-b=7$),
$a+b=27$.
Sada iz $a-b=7$ i $a+b=27$ slijedi $a=17$ cm, $b=10$ cm.

4. $a^2+b^2=2.(2a-3b)-13 \Rightarrow a^2+b^2-4a+6b+13=0 \Rightarrow (a^2-4a+4)+(b^2+6b+9)=0 \Rightarrow (a-2)^2+(b+3)^2=0 \Rightarrow a-2=0$ i $b+3=0$ (zbog $(a-2)^2 \geq 0$ i $(b+3)^2 \geq 0$, a desna strana jednadžbe je nula) $\Rightarrow a=2$, $b=-3$.
5.



Neka je $\sphericalangle BAD=\alpha$. Tada je $\sphericalangle BCD=\alpha$, $\sphericalangle EBC=\sphericalangle BEC=\alpha$, $\sphericalangle FBA=\sphericalangle BFA=\alpha$, $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BAF = 180^\circ-2\alpha$, $\sphericalangle ECD=\sphericalangle DAF=180^\circ-\alpha$ (obrazložite navedene tvrdnje !). Iz sukladnosti trokuta ECD i DAF ($|EC|=|DA|=b$, $|CD|=|AF|=a$, $\sphericalangle ECD=\sphericalangle DAF=180^\circ-\alpha$) slijedi $|ED|=|DF|$, tj. trokut FED je jednakokračan.

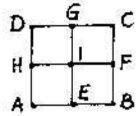
REGIONALNO NATJECANJE

BELI MANASTIR

Z a d a c i :

V razred:

1. Naznači vrhove svih četverokuta na slici



2. Od jednog dijeljenja ostali su tragovi

: =368

-200

0

Koliki je djeljenik, a koliki djelitelj ?

3. Najveći zajednički djelitelj dvaju prirodnih brojeva je 12, a najmanji zajednički višekratnik istih brojeva je 672. Odredi te brojeve, ako je manji od njih djeljiv sa 7, a veći nije.
4. U jednoj školi peti razred pohađa 70 učenika. Od toga su 27 učenika članovi dramske sekcije, 32 pjevaju u zboru, a 22 učenika igraju košarku. U dramskoj sekciji ima 16 članova zbora, u zboru je 6 učenika koji igraju košarku, dok u dramskoj sekciji 8 učenika igra košarku. Ako su 3 učenika angažirana u sve 3 aktivnosti (u dramskoj sekciji, zboru i košarci), koliko učenika nije angažirano ni u jednoj od tih aktivnosti ?
5. O kojem množenju je riječ ? (Zamijeni znak * odgovarajućim znamenkama).

```
***·*2*
-------
    ***
   ****
    ***
-------
   *9*2*
```

VI razred:

1. Dopuni kvadrat brojevima, tako da dobivene sume u stupcima, recima i dijagonalama budu jednake.

1/6		
	5/12	
		2/3

2. Izračunaj: $2-\{2-[6-(2-3).(-2)]:4-3\}.5$.
3. Putnički vlak prijeđe udaljenost od mjesta A do mjesta B za 6 sati, a teretni istu udaljenost za 10 sati. Ako vlakovi krenu istovremeno jedan iz A, a drugi iz B (jedan drugome u susret), nakon kojeg vremena će se sastati ?
4. Dva pravca se sijeku. Zbroj 3 od 4 nastala kuta je $212^{\circ}30'$. Koliko ima svaki od nastalih kuteva ?
5. Provjeri valjanost izraza $1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$, a zatim izračunaj: $1/(1.2) + 1/(2.3) + 1/(3.4) + ... + 1/(99.100)$.

R j e š e n j a :

V razred:

1. ABCD, AEIH, HIGD, EBFI, IFCG, ABFH, HFCD, AEGD, EBCG.
2. Označimo dividend sa a, a divizor sa b. Tada iz 8b=200 slijedi b=25, pa je a=bq=25.368=9200, pri čemu je q=368 kvocijent. Dakle, 9200:25=368.
3. $ab=M(a,b).V(a,b)=12.672=12.(12.8.7)=(12.8).(12.7)=96.84 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ a=96, b=84, pretpostavljajući da je $a>b$ i uzimajući u obzir uvjete zadatka: $7\nmid a$, $7|b$, $12|a$, $12|b$.
4. Neka su D,P,K redom skupovi učenika koji su članovi dramske sekcije, pjevačkog zbora , košarkaške ekipe. Tada je prema uvjetima zadatka: $k(D)=27$, $k(P)=32$, $k(K)=22$, $k(D\cap P)=16$, $k(P\cap K)=6$, $k(D\cap K)=8$, $k(D\cap P\cap K)=3$, pa je $k(D\cup P\cup K)=k(D)+k(P)+k(K)-k(D\cap P)-k(P\cap K)-k(D\cap K)+k(D\cap P\cap K)=27+32+22-16-6-8+3=54$.

   Odatle je $k(D\cup P\cup K)^c=70-54=16$.
5. Logičkim razmatranjem (dati obrazloženje) dolazimo do rezultata :

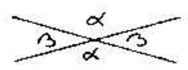
```
 825.121
 -------
     825
    1650
     825
   -----
   99825
```

VI razred:

1. Jedno od rješenja zadatka je:

1/6	7/12	1/2
3/4	5/12	1/12
1/3	1/4	2/3

Nađite ostala rješenja.

2. 12.
3. Za jedan sat putnički vlak prijeđe 1/6 puta, a teretni 1/10 puta. Neka se vlakovi sretnu nakon x sati. Tada će za to vrijeme putnički vlak prijeći x/6 puta, a teretni x/10 puta, pa iz $x/6 + x/10=1$ slijedi $x=3,75$ sati=3 sata 45 minuta.
4. 

$\alpha+\beta=180^{\circ}$

$\alpha=360^{\circ}-(\alpha+2\beta)$

Iz $360^{\circ}-212^{\circ}30'=147^{\circ}30'$ i iz $180^{\circ}-147^{\circ}30'=32^{\circ}30'$ slijedi da su dva vršna kuta od po $147^{\circ}30'$, a dva vršna kuta od po $32^{\circ}30'$.

5. $1/n - 1/(n+1)=(n+1-n)/n(n+1)=1/n(n+1)$ (*),

   $1/(1.2) + 1/(2.3) + 1/(3.4) + ... + 1/(98.99) + 1/(99.100) \overset{(*)}{=}$

   $\overset{(*)}{=}$ $1-1/2 +1/2-1/3 +1/3-1/4 +... +1/98-1/99 +1/99-1/100 =$

   $= 1 - 1/100 = 99/100 = 0,99.$

REPUBLIČKO NATJECANJE

Z a d a c i :

VII razred:

1. Siječanj mjesec jedne godine imao je 4 ponedeljka i 4 petka. Koji dan u tjednu je bio 1. siječanj ?
2. Zbrojimo li svaka dva od četiri broja a,b,c,d dobivamo ovih 6 suma: 1, 2, 5, 6, 9, 10. Odredi te brojeve.
3. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$ koji su pet puta veći od produkta svojih znamenaka.
4. Neka su α, β, γ, δ kutevi četverokuta ABCD i pri tome $\alpha=\beta$, $\delta>\gamma$. Dokaži da je $|BC|>|AD|$.
5. Zadan je pravac p i točke A i B s iste strane tog pravca. Konstruiraj na pravcu p onu točku C za koju je zbroj udaljenosti $|AC|+|BC|$ najmanji.

VIII razred:

1. Odredi sve cijele brojeve a za koje je izraz $(a^2+1)/(a-1)$ također cijeli broj.
2. Odredi opseg pravokutnog trokuta ABC kojemu je površina 54, a duljine stranica povezuje relacija $2b=c+a$.
3. Dokaži da je $2^{10}+5^{12}$ složen broj.
4. Na jednokružnom šahovskom turniru sudjelovalo je 8 igrača i svaki od njih osvojio je različit broj bodova. Šahist koji je osvojio drugo mjesto imao je isto toliko bodova koliko i četiri posljednja igrača zajedno. Kako je završila partija igrača koji su osvojili treće i sedmo mjesto ?
5. Unutar trokuta ABC nalazi se točka P, tako da trokuti ABP, BCP i ACP imaju jednaku površinu. Dokaži da je točka P sjecište težišnica, tj. težište trokuta.

R j e š e n j a :

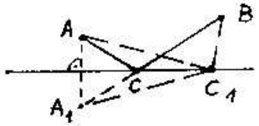
VII razred:

1. Prvi ponedeljak je bio 7. siječnja, jer će samo tada mjesec imati 4 petka. Prema tome, 1. siječanj je bio u utorak.

2. Neka je $a<b<c<d$. U danim zbrojevima svaki se broj pojavljuje 3 puta kao pribrojnik. Kako je $1+2+5+6+9+10=33$, tada je $a+b+c+d=33:3=11$. Osim toga je $a+b=1$, $a+c=2$, $a+d=5$, pa je (zbrajanjem tih jednakosti) $2a+(a+b+c+d)=8$, tj. $a=(8-11)/2=-3/2$, a odavde $b=5/2$, $c=7/2$, $d=13/2$.

3. $\overline{abc}=5.abc \Rightarrow 100a+10b+c=5.abc \Rightarrow c=5$ (jer za $c=0$ desna strana bi bila nula, a lijeva ne) $\Rightarrow 5|2b+1 \Rightarrow b=7$ (jer za $b=2 \Rightarrow a=-1/2\notin N$) $\Rightarrow a=1$. Dakle, traženi broj je 175.

4. Neka je $AD\cap BC=E$. Iz $\alpha=\beta \Rightarrow |BE|=|AE|$. Iz $\delta>\gamma \Rightarrow \delta^s<\gamma^s \Rightarrow$ $\Rightarrow |CE|<|DE| \Rightarrow |BE|-|CE|>|AE|-|DE| \Rightarrow |BC|>|AD|$.

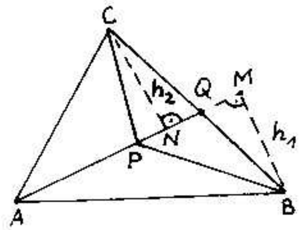
5. 

Neka je A_1 točka simetrična točki A s obzirom na pravac p i neka je $C=A_1B\cap p$. Tvrdimo da je C tražena točka. Neka je C_1 bilo koja druga točka pravca p. Tada

je $|AC_1|+|BC_1|=|A_1C_1|+|C_1B|>|A_1B|=|A_1C|+|CB|=|AC|+|BC|$, tj. $|AC_1|+|BC_1|>|AC|+|BC|$, pa je zaista C tražena točka.

VIII razred:

1. $n=(a^2+1)/(a-1)=((a^2-1)+2)/(a-1)=((a-1)(a+1)+2)/(a-1)=$ $=a+1+2/(a-1)\in Z \Leftrightarrow 2/(a-1)\in Z \Leftrightarrow a-1\in\{-1,1,-2,2\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\in\{0,2,-1,3\}$. Dakle, $a\in\{-1,0,2,3\}$.
2. Iz $c^2=a^2+b^2$ (Pitagorin teorem) i uvjeta zadatka: $ab/2=54$ i $2b=c+a$ slijedi da je $a=9$, $b=12$, $c=15$, pa je opseg trokuta 36.
3. $2^{10}+5^{12}=(2^5)^2+(5^6)^2=(2^5+5^6)^2-2.2^5.5^6=(2^5+5^6)^2-(10^3)^2=$ $=(2^5+5^6-10^3).(2^5+5^6+10^3)$, a to je složen broj jer je svaki faktor veći od 2 (pokažite to !).
4. Četiri posljednja igrača odigrali su međusobno 6 partija, pa su zajedno sakupili ne manje od 6 bodova. S druge strane, igrač na 2. mjestu nije sakupio više od 6 bodova. Ako je x broj postignutih bodova igrača na 2. mjestu, tada vrijedi $6\le x\le 6$, tj. $x=6$. Zaključujemo da su zadnja 4 igrača osvojili 6 bodova, pa je svaki od njih izgubio partiju sa svakim od prve četvorice. Dakle, igrač na trećem mjestu je pobijedio igrača na sedmom mjestu.
5. $P_{APB}=P_{APC} \Rightarrow |AP|.h_1/2=|AP|.h_2/2 \Rightarrow h_1=h_2$ (*),
$P_{APB}=P_{PBC} \Rightarrow P_{APB}=P_{PQB}+P_{PQC} \Rightarrow |AP|.h_1/2=|PQ|.h_1/2+|PQ|.h_2/2$ $\overset{(*)}{\Rightarrow} |AP|=2.|PQ|$ (**),
Iz sukladnosti trokuta QBM i QCN slijedi $|BQ|=|CQ|$ (***).
Iz (**) i (***) slijedi tvrdnja zadatka.



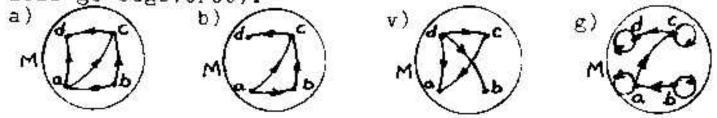
SR MAKEDONIJA

REGIONALEN NATPREVAR

Z a d a č i :

V oddelenie:

1. Odredi koja od relaciite na crtežot e tranzitivna. (Obrazloži go odgovorot).



2. Nad stranite na pravoagolnik vo koj dolžinata e za 4 cm pogolema od širinata odnadvor se konstruirani ramnostrani triagolnici. Perimetarot na konstruiranata figura e 80 cm. Presmetaj ja ploštinata na pravoagolnikot.
3. Neka $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{0,1,2\}$, $C=\{5,6\}$. Proveri ja točnosta na ravenstvata : a) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$, b) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.
4. Od 2 različni mesta A i B istovremeno, eden sproti drug, trgnale dvajca velosipedisti. Prviot se dvižel so 13 km na čas, a vtoriot so 15 km na čas. Vo momentot koga se sretnale vtoriot izminal 6 km poveke. Presmetaj go rastojanieto megu mestata A i B.

VI oddelenie:

1. Odredi go x od izrazite: a) $(3\frac{4}{5}-1\frac{3}{4}).x=0$, b) $(-8).(x+3)=0$.
2. Marko e tripati pomlad od tatko mu, a dvapati postar od sestra mu. Tatko mu i sestra mu zaedno imaat 42 godini. Kolku godini ima Marko ?
3. Odredi kolku strani ima mnoguagolnikot vo koj može da se povlečat 252 dijagonali.
4. Vo ramnokrakiot triagolnik ABC ($\overline{AC}=\overline{BC}$), so parimetar 22 cm, e povlečena medijana AA_1. Perimetrite na triagolnicite ABA_1 i AA_1C soodvetno se 17 cm i 19 cm. Da se opredelat dolžinite na stranite na ΔABC.

VII oddelenie:

1. $A(x)$ i $B(x)$ se polinomi takvi što $A(x)+(4x^2+1)=2x^2-3$ i $B(x)-(2x^2-3x-1)=5x-4$. Odredi $A(x).B(x)$.
2. Neka N,P i S se sredini na stranite AB,BC i AC na ΔABC, a M podnožna točka na visinata kon stranata AB. Da se dokaže deka četiriagolnikot MNPS e ramnokrak trapez.
3. Vo 5 avtobusi i 2 trolejbusi može da se prevezat 300 patnici, a vo 2 avtobusi i 3 trolejbusi 230 patnici. Kolku patnici može da se prevezat so 1 avtobus, a kolku so 1 trolejbus ?
4. Vo pravoagolniot triagolnik ABC vpišana e kružnica k(O,r). Ako $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ i $\overline{BC}=a$, dokaži deka $a+b=c+2r$.

VIII oddelenie:

1. Od mestata A i B, oddalečeni 900 km, istovremeno eden sproti drug, trgnuvaat:kamion kojšto se dviži so brzina od 45 km na čas i patnički avtomobil kojšto se dviži so brzina 75 km na čas. Po kolku časa od trgnuvanjeto na kamionot ke mu ostane 3 pati pogolemo rastojanie od avtomobilot ?

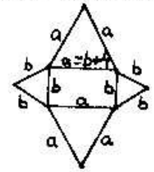
2. Presmetaj ja ploštinata na pravoagolen trapez so bočni strani 50 cm i 130 cm i pomala osnova 40 cm.
3. Vo trapezot ABCD $\overline{AB}=15$ cm i $\overline{BC}=9$ cm. Dijagonalata AC so presečnata točka na dijagonalite se deli vo odnos 3:1. Za kolku santimetri treba da se prodolži krakot BC, za da se preseče so krakot AD ?
4. Dokaži deka zbirot od brojot $\overline{xxyy}$ i brojot napišan so isti cifri no po obraten redosled, e deliv so 101.

R j e š e n j a :

V razred:

1. a) Nije tranzitivna relacija jer ne sadrži element (b,d).
   b) ,, ,, ,, ,, ,, ,, elemente (a,d),(b,d).
   v) Jeste tranzitivna relacija, jer iz $(x,y)\in M\times M$ i $(y,z)\in M\times M$ slijedi $(x,z)\in M\times M$, za svaki $x,y,z\in M$, $M=\{a,b,c,d\}$.
   g) Nije tranzitivna relacija jer ne sadrži elemente (a,d), (b,c) i (b,d).

2. Iz $4.(a+b)=80$ slijedi $a+b=20$, pa, kako je $a=b+4$, slijedi da je $a=12$ cm i $b=8$ cm. Stoga je površina pravokutnika $P=ab=96$ cm^2.

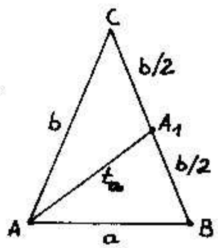


3. a) $(A\cap B)\times C=\{1,2\}\times\{5,6\}=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$,
   $(A\times C)\cap(B\times C)=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}\cap\{(0,5),(0,6),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}=$
   $=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$, pa vrijedi relacija $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.
   b) $(A\setminus B)\times C=\{3,4\}\times\{5,6\}=\{(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$,
   $(A\times C)\setminus(B\times C)=\{(1,5),(1,6),((2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}\setminus\{(0,5),(0,6),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}=$
   $=\{(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$, pa vrijedi relacija $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

4. Svakog sata drugi vozač prijeđe 2 km puta više nego prvi vozač, pa će 6 km više prijeći za 3 sata. Dakle, za 3 sata će oba vozača zajedno prijeći put od $3.(13+15)=84$ km, što za - pravo predstavlja udaljenost mjesta A i B.

VI razred:

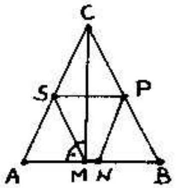
1. a) $x=0$, b) $x=-3$.
2. Neka sestra ima x godina. Tada Marko ima 2x, a otac 6x godina. Iz $x+6x=42$ slijededi $x=6$. Marko ima $2x=12$ godina.
3. Iz $n(n-3)/2=252$ slijedi $n=24$ stranice.
4. $$\left.\begin{array}{l} O_{\Delta ACA_1}=19 \\ O_{\Delta ABA_1}=17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b+b/2+t_a=19 \\ a+b/2+t_a=17 \end{array}\right| - \Rightarrow b-a=2$$
   $$O_{\Delta ABC}=22 \Rightarrow a+2b=22 \quad \Big| + \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow 3b=24 \Rightarrow b=8 \text{ cm} \Rightarrow a=6 \text{ cm}.$$



VII razred:

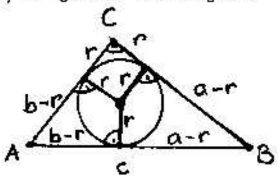
1. $A(x)=-2x^2-4$, $B(x)=2x^2+2x-5$, $A(x).B(x)=(-2x^2-4).(2x^2+2x-5)=$ $=-4x^4-4x^3+2x^2-8x+20$.

2. SP i NP su srednjice trokuta ABC, pa vrijedi $SP||AB$ i $|NP|=|AC|/2$. Kako je MS težišnica iz vrha pravog kuta M pravokutnog trokuta CAM, tada je $|MS|=|AC|/2$. Iz $|NP|=|MS|$ i $SP||MN$ slijedi tvrdnja zadatka.



3. Jedan autobus može prevesti 40 putnika, a jedan trolejbus 50 putnika. Obrazložite odgovor.

4. Iz $c=(a-r)+(b-r)$ slijedi $a+b=c+2r$. Obrazložite odgovor.

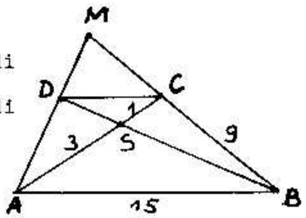


VIII razred:

1. Neka je t zajedničko vrijeme vožnje kamiona i automobila, nakon koga će kamionu ostati 3 puta veći put od puta automobila. Za vrijeme t kamion će prijeći 45t km, a automobil 75t km. Kamionu će još preostati 900-45t kilometara, a automobilu 900-75t kilometara. Iz $900-45t=3.(900-75t)$ slijedi $t=10$ sati.

2. $P=5000\ cm^2$.

3. Iz sličnosti trokuta ABS i CDS slijedi $|DC|=5$ cm. Iz sličnosti trokuta ABM i DCM slijedi $|CM|=|BM|/3$, tj. $|CM|=|BC|/2=4{,}5$ cm.



4. $\overline{xxyy}+\overline{yyxx}=1100x+11y+1100y+11x=1111x+1111y=1111(x+y)=$ $=101.11(x+y)$, što je očito djeljivo sa 101.

REPUBLIČKI NATPREVAR

Z a d a č i :

VII oddelenie:

1. Najdi go četiricifreniot broj $\overline{abcd}$, ako $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=1990$.

2. Osum lesni traktori možat da izoraat edna niva za 5 dena, a 5 teški traktori možat da ja izoraat ista niva za 3 dena. Za kolku dena dva lesni i tri teški traktori ke izoraat niva čijašto ploština se odnesuva kon ploštinata na prvata niva kako 7:2 ? (Traktorite od ist vid za ednakvo vreme izoruvaat ednakvi ploštini).

3. Visinite na $\triangle ABC$ se sečat vo točkata H (ortocentarot na $\triangle ABC$). Najdi go agolot ACB, ako $\overline{HC}=\overline{AB}$.

4. Da se konstruira triagolnikot ABC ako se dadeni težišnata linija t_c, visinata h_c i radiusot R na opišanata kružnica.

VIII oddelenie:

1. Zbirot na cifrite na godinata vo koja e roden eden makedonski revolucioner e deliv so 9. Ako na godinata na raganjeto se dodade brojot 909, se dobiva broj napišan so isti cifri, no vo obraten red. Vo koja godina e roden revolucionerot ?

2. Eden velosipedist trgnal od mestoto A kon mestoto B so brzina 14 km/h. Otkako mu ostanale da pomine ušte 18 km pomalku otkolku što pominal, brzinata ja zgolemil na 21 km/h. Na toj način srednata brzina na dviženjeto od A do B mu bila 16 km/h. Opredeli go rastojanieto od A do B.

3. Vo ramnokrakiot trapez ABCD dijagonalite se zaemno normalni. Da se presmeta ploštinata ana trapezot, ako srednata linija $MN=m$.

4. Okolu ramnokrakiot triagolnik ABC ($\overline{AB}=\overline{AC}$) e opišana kružnicata k. Niz temeto A e povlečena prava što osnovata BC ja seče vo točkata M, a kružnicata k vo točkata N. Presmetaj ja ploštinata na vpišaniot krug vo $\triangle ABC$, ako $\overline{AM}.\overline{AN}=25$, a perimetarot na triagolnikot ABC e 16 cm.

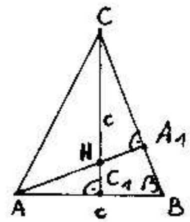
R j e š e n j a :

VII razred:

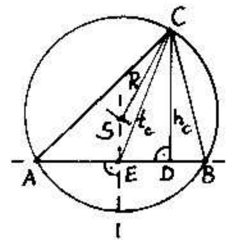
1. $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=1990 \Rightarrow (1000a+100b+10c+d)+(100a+10b+c)+(10a+b)+a=1990 \Rightarrow 1111a+111b+11c+d=1990$. Sada lako zaključujemo da je $a=1$, a odatle redom: $b=7$, $c=9$, $d=3$. Dakle, $\overline{abcd}=1793$.

2. Jedan laki traktor će poorati njivu za 40, a teški za 15 dana, tj. za jedan dan će laki traktor poorati 1/40, a teški 1/15 njive. Dva laka i 3 teška traktora će dnevno poorati $2.(1/40)+3.(1/15)=1/20+1/5=1/4$ njive, pa će im biti potrebno 4 dana da pooru njivu. Za novu njivu (čija je površina 7/2 površine prethodne njive) 2 laka i 3 teška traktora će trebati $(7/2).4=14$ radnih dana.

3. Iz sukladnosti trokuta ABA_1 i HCA_1 ($|AB|=|HC|$, $\sphericalangle AA_1B=\sphericalangle AA_1C=90^\circ$, $\sphericalangle ABA_1=\sphericalangle CHA_1=\beta$ (kutevi sa okomitim kracima)) slijedi da je $|AA_1|=|CA_1|$. Kako je trokut CAA_1 jednakokračan i pravokutan, tada je $\sphericalangle ACA_1=45^\circ$, tj. $\sphericalangle ACB=45^\circ$.

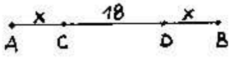


4. Prvo konstruiramo pravokutan trokut CED (poznata hipotenuza $|CE|=t_c$ i kateta $|CD|=h_c$). Sjecište normale na AB točkom E i kružnice oko C sa polumjerom R je središte S trokutu ABC opisane kružnice. Sjecišta A i B te kružnice sa pravcem ED su preostala dva vrha traženog trokuta ABC.

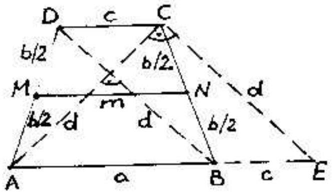


VIII razred:

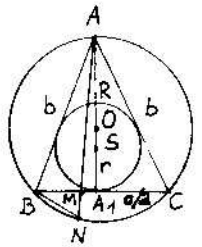
1. Neka je $\overline{1xyz}$ godina rođenja revolucionara. Iz $\overline{1xyz}+909=\overline{zyx1}$ slijedi $z=2$, $x=y+1$, pa zbog $9|1+x+y+z=4+2y$ slijedi $y=7$, a odatle $x=8$. Dakle, revolucionar (Goce Delčev) je rođen 1872. godine.

2. 

Put od A do D, duljine $x+18$ km, vozeći brzinom 14 km/h, motociklist je prešao u vremenu od $(x+18)/14$ h, a put od D do B, duljine x km, vozeći brzinom 21 km/h, za $x/21$ h.
Kako je prosječna brzina motociklista od A do B 16 km/h, tada imamo: $2x+18=|AB|=16.((x+18)/14+x/21)$, tj. $x=27$, pa je $|AB|=72$ km.

3. 

$P_{\Delta ABCD}=P_{\Delta AEC}=d^2/2=$
$=((a+c)/\sqrt{2})^2/2=(a+c)^2/4=m^2$.

4. 

Iz sličnosti trokuta ANB i ABM ($\sphericalangle ANB=\sphericalangle ABM$ (kutevi nad jednakim kružnim lukovima $\widehat{AB}=\widehat{AC}$), $\sphericalangle NAB=\sphericalangle BAM$) slijedi $|AB|:|AN|=|AM|:|AB|$, odakle je $|AB|^2=|AM|.|AN|=25$, tj. $b=|AB|=5$ cm.
Kako je opseg trokuta ABC jednak $a+2b=16$, tada je $a=6$ cm.
Primjenom Pitagorinog teorema izlazi $h=\sqrt{b^2-(a/2)^2}=4$ cm, pa je $P_{\Delta ABC}=ah/2=12\ cm^2$, $s=(a+2b)/2=8$ cm, $r=P_{\Delta ABC}/s=3$ cm,
$P_{kruga}=r^2\pi=9\pi\ cm^2$.

REPUBLIKA SLOVENIJA

OBČINSKO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

N a l o g e :

VI razred:

1. Izračunaj: $((6\frac{3}{7}-\frac{1}{0,35}).2,8+1,75).20=1755$.
2. Vnuki so ob rojstnem dnevu obiskali dedka. Ob tej priložnosti jim je povedal, da je hodil v šolo natančno eno petnajstino svojih let, potem pa je moral pustiti šolo in se zaposliti. Delal je natančno enajst osemnajstin svojih let. Koliko časa je dedek hodil v šolo in koliko let je delal ?
3. Obseg trikotnika meri 120 cm. Stranica a je enaka 1/4 obsega, stranica b pa 40% obsega. Izračunaj tretjo stranico c. Koliki del obsega je ta stranica (ulomek, procent) ?
4. Načrtaj enakokrak trikotnik ΔABC, če poznaš polmer očrtanega kroga $r=3$ cm in kot med krakoma $\gamma=30°$. Pri načrtovanju uporabljaj ravnilo in šestilo.
5. Dan je pravokotnik ABCD, $\overline{AB}=8$ cm, $\overline{BC}=6$ cm. Na stranici DC je točka E, ki je od D oddaljena 5 cm. Koliko meri ploščina štirikotnika ABCE ?

VII razred:

1. Za koliko se razlikujeta vrednosti izrazov $1/(1-x+x^2-x^3)$ in $1/(1+x+x^2+x^3)$, če je $x=-1/2$?
2. Katere izmed točk $A(-3/4,-8)$, $B(6/5,5/6)$, $C(15,2/5)$ in $D(5/2,2)$ ležijo na grafu obratnega sorazmerja $y=6/x$? Utemelji odgovor.
3. Reši enačbo $(2/(11.13)+2/(13.15)+2/(17.19)+2/(19.21)).x=20/231$. Napotek: $2/(11.13)=1/11-1/13$.
4. Dan je krog s premerom $\overline{AB}=2$ m in središčem S. Polmer SC oklepa s polmerom SB kot $\sphericalangle BSC=45°$. Tangenta na krog v točki C seka podaljšek premera AB v točki D. Nariši. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo odsek tangente CD, podaljšek premera BD in lok BC.
5. Nariši enakokrak pravokotni trikotnik s hipotenuzo 4 cm. Na zunanji strani trikotnika nariši še tri kvadrate, ki imajo po eno stranico skupno s trikotnikom. Presečišča diagonal teh kvadratov med seboj poveži. Izračunaj ploščino tako dobljenega lika.

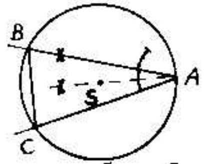
VIII razred:

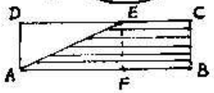
1. Za katere vrednosti števila a enačba $10+3(x-2)=ax+3$ nima rešitve ?
2. Dana je linearna funkcija $y=(2m+1)x+7$.
   a) Določi m tako, da točka A(4,3) leži na njenem grafu.
   b) Zapiši funkcijo in nariši njen graf.
   c) Izračunaj razdaljo izhodišča koordinatnega sistema do premice.
3. Koliko skokov mora narediti lovski pes, da bo ujel lisico, ki je 60 svojih skokov pred psom ? Upoštevaj, da so trije pasji skoki tako dolgi kot sedem lisičjih, vendar naredi lisica 9 skokov v enakem času kot pes 6 skokov.

4. V krožni izsek velikosti šestine kroga je včrtan krog. V kolikšnem razmerju sta ploščina šestine kroga in ploščina včrtanega kroga ?
5. Padlo je 2,2 mm dežja. Koliko kapljic je padlo na 1 m^2 površine, če je povprečna masa kapljice 1/12 g ?

R j e š e n j a :

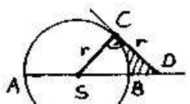
VI razred:

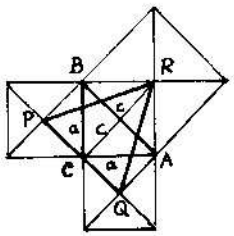
1. 1990.
2. Kako je djeda 1/15 svoga života išao u školu, a 11/18 radio, tada je broj godina njegove starosti djeljiv sa 15 i 18, tj. sa 90. Djedu je sada 90 godina, u školu je išao 6 godina, a radio je 55 godina.
3. a=30 cm, b=48 cm, c=42 cm = 7/20 opsega trokuta=35% opsega trokuta.
4. 

Nacrtamo prvo kut $\sphericalangle A=30^{o}$ sa vrhom u točki A. Središte S trokutu ABC opisane kružnice leži na simetrali toga kuta, 3 cm od točke A. Sjecišta B,C kružnice k(S,r=3 cm) sa kracima kuta $\sphericalangle A$ su preostala 2 vrha traženog trokuta. Na kraju ravnalom spojimo točke A i B.
5. 

$P_{ABCE}=P_{ABCD}-P_{AED}=8.6 - 5.6/2 = 33\ cm^2$.

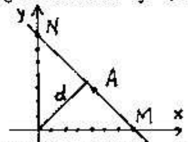
VII razred:

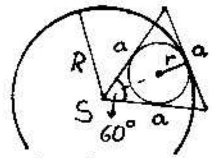
1. Vrijednost prvog izraza je 8/15, a drugog 8/5, pa se oni razlikuju za 16/15.
2. $x_A \cdot y_A=6$, $x_B \cdot y_B=1$, $x_C \cdot y_C=6$, $x_D \cdot y_D=5$, pa na grafu funkcije $y=6/x$, tj. $xy=6$ $(x,y\neq 0)$ leže točke A i C.
3. Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $(1/11-1/13+1/13-1/15+1/15-1/17+1/17-1/19+1/19-1/21)x=$ $=20/231$, tj. $(1/11-1/21)x=20/231$, odakle je x=2.
4. 

$P=P_{\Delta SCD}-P_k/8=r^2/2-r^2\pi/8=r^2(1/2-\pi/8)=$ $=1.(1/2-\pi/8)=1/2-\pi/8\approx 0{,}11\ m^2=$ $=11\ dm^2$.
5. 

$P_{\Delta PQR}=|PQ|.|CR|/2=c.c/2=c^2/2=4^2/2=$ $=8\ cm^2$.

VIII razred:

1. Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku (3-a)x=-1. Za a=3 lijeva strana je nula, dok je desna strana uvijek -1, pa tada jednadžba nema rješenja (nemoguća jednadžba).
2. a) Uvrštavanjem vrijednosti x=4, y=3 u jednadžbu y=(2m+1)x+ +7 dobivamo vrijednost m=-1.
   b) Za m=-1 zadana linearna funkcija ima analitički prikaz y=-x+7, a grafički prikaz kao na slici.
   c) $d=7\sqrt{2}/2$.


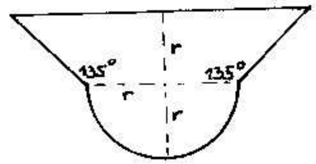
3. Jedan lisičji skok ima duljinu kao 3/7 pasja skoka. Dok pas napravi 1 svoj skok, lisica napravi 9/6=3/2 svoja skoka, tj. (3/2).(3/7)=9/14 pasja skoka. Neka pas nakon x svojih skokova sustigne lisicu. Tada imamo x=60.(3/7) + (9/14)x, odakle je x=72. Dakle, pas će stići lisicu nakon 72 svoja skoka.
4. 

$r=R/3$,
$P_{ki}:P_k=(R^2\pi/6):r^2\pi=$
$=(R^2\pi/6):(R^2\pi/9)=3:2$.
5. $B=1\ m^2=10^4\ cm^2$, $v=2{,}2\ mm=0{,}22\ cm$, $m_1=1/12\ g \Rightarrow V_1=1/12\ cm^3$, $V=Bv=10^4.0{,}22=2200\ cm^3$, $n=V/V_1=2200/(1/12)=2200.12=26400$ kapljica.

: REPUBLIŠKO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE :

N a l o g e :

VII razred:

1. Za katero nenegativno število a ima vsota ulomkov $a/(2+a)+2a/(2-a)+9/(4-a^2)$ najmanjšo pozitivno vrednost ? Odgovor utemelji.
2. S katerim najmanjšim naravnim številom je treba pomnožiti število 8316, da bo dobljeni umnožek kvadrat nekega naravnega števila ? Katerega ?
3. Naravna števila zapisujemo zaporedoma drugega za drugim. Pričnemo z najmanjšim. Katera cifra bo na tisočem mestu ?
4. 

Zemljišče ima obliko, kot je prikazano na sliki (r=5 m). Radi bi ga ogradili in zasejali s travo. Koliko metrov žične ograje potrebujemo in koliko semena, če na 1 m^2 porabimo 4 dag semena ?
5. Štirikotnik z eno izmed diagonal razdelimo na 2 trikotnika z obsegoma 25 m in 27 m. Izračunaj dolžino te diagonale, če je obseg štirikotnika 32 m.

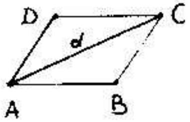
VIII razred:

1. V enačbi $(x-2)/(x+2)=k.((x+2)/(x-2))$ določi k, če je $x=-10/3$.
2. V enakokrakem trapezu z osnovicama a= 8 cm in c=6 cm se diagonali sekata pravokotno. Izračunaj obseg in ploščino trapeza.
3. Koliko zaporednih naravnih števil je treba sešteti, da bo vsota trimestno število z enakimi ciframi ?
4. V enakostranični trikotnik s stranico a je včrtan kvadrat tako, da so oglišča kvadrata na stranicah trikotnika. Izrazi z a stranico kvadrata.
5. Iz kocke z robom a izrežemo pokončno prizmo. Njena osnovna ploskev je enakokraki trikotnik, katerega višina na osnovico leži na diagonali osnovne ploskve kocke, kot med krakoma je 30^0. Koliko procentov prostornine kocke je prostornina prizme ?

R j e š e n j a :

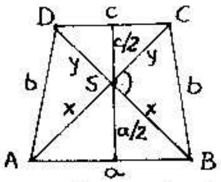
VII razred:

1. Zadani izraz ima vrijednost razlomka $(a+3)^2/(4-a^2)$, koji ima najmanju pozitivnu vrijednost 9/4 za a=0.
2. $8316=2^2.3^3.7.11$. Ovaj broj treba pomnožiti sa $3.7.11=231$, pa će se dobiti 1386^2.
3. Zapisivanjem prirodnih brojeva jedan za drugim (počevši od 1) dobivamo: 1234567891011121314...99100101...99910001001... Za zapisivanje 9 jednoznamenkastih brojeva utrošimo 9 znamenaka, za zapisivanje 90 dvoznamenkastih brojeva utrošimo 180 znamenaka, dok ćemo od preostalih 811 znamenaka zapisati 270 troznamenkastih brojeva i prvu znamenku 271-vog troznamenkastog broja. Tražena znamenka je 3 (prva znamenka broja 370).
4. $O=r\pi+4r+2r\sqrt{2}=r(\pi+4+2\sqrt{2})\approx 49,8$ m,
   $P=r^2\pi/2+3r^2=r^2(\pi/2+3)\approx 104,25\ m^2$,
   $104,25.4=417$ dag.
5. $O_{ABC}+O_{ACD}=O_{ABCD}+2d \Rightarrow 25+27=32+2d \Rightarrow d=10$ m.



VIII razred:

1. Uvrštavanjem $x=-10/3$ u zadanu jednadžbu, dobivamo k=16.
2.

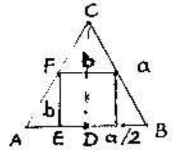


$h=a/2+c/2=(a+c)/2$,
$P=(a+c)h/2=(a+c)^2/4=49\ cm^2$,
$x=a\sqrt{2}/2$, $y=c\sqrt{2}/2$,
$b=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(a^2+c^2)/2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ cm,
$O=a+2b+c=14+10\sqrt{2}\approx 28,1$ cm.

3. Suma prvih n prirodnih brojeva dana je izrazom $1+2+3+...+n=n(n+1)/2$. Troznamenkasti broj jednakih znamenaka možemo pisati u obliku 111x, gdje je x jednoznamenkasti broj. Iz $n(n+1)/2=111x$ slijedi $n(n+1)=(6x).37$, što je jedino moguće kada je x=6 i n=36, kada je suma $n(n+1)/2=666$. Dakle, suma

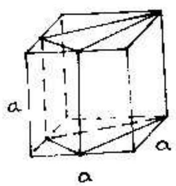
36 prvih prirodnih brojeva daje troznamenkasti broj jednakih znamenaka 666.

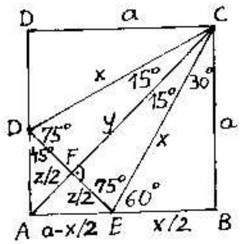
4.



Iz sličnosti trokuta ADC i AEF slijedi
$(a/2):(a\sqrt{3}/2)=(a/2-b/2):b$,
odakle je $b=a\sqrt{3}/(2+\sqrt{3})$, tj.
$b=a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$.

5.





$a=x\sqrt{3}/2 \Rightarrow x=2a\sqrt{3}/3$,
$z=(a-x/2)\sqrt{2}=a\sqrt{2}(3-\sqrt{3})/3$,
$y=a\sqrt{2}-z/2=a\sqrt{2}-a\sqrt{2}(3-\sqrt{3})/3=$
$=a\sqrt{2}(3+\sqrt{3})/6$,
$B_p=zy/2=a^2/3$, $h_p=a$,
$V_p=B_ph_p=a^3/3$,
$V_k=a^3$,
$V_p=V_k/3\approx 33,33\%\ V_k$.

SR SRBIJA

OPŠTINSKO TAKMIČENJE

Z a d a c i :

IV razred:

1. Dešifruj sledeće sabirke: $$\begin{array}{r} B\\ AAAA\\ +AAAA\\ \hline BAAAA\end{array}$$
2. Napiši četvorocifrene brojeve čiji je zbir cifara 10, a cifra desetica 5.
3. Koliko se cifara upotrebi za numerisanje od prve do 567. stranice neke knjige ?
4. Za pokrivanje poda potrebno je 200 pločica oblika pravougaonika 22 cm x 11 cm. Koliko bi pločica, oblika kvadrata veličine 20 cm x 20 cm, trebalo za pokrivanje istog poda ?
5. Prazna polja datog kvadrata popuni neparnim brojevima od 13 do 29, tako da zbirovi u svim pravcima budu jednaki.

	21	

V razred:

1. Koji prirodan broj a, $100 < a < 200$, pri deljenju sa 2,3,4 i 5 daje redom ostatke 1,2,3 i 4 ?
2. Dokazati da je zbir prvih 1000 prirodnih brojeva deljiv sa 77.
3. Raspolažemo sa dva peščana sata. Kod prvog, sav pesak iscuri iz jedne polovine u drugu za ravno 25 minuta, a kod drugog za 20 minuta. Kako ćemo pomoću ova dva peščana sata najjednostavnije izmeriti vreme od pola sata (30 minuta) ?
4. Naći zbir dva ugla koji su suplementni sa dva komplementna ugla.
5. Date su prave a i b, tako da je a paralelna sa b. Na pravoj a date su tačke A,B,C i D i na pravoj b tačke E,F,G. Koliko je konveksnih četvorouglova određeno tim tačkama ?

VI razred:

1. Brojilac razlomka 23/42 treba uvećati, a imenilac umanjiti za isti broj x, tako da se dobije 7/6. Odrediti taj broj x.
2. Reši jednačinu $2|x|=6-x$.
3. U jednoj osmogodišnjoj školi u svakom razredu ima po 4 odeljenja, a ukupan broj učenika je 1111. Dokazati da postoji odeljenje u kome uči bar 35 učenika.
4. U trouglu ABC ugao kod temena C je 40°. Simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena C u preseku sa pravom AB određuju jednakokraki trougao CDE. Odrediti uglove trougla ABC.
5. Dokazati da je svaka težišna linija trougla manja od poluobima tog trougla.

VII razred:

1. Dokazati da je zbir $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$, $n\in N$, deljiv sa 14.
2. Odrediti najmanji prirodan broj koji pomnožen sa 2646 daje kub nekog prirodnog broja.
3. Konstruisati kvadrat površine 6 cm^2.

4. Dijagonala jednakokrakog trapeza, dužine 10 cm, određuje sa dužom osnovicom ugao od 45°. Izračunaj površinu trapeza.
5. Data su dva proizvoljna kvadrata AEDB i ACFG jedne ravni i jednake orijentacije, koji se ne preklapaju. Dokazati da je BG=CE.

VIII razred:

1. U jednom dvocifrenom broju je cifra desetica dva puta manja od cifre jedinica. Ako se ovaj broj uveća za 18, dobija se broj sa obrnutim ciframa. Koji je to broj ?
2. Reši jednačinu $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+6x+9}=13$.
3. Pravilna šestougaona prizma ima visinu 12 dm, a manja dijagonala baze je 17,3 cm. Izračunati površinu i zapreminu te prizme. (Uzeti $\sqrt{3}=1,73$).
4. U krug poluprečnika R=10 cm upisan je jednakokraki trougao čiji je ugao pri vrhu (kod temena A) jednak 45°. Izračunati površinu kružnog odsečka određenog osnovicom BC i manjim lukom $\overset{\frown}{BC}$. (Uzeti $\pi=3,14$).
5. Konstruisati trougao ABC ako su mu dati elementi: stranica BC=6 cm, naspramni ugao $\alpha=60^\circ$ i težišna linija $t_c=4$ cm, koja odgovara stranici c.

R j e š e n j a :

IV razred:

1. $$\begin{array}{r} B\\ AAAA\\ +AAAA\\ \hline BAAAA\end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 1\\ 9999\\ +9999\\ \hline 19999\end{array}$$. Obrazložite odgovor.
2. 1054, 1450, 4051, 4150, 2053, 2350, 3052, 3250, 1153, 1351, 3151, 2251, 2152, 1252, 5050.
3. Upotrebljeno je 9 znamenaka za jednoznamenkaste brojeve, 90.2=180 znamenaka za dvoznamenkaste brojeve i 468.3=1404 znamenaka za troznamenkaste brojeve, tj. ukupno 9+180+1404= =1593 znamenaka.
4. 22.11=242 cm^2 površina jedne pravokutne pločice,
   200.242=48400 cm^2 površina poda,
   20.20=400 cm^2 površina jedne kvadratne pločice,
   48400:400=121 komada kvadratnih pločica.
5.

	21	

$\longrightarrow$

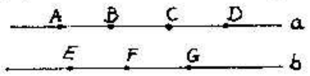
19	29	15
17	21	25
27	13	23

V razred:

1. $a+1|V(2,3,4,5) \Rightarrow a+1|60$, pa zbog $100<a<200$ izlazi $a+1\in$ $\in\{120,180\}$, tj. $a\in\{119,179\}$.
2. S=1+2+...+999+1000=(1+1000)+(2+999)+...+(500+501)=1001.500= =77.13.500=77.6500, što je očito djeljivo sa 77.
3. Okrenimo istovremeno oba sata tako da pijesak curi iz punih u prazne dijelove. Poslije 20 minuta drugi sat, u kome se sva količina pijeska preselila u drugu polovinu, okrenimo.

U momentu kada u prvom satu iscuri sva količina pijeska (poslije 25 minuta) vratit ćemo drugi (manji) sat u početni položaj, a količina pijeska, koja je u međuvremenu iscurila u prazni dio, vratit će se u slijedećih 5 minuta. Tako ćemo izmjeriti 25+5=30 minuta.

4. $\alpha+\beta=270^\circ$. Obrazložite odgovor.

5. 

Svaka dužina pravca a sa svakom dužinom pravca b određuje po jedan konveksan četverokut. Ukupno ima 6.3=18 konveksnih četverokuta.

VI razred:

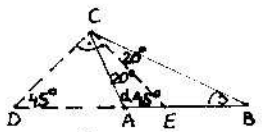
1. $(23+x)/(42-x)=7y/6y \Rightarrow 7y+6y=23+x+42-x \Rightarrow y=5 \Rightarrow x=12.$

2. $|x|=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$, $2|x|=6-x$ (*).

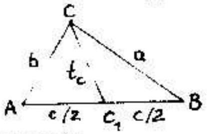
$1^\circ)$ $x\le 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} -2x=6-x \Rightarrow x=-6<0,$

$2^\circ)$ $x\ge 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} 2x=6-x \Rightarrow x=2>0.$

3. U školi ima 4.8=32 odjeljenja. Kako je 1111=32.34+23, tada po Dirichletovom principu sigurno postoji odjeljenje sa bar 35 učenika.

4. 

$CE\perp CD$ i $|CE|=|CD| \Rightarrow \sphericalangle CDE=\sphericalangle DEC=45^\circ \Rightarrow \beta=\sphericalangle ABC=\sphericalangle AEC-\sphericalangle ECB=45^\circ-20^\circ=25^\circ \Rightarrow \alpha=\sphericalangle BAC=115^\circ.$

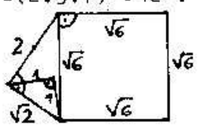
5. 

$\left.\begin{array}{l}\Delta AC_1C:\ t_c<b+c/2\\ \Delta BC_1C:\ t_c<a+c/2\end{array}\right|+ \Rightarrow 2t_c<a+b+c \Rightarrow t_c<(a+b+c)/2.$

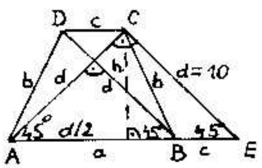
VII razred:

1. $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}=2^n(1+2+4)=7.2^n=7.2.2^{n-1}=14.2^{n-1}$, što je djeljivo sa 14.

2. Množeći broj $2646=2.3^3.7^2$ sa $2^2.7=28$ dobivamo broj $2^3.3^3.7^3=(2.3.7)^3=42^3$.

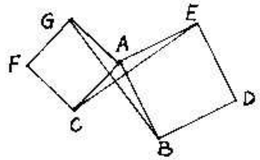
3. 

Treba konstruirati kvadrat stranice $a=\sqrt{6}$ cm.

4. 

Očito je da je $AC\perp BD$. Nadopunimo trapez kao na slici. Tada je (u ΔAEC) $a+c=2h=d\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ cm, pa je $P_{\Delta ABCD}=(a+c)h/2=d\sqrt{2}.(d\sqrt{2}/2)/2=d^2/2=50\ cm^2$.

Do istog rezultata dolazimo i iz činjenice da trapez ABCD ima površinu jednaku površini trokuta AEC.

5. 

Iz $|AE|=|AB|$, $|AG|=|AC|$ i $\sphericalangle CAE=\sphericalangle GAB=\sphericalangle CAB+90^\circ$ slijedi sukladnost trokuta CEA i GBA, odakle je $|CE|=|BG|$.

VIII razred:

1. Neka je znamenka jedinica 2x, a znamenka desetica x. Tada iz $(10x+2x)+18=10.2x+x$ slijedi $x=2$, pa je traženi broj 24.

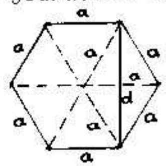
2. Zadana jednadžba poprima oblik $|x-2|-|x+3|=13$ (*). Imamo ove slučajeve:

$1^\circ)$ $x\in(-\infty,-3)$
(*) $\Rightarrow -(x-2)+(x-3)=13 \Rightarrow -1=13$, što je nemoguće,

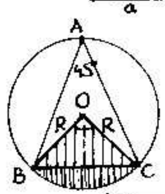
$2^\circ)$ $x\in[-3,2]$
(*) $\Rightarrow -(x-2)-(x-3)=13 \Rightarrow x=-7\notin[-3,2]$, pa nije rješenje,

$3^\circ)$ $x\in(2,\infty)$
(*) $\Rightarrow x-2-(x-3)=13 \Rightarrow -5=13$, što je nemoguće.

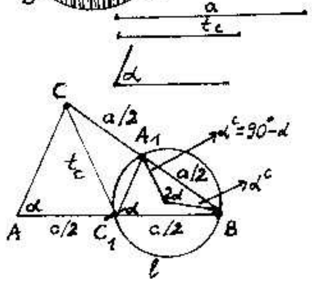
Dakle, jednadžba nema rješenja.

3. 

$d=17,3=10\sqrt{3}$ cm$=\sqrt{3}$ dm $\Rightarrow a=1$ dm,
$O=3a(a\sqrt{3}+2v)=3(\sqrt{3}+24)=77,19\ dm^2$,
$V=3a^2\sqrt{3}h/2=3.1\sqrt{3}.12/2=18\sqrt{3}=31,14\ dm^3$.

4. 

$\sphericalangle BAC=45^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOC=90^\circ$ (odnos obodnog i središnjeg kuta nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{BC}$),
$P_{ko}=P_{ki}-P_{\Delta BCO}=P_k/4-P_{\Delta BCO}=R^2\pi/4-R^2/2=R^2(\pi/4-1/2)=28,5\ cm^2$.

5. 

Neka je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$. Nad dužinom $\overline{A_1B}$ konstruiramo luk l iz čijih točaka se A_1B vidi pod kutom α. U presjeku toga luka i kružnice sa središtem u C i polumjerom t_c bit će točka C_1, središte stranice $\overline{AB}$. Na kraju se lako konstruira točka A.

MEĐUOPŠTINSKO TAKMIČENJE

Z a d a c i :

IV razred:

1. Deda i unuk imaju zajedno 65 godina. Koliko godina ima deda, a koliko unuk, ako se zna da unuk ima onoliko meseci koliko deda ima godina ?

2. Raspolažemo samo sa dva prazna lonca, od kojih jedan ima za-

preminu 11 litara, a drugi 7 litara. Kako pomoću raspoloživih sudova možemo najbrže u bure sipati tačno 6 litara vode?

3. Kvadar je sastavljen od 12 jednakih kocki čija je ivica 10 cm. Kolika je površina tog kvadra ? Odrediti sva rešenja.
4. Pomoću 4 devetke i simbola za računske operacije, napisati četiri brojna izraza od kojih svaki ima vrednost 1 (dozvoljeno je korišćenje zagrada).
5. U jednoj korpi ima 2 puta više jabuka nego u drugoj. Ako se iz svake korpe uzme po 20 jabuka, onda će u prvoj korpi ostati 3 puta više jabuka nego u drugoj korpi. Koliko je jabuka bilo u svakoj korpi ?

V razred:

1. Vlada, Nada i Jagoda imaju ukupno 600 dinara. Kada Vlada potroši 1/2 svog novca, Nada 2/3 svog novca i Jagoda 4/5 svog novca, ostaju im jednake količine novca. Koliko novca je imao svako od njih ?
2. Ugao x predstavlja 2/3 svog komplementnog ugla. Ako je ugao y suplementan uglu x, koji deo od tog ugla y iznosi x ?
3. Date su prave a i b koje se seku i data je tačka A na pravoj a. Konstruisati krug koji prolazi kroz datu tačku A i dodiruje date prave a i b.
4. Odrediti prirodan broj n i prost broj p tako da važi n/1990=1/p. Koliko različitih rešenja ima problem ?
5. Na proslavi rođendana okupilo se 9 učenika. Da li je moguće da svaki od njih od ranije poznaje tačno 3 učenika ?

VI razred:

1. Dokazati da je broj $10^{1990}-10$ deljiv sa 81.
2. Konstruisati trougao ABC, ako je dat zbir stranica $AB+AC=b+c=8$ cm, ugao $\sphericalangle CAB=\alpha=60^\circ$ i visina $CC'=h_c=3$ cm.
3. Odrediti najmanji pozitivan racionalan broj (razlomak) koji pri deljenju sa 35/396 i 28/297 daje celobrojni količnik.
4. Dat je paralelogram ABCD i prava p koja sa paralelogramom ima samo jednu zajedničku tačku i to je teme D. Neka su A', B' i C' podnožja normala iz tačaka A,B i C na pravu p. Dokazati da je AA'+CC'=BB'.
5. U jednoj kovnici novca bilo je 400 zlatnih šipki. Od svake šipke se izlije 10 dukata i preostane zlata toliko da se od preostatka od 20 šipki može izliti jedna nova šipka. Koliko je ukupno dukata izliveno od datih šipki ?

VII razred:

1. Ako je n paran prirodan broj, onda je izraz $n^3-1990n$ deljiv sa 6. Dokazati.
2. Ako se broj stranica konveksnog mnogougla poveća za 5, onda se broj dijagonala poveća za 1990. Koliko stranica ima mnogougao sa takvom osobinom ?
3. Dat je jednakostranični trougao ABC stranice a. Nad stranicama trougla (sa spoljne strane) konstruisani su kvadrati ABNM, BCQP i ACRS. Izračunati obim i površinu tako dobijenog šestougla MNPQRS ($\sqrt{3}$ ne treba zamenjivati).
4. Dat je kvadrat ABCD i tačka M na stranici BC. Ako je N tačka stranice CD, takva da je $\sphericalangle AMB=\sphericalangle AMN$, izračunati $\sphericalangle MAN$.
5. Date su 3 različite, nepravilne prave i na svakoj od njih po 5 različitih tačaka. Koliko ima najviše trouglova čija su temena date tačke ?

VIII razred:

1. Površina pravilne trostrane piramide je $648\sqrt{3}\ cm^2$. Izračunati zapreminu piramide, ako je visina piramide dva puta veća od osnovne ivice piramide.
2. Na stranicama AB i CD romba ABCD date su tačke M i N, tako da je AM:AB=CN:CD=1:3. Prava MN seče produžetke stranica AD i BC u tačkama P i Q. Dokazati da presek dijagonala romba leži na pravoj MN i da je MP=MN=NQ.
3. Dokazati da jednačina $x^2+y^2=1990$ nema rešenja u skupu prirodnih brojeva.
4. Neka je $x=444\ldots444$ (11 četvorki). Dokazati da je broj x^2-x-2 deljiv sa 270.
5. Na koliko najviše načina se na šahovsku tablu može postaviti 8 topova, tako da se međusobno ne napadaju ?

R j e š e n j a :

IV razred:

1. Kako godina ima 12 mjeseci, djeda je 12 puta stariji od unuka. Ako unuk ima x godina, djeda ima 12x godina. Iz 22x+x=65 slijedi x=5 godina. Unuk ima 5, a djeda 60 godina.
2. Napunimo lonac od 7 l i sipamo tu vodu u lonac od 11 l. Zatim opet napunimo lonac od 7 l i (vodom iz tog lonca) dopunimo lonac od 11 l. U loncu od 7 l ostalo je još 3 l vode. Vodu stavimo u bure i ponovimo isti postupak još jednom. U buretu će tada biti 6 l vode.
3. $50\ dm^2,\ 40\ dm^2,\ 38\ dm^2,\ 32\ dm^2$.
4. Na primjer: (9+9):(9+9)=1, (9.9):(9.9)=1, (9:9):(9:9)=1, (9+9-9):9=1, ...
5. U prvoj korpi je bilo 80, a u drugoj 40 jabuka. Obrazložite odgovor.

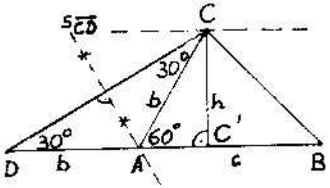
V razred:

1. Neka ostatak Vladinog, Nadinog i Jagodinog novca iznosi x dinara. Tada Vlada ima 2x, Nada 3x, a Jagoda 5x dinara. Iz 2x+3x+5x=600 slijedi x=60, pa je Vlada imao 120 din, Nada 180 din, a Jagoda 300 din.
2. $x=2(90^\circ-x)/3 \Rightarrow x=36^\circ \Rightarrow y=180^\circ-x=144^\circ \Rightarrow x=y/4$.
3. Središte S tražene kružnice je u presjeku sjecištu simetrale kuta $\sphericalangle(a,b)$ i normale točkom A na pravac a, a njen polujer ima duljinu jednaku $|SA|$. Konstruirajte tu kružnicu.
4. $n/1990=1/p \Rightarrow n/(2.5.199)=1/p \Rightarrow (n,p)\in\{(995,2),(398,5),(10,199)\}$.
5. Kada bi svaki učenik poznavao točno 3 učenika, tada bi ukupan broj parova poznanstava ("poznanstvo" je simetrična relacija) bio $9.3/2=13,5\notin N$, što je očito nemoguće.

VI razred:

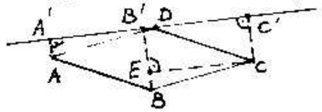
1. $10^{1990}-10=1\underbrace{00\ldots0}_{1989\ \text{nula}}0-10=\underbrace{999\ldots9}_{1989\ \text{devetki}}90=9.\underbrace{111\ldots1}_{1989\ \text{jedinica}}10$,

što je očito djeljivo sa 81 jer je 111...111 (1989 jedinica) djeljivo sa 9 .

2. 

Analiza: Neka je ΔABC traženi trokut i neka je D točka na produžetku stranice $\overline{BA}$, takva da je $|DA|=b$. Tada je trokut CDA jednakokračan ($|AC|=|AD|=b$) i vrijedi $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ACD=\sphericalangle BAC/2=60^\circ/2=30^\circ$. Konstrukcija: Prvo konstruiramo trokut DBC (poznato: $|DB|=b+c$, $\sphericalangle BDC=30^\circ$ i h). Točka A leži na sjecištu stranice $\overline{DB}$ i simetrale stranice $\overline{CD}$ (zašto ?).

3. 140/99. Obrazložite odgovor.

4. 

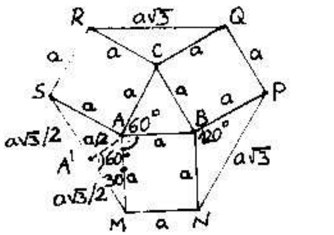
Uz oznake kao na slici imamo: $|AA'|+|CC'|=|BE|+|EB'|=|CC'|$.

5. $1š=10d+(1/20)š \Rightarrow (19/20)š=10d \Rightarrow 1š=(200/19)d \Rightarrow 400š=(80000/19)d=(4210+10/19)d$. Od 400 šipki može se načiniti cijelih 4210 dukata (pri čemu će još ostati zlata za 10/19 dukata).

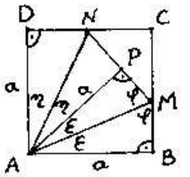
VII razred:

1. $n^3-1990n=n^3-n-1989n=n(n^2-1)-1989n=(n-1)n(n+1)-2n.663$, što je djeljivo sa 6 jer su $(n-1)n(n+1)$ i $2n.663$ djeljivi sa 6 (zašto ?).

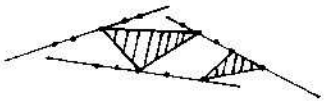
2. Iz $n(n-3)/2+1990=(n+5)(n+2)/2$ slijedi $n=338$.

3. 

$O=3a+3a\sqrt{3}=3a(1+\sqrt{3})$,
$P=3a^2+4.(a^2\sqrt{3}/4)=a^2(3+\sqrt{3})$.

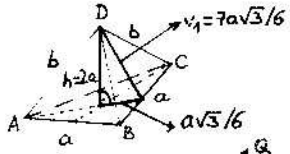
4. 

Prema uvjetu zadatka je $\sphericalangle AMB=\sphericalangle AMN=\varphi$. Neka je $AP\perp MN$. Tada su trokuti AMB i AMP sukladni ($|AM|=|AM|$, $\sphericalangle AMB=\sphericalangle AMP=\varphi$, $\sphericalangle ABM=\sphericalangle APM=90^\circ$), pa je $|AP|=|AB|=a$ i $\sphericalangle BAM=\sphericalangle PAM=\varepsilon$. Analogno iz sukladnosti trokuta APN i ADN ($|AP|=|AD|=a$, $|AN|=|AN|$, $\sphericalangle APN=\sphericalangle ADN=90^\circ$) slijedi da je $\sphericalangle PAN=\sphericalangle DAN=\eta$. Sada odmah proizlazi da je $\sphericalangle MAN=\varepsilon+\eta=90^\circ/2=45^\circ$.

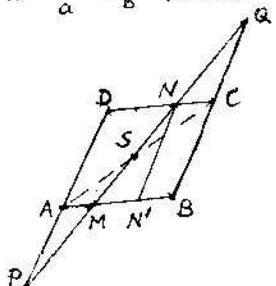
5. 

Najviše trokuta, čiji su vrhovi dane točke pravaca, ima: 125 (sva 3 vrha su na tri različita pravca) + 3.100 (dva vrha su na istom , a treći vrh na jednnom od preostala 2 pravca) = 425 pravaca.

VIII razred:

1. 

$P=a^2\sqrt{3}/4+3.(1/2).(7\sqrt{3}a^2/6)=2\sqrt{3}a^2=$
$=648\sqrt{3} \Rightarrow a=18\text{ cm} \Rightarrow$
$\Rightarrow V=(1/3).(a^2\sqrt{3}/4).2a=\sqrt{3}a^2/6=$
$=972\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

2. 

Neka je $NN'\|BC$. Iz sukladnosti trokuta AMP, $MN'N$ i NCQ ($\sphericalangle A=\sphericalangle N'=\sphericalangle C'$, $|AM|=|MN'|=|NC|=|AB|/3$, $\sphericalangle M=\sphericalangle N=\sphericalangle N$) slijedi da je $|PM|=|MN|=|NQ|$. Neka je točka S presjek dužina $\overline{MN}$ i $\overline{AC}$. Iz sukladnosti trokuta AMS i CNS ($|AM|=|CN|$, $\sphericalangle MAS=\sphericalangle NCS$ i $\sphericalangle AMS=\sphericalangle CNS$ (kutevi sa paralelnim kracima)) slijedi da je $|AS|=|CS|$, tj. da je S sjecište dijagonala paralelograma $ABCD$.

3. Desna strana zadane jednadžbe je paran broj, pa to mora biti i lijeva strana, tj. x i y moraju biti iste parnosti.
Neka je $x=2m$, $y=2n$. Tada zadana jednadžba poprima oblik $2.(m^2+n^2)=995$, što je očito nemoguće (jer je lijeva strana paran, a desna neparan broj).
Neka je $x=2m+1$, $y=2n+1$. Tada jednadžba poprima oblik $m(m+1)+n(n+1)=497$, što je također nemoguće (jer je lijeva strana ponovo paran broj - kao suma dva parna broja $m(m+1)$ i $n(n+1)$, a desna strana je neparan broj).

4. $x^2-x-2=(x-2)(x+1)=(444...444-2).(444...444+1)=(444...442).(444...445)$, što je djeljivo sa $2.3.5.9=270$, jer je prvi faktor djeljiv sa 2 i 3, a drugi sa 5 i 9.

5. Razlikujemo dva slučaja.
Neka su topovi numerirani. Tada imamo $8^2.7^2...1^2=(8!)^2=1625702400$ mogućnosti.
Neka topovi nisu numerirani. Tada imamo $(8!)^2/(8!)=8!=40320$ mogućnosti.
Obrazložite odgovor.

REPUBLIČKO TAKMIČENJE

Z a d a c i :

VI razred:

1. Jugoslav i Slobodan su imali jednake sume novca. Jugoslav je kupio bombone po ceni od 15 dinara po kilogramu, a Slobodan po ceni od 15 dinara po kilogramu. Po kojoj ceni treba da prodaju mešavinu bombona da bi povratili uloženi novac (bez zarade) ?
2. U 1000 kg svežih jagoda ima 99% vode. U toku transporta is-

parila je izvesna količina vode, tako da je težina jagoda sada 500 kg. Koliko procenata vode sada sadrže jagode ?

3. Date su 3 nekolinearne tačke A_1, B_1 i C'. Konstruisati trougao ABC, ako su A_1 i B_1 središta stranica BC i AC i ako je C' podnožje visine h_c.
4. U pravougaoniku ABCD simetrala ugla kod temena B seče prave AC i AD redom u tačkama E i F. Kroz E je konstruisana prava paralelna sa AB, koja seče dijagonalu BD u tački K. Dokazati da je prava FK normalna na dijagonalu AC.
5. U polja kvadratne tablice 4x4 rasporediti proste brojeve, tako da je proizvod brojeva u svakoj vrsti, svakoj koloni i svakoj dijagonali tablice jednak P, gde je $P=1990+(-1)^{1989}$.

VII razred:

1. Neka je $2n=2+2^2+2^3+\dots+2^{1989}+2^{1990}$.

   a) Dokazati da je $n=2^{1990}-1$.

   b) Dokazati da je n deljivo sa 93.
2. Nad hipotenuzom AB pravouglog trougla ABC konstruisan je sa spoljne strane kvadrat ABDE. Dokazati da je prava, koja spaja teme pravog ugla C sa presekom S dijagonala, istovremeno i simetrala pravog ugla.
3. Dva radnika mogu da završe neki posao za 24 dana. Posle zajedničkog rada od 10 dana jedan radnik se razboli, pa je drugi sam nastavio sa radom i dovršio taj posao za sledećih 35 dana. Za koliko dana bi završio taj posao svako od njih, ako bi radio sam ?
4. Data je tačka A na datoj pravoj p i date su tačke T i H sa iste strane prave p. Konstruisati trougao ABC, ako je začka A teme trougla, tačka T težište, a tačka H je ortocentar trougla.
5. Izračunajte vrednost razlomka (A.R.H.I.M.E.D)/(E.U.K.L.I.D), ako jednakim slovima odgovaraju jednake cifre, a različitim slovima različite cifre.

VIII razred:

1. Vojnička kolona ima dužinu 1 km i kreće se ravnomerno. Kurir sa čela kolone dotrči na začelje kolone, preda poruku i vrati se na čelo kolone. Kolona za to vreme kreće put od 1 km. Koliki put je prešao kurir ?
2. a) Skrati razlomak $R=(n^2+2n-8)/(n^2-4)$.

   b) Odrediti sve cele brojeve n za koje je vrednost R ceo broj.
3. a) Dokazati da je za svaki prirodan broj n izraz n^5-n deljiv sa 30.

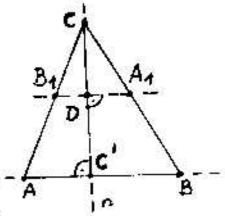
   b) Ako su a i b prirodni brojevi i ako je $a^5+b^5=1990$, onda je a+b deljivo sa 5. Dokazati.
4. U nejednakokrakom trapezu ABCD dijagonale AC i BD seku se u tački S. Kroz presečnu tačku S konstruisane su prave paralelne sa kracima AD i BC i one seku osnovicu AB redom u tačkama M i N. Dokazati da je AM=BN.
5. Izračunati površinu i zapreminu pravilne trostrane piramide čija je strana nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 60°, a rastojanje od težišta osnove do bočne strane je 3 cm.

R j e š e n j a :

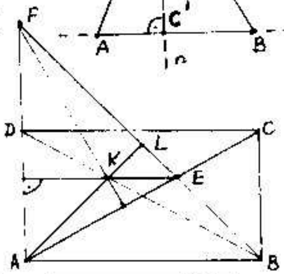
VI razred:

1. Neka su Jugoslav i Slobodan imali po x dinara. Tada je Jugoslav kupio x/15 kg, a Slobodan x/10 kg bombona. Ukupno su kupili x/15 + x/10=x/6 kg bombona i za to utrošili x+x=2x dinara, pa je cijena po jednom kg 2x/(x/6)=12 dinara.
2. U 1000 kg svježih jagoda ima 990 kg vode i 10 kg suhe tvari. Poslije transporta, u 500 kg jagoda ima također 10 kg suhe tvari i 490 kg vode, što iznosi 98% vode.
3. Analiza: Srednjica $\overline{A_1B_1}$ trokuta ABC je paralelna sa $\overline{AB}$ i po duljini upola kraća, te normalna na visinu $\overline{CC'}$ koju i raspolavlja.

   Konstrukcija: Prvo konstruiramo pravac n točkom C' okomito na $\overline{A_1B_1}$, nađemo presjek D pravaca A_1B_1 i n i konstruiramo točku C pravca n, takvu da je D središte dužine $\overline{C'C}$. Na kraju, vrhove A i B dobivamo kao presjek pravaca CB_1 i CA_1 sa pravcem koji ide točkom C' paralelno sa A_1B_1.



4. Neka je L presjek pravaca AK i BF. Iz sukladnosti trokuta AKB i ABE ($|AB|=|AB|$, $\sphericalangle BAE=\sphericalangle ABK$, $|AE|=|BK|$) slijedi da je $\sphericalangle BAK=\sphericalangle ABE=45^\circ$, pa je $\sphericalangle ALB=90^\circ$. Kako je $KE \perp AF$ i $AK \perp EF$, to su AK i EK visine trokuta AEF, a K je ortocentar tog trokuta, pa je i FK (visina) okomita na AC.



5. P=1990-1=1989=3.3.13.17. Jedno od rješenja je:

3	17	3	13
13	3	17	3
17	3	13	3
3	13	3	17

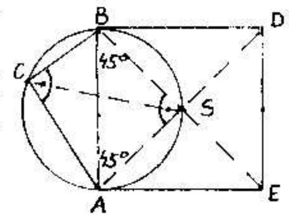
VII razred:

1.a) $2n=2+2^2+2^3+\dots+2^{1990}=2.(1+2+2^2+\dots+2^{1989}) \Rightarrow n=1+2+2^2+\dots+2^{1989}$

$\Rightarrow n=2n-n=(2+2^2+2^3+\dots+2^{1990})-(1+2+2^2+\dots+2^{1989})=2^{1990}-1$.

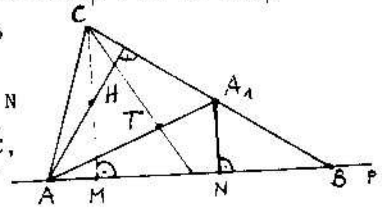
b) $n=1+2+2^2+\dots+2^{1989}=(1+2)+2^2(1+2)+\dots+2^{1988}(1+2)=$
$=3.(1+2^2+\dots+2^{1988})=3.((1+2+2^2+2^3+2^4)+2^5.(1+2+2^2+2^3+2^4)+$
$+2^{1985}.(1+2+2^2+2^3+2^4))=3.31.(1+2^5+2^{10}+\dots+2^{1985})=$
$=93.(1+2^5+2^{10}+\dots+2^{1985})$, što je očito djeljivo sa 93.

2. Kako su trokuti ABC i ABS pravokutni trokuti sa zajedničkom hipotenuzom $\overline{AB}$, tada im se može opisati kružnica sa središtem u središtu hipotenuze $\overline{AB}$. Kako je $\sphericalangle ACS=\sphericalangle ABS=45^\circ$ i $\sphericalangle BSC=\sphericalangle BAS=45^\circ$ (kutevi nad kružnim lukovima $\widehat{AS}$ i $\widehat{BS}$), tada je $\sphericalangle ACS=\sphericalangle BCS=45^\circ$, pa je CS simetrala kuta $\sphericalangle ACB$.



3. Zajedno oba radnika naprave dnevno 1/12 dio posla, pa će za 10 dana napraviti 5/12 posla. Ostatak od 7/12 posla drugi radnik će napraviti za 35 dana, pa će dnevno napraviti 1/60 dio posla, tj. cijeli posao će napraviti za 60 dana. Za 24 dana drugi radnik bi napravio 24/60=2/5 posla, a ostale 3/5 posla bi prvi radnik napravio za isto vrijeme (24 dana), tj. dnevni učinak prvog radnika je 1/40 posla, što znači da bi prvi radnik sam napravio posao za 40 dana.

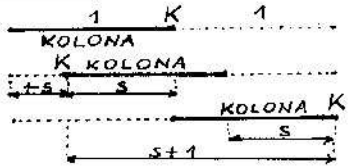
4. Analiza: Neka su M i N podnožja visina iz C i A_1 na pravac AB. Kako je $|BA_1|=|CA_1|$, to je A_1N srednjica trokuta BCM, pa je $|A_1N|=|CM|/2$. Kako je $|AT|=(2/3).|AA_1|$, to je $|AA_1|=(3/2).|AT|$.
Konstrukcija: Dužinu $\overline{AT}$ produžimo preko točke T, tako da je $|TA_1|=|AT|/2$. Iz A_1 i H konstruiramo normale na pravac p. Neka su M i N sjecišta te normale sa pravcem p. Na pravcu MH konstruiramo točku C, tako da je $|CM|=2.|A_1N|$, te $B=CA_1\cap p$.



5. Nula. Obrazložite odgovor.

VIII razred:

1.

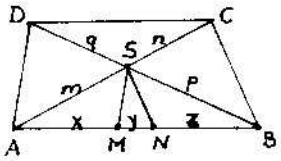


Neka se kurir kreće brzinom x, kolona brzinom y i neka je s put koji kurir prijeđe od čela kolone do njenog kraja.
Dok kurir, brzinom x, prijeđe put s, istovremeno kolona, brzinom y, prijeđe put 1-s, pa je $s/x=(1-s)/y$, tj. $x/y=s/(s-1)$.
Dok kurir prijeđe put s+1 brzinom x, istovremeno kolona prijeđe put s brzinom y, pa je $(s+1)/x=s/y$, tj. $x/y=(s+1)/s$.
Iz $s/(s-1)=(s+1)/s$ slijedi $s=\sqrt{2}/2$ km, pa je kurir ukupno prešao $2s+1=\sqrt{2}+1$ km.

2. a) $R=(n^2+2n-8)/(n^2-4)=(n-2)(n+4)/(n-2)(n+2)=(n+4)/(n+2)$.
b) $R=1+2/(n+2)\in Z \Leftrightarrow n+2\in\{1,-1,2,-2\} \Leftrightarrow n\in\{-1,-3,0,-4\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R\in\{3,-1,2,0\}$.

3. a) Pošto je $n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$, tada je očito n^5-n djeljivo sa 6 (produkt 3 uzastopna cijela broja je djeljiv sa 6). Lako se pokazuje da je n^5-n (za $n=5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$, $k\in Z$) djeljivo sa 5, čime je i tvrdnja zadatka dokazana.
b) $1990=a^5+b^5 \Rightarrow a+b=(a+b)+1990-(a^5+b^5)=1990-(a^5-a)-(b^5-b)$.
Kako $5|1990$, a prema (a) i $5|a^5-a$ i $5|b^5-b$, tada je tvrdnja zadatka očigledna.

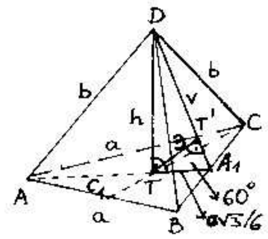
4.



Iz sličnosti trokuta ABC i CDS je $m:n=p:q$. Primjenom Talesovog teorema u pramenu pravaca izlazi $m:n=(x+y):z$ i $p:q=(y+z):x$, pa imamo: $(x+y)/z=(y+z)/x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+yz-z^2-yz=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-z)(x+y+z)=0 \Leftrightarrow x-z=0$ (zbog $x+y+z\neq 0$) $\Leftrightarrow x=z$, što se i tvrdilo.

5.



$((a\sqrt{3}/6).\sqrt{3})/2=3 \Rightarrow a=12$ cm,
$v=a\sqrt{3}/3=4\sqrt{3}$ cm,
$h=((a\sqrt{3}/3).\sqrt{3})/2=a/2=6$ cm,
$O=a^2\sqrt{3}/4+3av/2=3a^2\sqrt{3}/4=$
$=108\sqrt{3}$ cm^2,
$V=(1/3).(a^2\sqrt{3}/4).h=a^3\sqrt{3}/24=$
$=72\sqrt{3}$ cm^3.

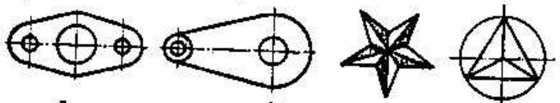
XVI "ARHIMEDESOV" MATEMATIČKI TURNIR

Z a d a c i :

V razred:

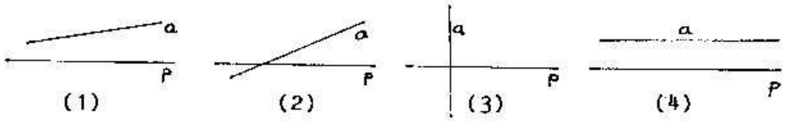
PRVA GRUPA RADATAKA:

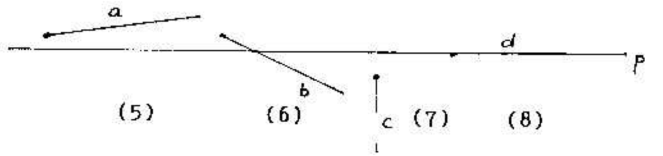
1. Za svaki od sledećih slučajeva-zahteva prvo napisati odgovarajući izraz, a onda mu izračunati vrednost:
   a) razlika broja 56 i zbira brojeva 23 i 4,
   b) razlika zbira brojeva 56 i 23 i broja 4,
   c) zbir proizvoda brojeva 5 i 7 i razlike brojeva 71 i 54,
   d) količnik zbira brojeva 67 i 2 i razlike brojeva 35 i 12
   e) proizvod količnika brojeva 63 i 7 i zbira brojeva 4 i 8,
   f) zbir količnika brojeva 154 i 7 i razlike brojeva 31 i 9.
2. Dat je skup $S=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ i dva njegova podskupa $A=\{4,6,7\}$, $B=\{4,5,6,8\}$. Odredi sledeće skupove:
   a) $A\cup B$, b) $A\cap B$, c) $S\setminus B$, d) $S\setminus S$, e) $A\setminus B$, f) $B\setminus A$.
3. Odgovoriti sa DA ili NE da li postoje takvi brojevi:
   a) deljivi sa 10 i nisu deljivi sa 2,
   b) deljivi sa 10 i nisu deljivi sa 5,
   c) deljivi sa 2 i nisu deljivi sa 10,
   d) deljivi sa 5 i nisu deljivi sa 10,
   e) deljivi sa 10 i nisu deljivi sa 2 i 5,
   f) deljivi sa 2 i 5, a nisu deljivi sa 10 ?
4. Koje od sledećih rečenica su tačne, a koje netačne :
   a) broj 2 je veći od 2:0,5,
   b) broj 5 je veći od 5:(1+1/9),
   c) broj 2+1/3 je veći od (2+1/3):(1/2),
   d) broj 3/4 je manji od (3/4):0,5,
   e) ako je (2x/3).(1/3)=6, onda je x=27,
   f) ako je 2x/3=0, onda je x=3/2 ?
5. Posle sniženja od 8% cena neke robe je 1840 dinara. Kolika je bila cena te robe pre tog sniženja ?
6. Majka danas ima 36, a njena ćerka 10 godina. Posle koliko godina će majka biti 2 puta starija od ćerke ?
7. Dat je ugao od 36°. Konstruisati (pomoću šestara i lenjira) ugao od 99°.
8. Koje od ovih figura na slici imaju:
   a) osu simetrije (i koliko),
   b) centar simetrije ?

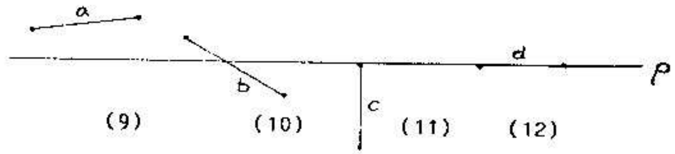


a b c d

9. Za date figure na slici (prave, poluprave, duži) konstruisati simetrične im figure u odnosu na datu pravu p.



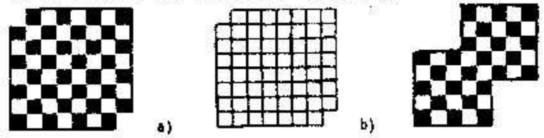




10. Dati su ugao pOq i tačka A u njemu. Odrediti (konstrukcijom) takvu tačku M, koja je jednako udaljena od oba kraka datog ugla, a od date tačke A je udaljena za d=2 cm.

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11.a) Može li se okrnjena šahovska tabla (slika a) razrezati na pravougaonike sastavljene od po 2 polja (kvadrata)?
   b) Može li se okrnjeni kvadrat dimenzije 8x8 (slika b) ceo prekriti pločicama domina, ako svaka pločica prekriva tačno dva susedna kvadratića (polja) ?
   c) Od šahovske table sa 8x8 polja neki nestaško je odsekao dva suprotna ugaona kvadrata dimenzije 3x3 polja (slika c). Može li se ostatak table obići konjem, stim da se konj vrati na polazno polje ?



a) b) c)

12. Naći najmanji prirodan broj koji pri deljenju sa dva daje ostatak 1, pri deljenju sa tri ostatak 2, pri deljenju sa četiri ostatak 3, pri deljenju sa pet ostatak 4 i pri deljenju sa šest ostatak 5.
13. Šolja je napunjena crnom kafom. Iz te šolje otpio sam 1/6 kafe i dolio toliko mleka. Zatim sam otpio 1/3 mešavine i ponovo dolio istu količinu mleka. Onda sam otpio 1/2 sadržine šolje i ponovo dolio toliko mleka. Na kraju sam popio punu šolju. Čega sam popio više: crne kafe ili mleka ? Obrazložiti odgovor.
14. Koji broj treba oduzeti od brojioca i imenioca razlomka 1815/1990, da bi se dobio razlomak jednak 0,375 ?
15. Date su dve prave a i b (koje se seku) i duž MN. Konstruisati duž AB jednaku i paralelnu duži MN, tako da joj krajnje tačke leže na datim pravama.

VI razred:

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1.a) Odrediti najmanji prirodan broj koji pri deljenju redom sa 2,3,4,5,6,8 i 9 uvek daje ostatak 1.
   b) Odrediti najmanji prirodan broj koji pri deljenju sa 2 daje ostatak 1, pri deljenju sa 3 ostatak 2, pri deljenju sa 4 ostatak 3 i pri deljenju sa 6 daje ostatak 5.

2\. Dati su brojevi $x=365001/783001$ i $y=365000/783000$. Koji je od ta dva broja veći ? (Uraditi tako da se ne deli ni "peške" ni pomoću kalkulatora).

3.a) Ako su a i b celi brojevi i $a<b$, dokazati da je aritmetička sredina brojeva a i b između a i b, tj. $a<(a+b)/2<b$.

b) Neka su a i b ($a<b$) dva uzastopna prosta broja, tj. ako je $a<z<b$, onda z nije prost broj. Da li je prost ili složen broj $(a+b)/2$?

4\. Izračunati:

a) $3.10-20:5-3$,

b) $15:(-15)-(-24):8$,

c) $(-1+1):(-1-1)-1$,

d) $(-1,3):((-2,3)+4.0,25)$,

e) $4.(-6)-84:(1,7-3,8)$,

f) $1-(1/2):(1/4)-(1/4).(-4).5$.

5\. Pri kuvanju meso gubi 35% svoje mase.

a) Koliko će se dobiti kuvanog mesa od 3 kg sirovog (svežeg) ?

b) Koliko je potrebno sirovog (svežeg) mesa da bi se dobilo 1,3 kg kuvanog ?

6\. Samo jedna od sledećih rečenica (tvrdnji) je tačna. Koja ? Ako kvadrat i romb imaju jednake stranice, onda je:

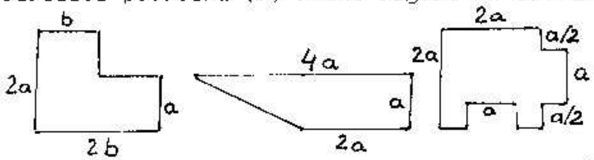
(1) površina kvadrata jednaka površini romba,

(2) površina kvadrata veća od površine romba,

(3) površina kvadrata manja od površine romba.

7\. Biciklista je put od mesta A do mesta B prešao brzinom 15 km/h, a vratio se iz B u A (istim putem) brzinom 10 km/h. Kolika je njegova srednja brzina na čitavom putu (tamo i nazad) ?

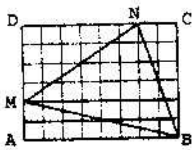
8\) Odrediti površinu (P) svake figure na slici.



9\. Pravougaonik ABCD na slici podeljen je na 48 kvadratića stranice 1.

a) Odrediti površinu trougla MBN.

b) Koji deo pravougaonika ABCD zauzima trougao MBN (u procentima) ?



10\. Konstruisati trougao ABC kada su date stranice AB i AC i težišna duž koja polazi iz temena C.

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11.a) U jednoj kutiji nalazi se ukupno 70 kuglica raznih boja: po 20 crvenih, plavih i žutih, dok su ostale zelene. Koliko najmanje kuglica treba uzeti nasumce (bez gledanja) da bi među izvučenim kuglicama bilo ne manje od 10 kuglica iste boje ?

b) U jednoj školi ima 755 učenika. Dokazati da bar 3 učenika te škole imaju rođendan istoga dana u godini.

12\. Dati su razlomci 9/28 i 12/35.

a) Naći najmanji broj koji podeljen svakim od datih brojeva daje kao količnik prirodan broj.

b) Naći najveći broj kojim treba podeliti svaki od datih razlomaka da bi količnici bili prirodni brojevi.

13\. Mama je kupila jabuke za svoju decu: Anu, Branka i Vesnu. Trebalo je da svako od njih dobije jednak broj jabuka. Ana je iz škole došla prva, prebrojala je jabuke, uzela trećinu svih kupljenih jabuka za sebe i otišla da se igra. Zatim je došao Branko i, misleći da je došao prvi, prebrojao je jabuke, uzeo trećinu nađene količine jabuka i otišao. Na kraju, došla je Vesna i uzela trećinu preostalih jabuka. Kada se majka vratila, našla je u torbi samo 8 jabuka. Koliko je ukupno jabuka majka bila kupila ?

14\. Duž, koja spaja središta suprotnih stranica konveksnog četvorougla, podelila je taj četvorougao na dva dela (četvorougla) jednakih površina. Dokazati da su tada te stranice paralelne.

15\. a) Koliko se ukupno raznih trouglova dobije kada se u trouglu povuku sve tri težišne duži ? Nacrtaj sliku.

b) Tri podudarna trougla razrezana su po raznim težišnim dužima. Sastaviti jedan trougao od tako dobijenih šest delova. Rešenje prikazati crtežom.

VII razred:

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1\. Dati su realni brojevi: $\sqrt{9}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{18}$, $2/7$; 0; $1,66\ldots$; $0,31331333133331\ldots$; $1,3131252525\ldots$; $3,030030003\ldots$; $0,27700\ldots$; $2,39$; $3,14$; π. Napišite koji su među ovim brojevima: a) racionalni, b) iracionalni, c) celi.

2\. a) Koji od sledećih izraza je za svako x jednak $5x^3$?

(1) $x+2x+3x$, (2) $2x+3x^2$, (3) $5x\cdot x^2$, (4) $x^3.x^3.x^3.x^3.x^3$.

b) Za koje vrednosti od x je tačna jednakost $\sqrt{x^2}=|x|$?

(1) za svako $x\in R$, (2) samo za $x\geq 0$, (3) samo za $x\leq 0$, (4) samo za $x=0$, (5) ni za jedno x.

3\. Dat je izraz $(4x-3y)^2-(2x-y)(8x-9y)$. Izvršiti naznačene operacije, a onda izračunati brojevnu vrednost dobijenog izraza za $x=-0,5$ i $y=-3$.

4\. a) Dokazati da zbir četiri uzastopna prirodna broja nikad ne može biti prost broj.

b) Dokazati da je razlika kvadrata dva uzastopna prirodna broja uvek neparan broj.

5\. Odrediti najmanji prirodan broj koji je deljiv sa 7, a pri deljenju sa 2,3,4,5 i 6 daje ostatak 1. Odredi i druge brojeve koji imaju to svojstvo.

6\. Odrediti vrednost izraza $A=6x^2-12xy+6y^2$ ako je $x=13,894$ i $y=3,894$.

7\. Dešifrovati sabiranje: USA+USSR=PEACE. Istim slovima odgovaraju iste cifre, a različitim različite.

8\. Centralni ugao jednog pravilnog mnogougla (ugao pri vrhu njegovog karakterističnog trougla) je 30°. Koliko ima taj mnogougao: a) stranica, b) dijagonala, c) osa simetrije, d) unutrašnji ugao.

9\. a) Za koliko će se povećati dužina kružnice ako se njen prečnik, koji iznosi 20 m, poveća za 25% ?

b) Za koliko se procenata poveća površina kruga ako se njegov prečnik poveća za 50% ?

10. Zamislite da ste obišli Zemljinu kuglu idući tačno po ekvatoru. Koji deo vašeg tela-vrh glave ili peta noge-je pri tome prešao veći put i za koliko ? Uzmite da je vaša visina 1,7 m.

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11. Dokazati da zbir kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva nikada ne može biti kvadrat nekog prirodnog broja.

12. a) Cena neke robe povećana je u aprilu za 10%. U maju je cena te robe smanjena za 10%. Da li je sada ta roba skuplja ili jeftinija (u odnosu na cenu u aprilu) ? Za koliko procenata ?

b) Jedna knjiga je za 25% skuplja od druge knjige. Za koliko procenata je druga knjiga jeftinija od prve ?

13. a) Koliko ima različitih petocifrenih brojeva, čija je bar jedna cifra petica ?

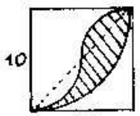
b) Na koliko se različitih načina 4 učenika mogu razmestiti na 10 stolica ?

c) U grupi od 10 učenika svaki se rukovao sa svakim. Koliko je svega bilo rukovanja ?

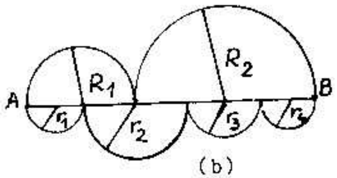
14. U jednakokraki trapez, osnovica a i b, upisana je kružnica. (Prečnik kružnice je h - visina trapeza). Dokazati da je $h^2=ab$.

15. a) Izračunati površinu figure na slici (a).

b) Koje polukružnice na slici (b) - gornje ili donje - imaju veći zbir dužina ?



(a)



(b)

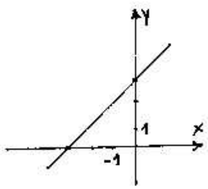
VIII razred:

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1. Dokazati da kvadrat neparnog broja pri deljenju sa 8 uvek daje ostatak 1.

2. Data je jednačina $(ax-6).6+24=5ax$, gde je a ceo broj, a x nepoznata. Odrediti za koje vrednosti a jednačina:
(1) ima kao rešenje (koren) broj $-3/2$,
(2) nema rešenja,
(3) ima kao rešenje negativan broj,
(4) ima celobrojno rešenje,
(5) ima kao rešenje prirodan broj.

3. Koja jednačina odgovara nacrtanom grafiku ?
a) $y=x$, b) $y=.x$, c) $y=3+x$, d) $y=3-x$,
e) $y=x-3$, f) $y=-x-3$.



4. Rešiti jednačinu $2x/5-(x+5)/10+0,5=x$.

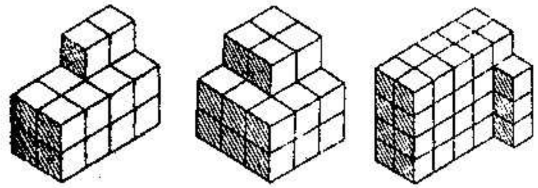
5. Kada je ocu bilo 27 godina, njegov sin je imao 3 godine. Sada je otac 3 puta stariji od sina. Koliko sada ima godina otac, a koliko sin ?

6. Sveže pečurke sadrže 90% vode, a sušene 12%. Koliko će se kg sušenih pečurki dobiti od 44 kg svežih pečurki ?

7. a) Tri podudarne kocke složene su tako da je dobijen kvadar površine 126 cm^2. Odrediti zapreminu tog kvadra.

b) Ako bi se 1000000 takvih kvadara (nastalih slepljivanjem pomenutih kocki) naslagali jedan na drugi, kolika bi bila visina dobijenog stuba (najmanja i najveća visina) ?

8. Od kockica brida a složena su tela prikazana na slikama. Kolika je zapremina svakog od tih tela (u funkciji od a) ?



(1) (2) (3)

9. Od kocke ivice a=24 cm odrezana je piramida sa ravni koja sadrži središta dveju ivica i jedno teme kocke. Kako se odnose zapremine dobijenih delova (odsečenog i preostalog dela kocke) ?

10. Omotač prave kružne kupe je $65\pi\ cm^2$, a poluprečnik njene osnove je 5 cm. Izračunati površinu i zapreminu ove kupe.

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11. a) Naći dvocifreni broj koji je jednak trostrukom zbiru njegovih cifara.

b) Naći dvocifreni broj koji je jednak trostrukom proizvodu njegovih cifara.

c) Odrediti četvorocifreni prirodan broj (sa različitim ciframa) koji pomnožen sa 9 daje četvorocifreni broj sa istim ciframa, ali u obrnutom redosledu, tj. dešifrovati množenje: $\overline{abcd}.9=\overline{dcba}$.

12. Duža stranica pravougaonika smanjena je za 50%, a kraća stranica povećana za 50%. Da li se pri tome promenila površina pravougaonika ? Izrazi to u procentima. A da li se promenio obim pravougaonika ? Za koliko ?

13. Data je funkcija $f(x)=(a+2)x-a+2$, gde je a realan parametar.
a) Rešiti jednačinu $f(x)=0$.
b) Odrediti najveće celobrojno negativno rešenje nejednačine $f(1)\leqq 5$.
c) Odrediti onu vrednost parametra a za koju grafik funkcije $y=f(x)+f(x-1)$ prolazi kroz tačku $M(1,2)$.

14. U 1990. godini Nada će navršiti onoliko godina koliki je zbir cifara godine njenog rođenja. Koje godine je rođena Nada ?

15. a) Rešiti jednačinu $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=1$.

b) Nacrtati grafik funkcije $y=||x|-2|$. Za koje vrednosti promenljive x ta funkcija ima najmanju vrednost i kolika je ona ? Rešiti nejednačinu $f(x)\leqq 1$ u skupu celih brojeva, gde je $f(x)=||x|-2|$.

R j e š e n j a :

V razred:

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1. a) $56-(23+4)=29$, b) $(56+23)-4=75$, c) $5.7+(71-54)=52$,

d) $(67+2):(35-12)=3$, e) $(63:7).(4+8)=108$,
f) $(154:7)+(31-9)=44$.

2. a) $A\cup B=\{4,5,6,7,8\}$, b) $A\cap B=\{4,6\}$, c) $S\setminus B=\{3,7,9\}$,
d) $S\setminus S=\emptyset$, e) $A\setminus B=\{7\}$, f) $B\setminus A=\{5,8\}$.

3. a) NE, b) NE, c) DA, d) DA, e) NE, f) NE.

4. a) $\perp$, b) T, c) $\perp$, d) T, e) T, f) $\perp$.

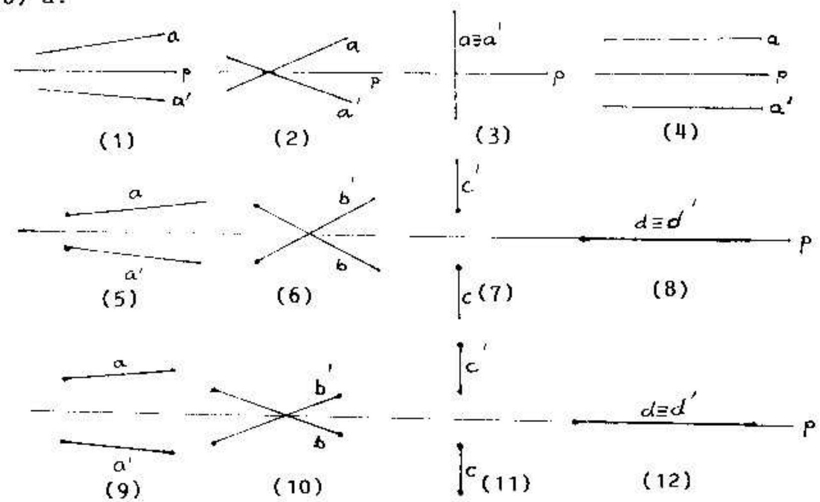
5. $x-0{,}08x=1840 \Rightarrow x=2000$ din.
Drugi način: 92%...1840 din $\Rightarrow$ 1%...1840:92=20 din $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 100%...20.100=2000 din.

6. $36+x=2.(10+x) \Rightarrow x=16$ god.

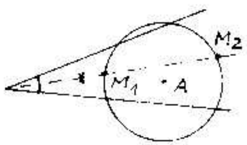
7. $4.36^0-45^0=99^0$. Konstruirajte taj kut !

8. a) a(2), b(1), c(5), d(3),
b) a.

9.



10.



Rješenje zadatka je sjecište kružnice $k(A,r=2\text{ cm})$ i simetrale zadanog kuta. Zadatak ima dva, jedno ili nijedno rješenje, ovisno o tome da li je točka A udaljena od simetrale kuta manje, jednako ili više od 2 cm.

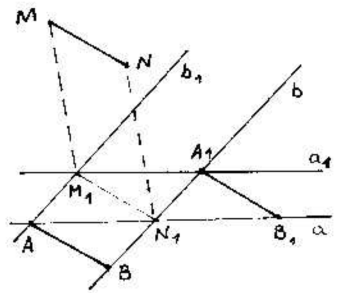
11. a) NE. Obrazloženje: Svaki pravokutnik je sastavljen od jednog crnog i jednog bijelog polja, a okrnjena šahovska ploča ima 2 crna polja više nego bijelih polja, pa je zadatak nemoguć.
b) NE. Obrazloženje: Obojimo okrnjeni kvadrat kao u prošlom slučaju.
c) NE. Obrazloženje: Pri svakom skoku konj mijenja boju polja, pa bi morao prijeći isti broj crnih i bijelih polja, a okrnjena šahovska ploča ima 2 crna polja više nego bijelih polja , pa je zadatak nemoguć.

12. n=traženi prirodan broj $\Rightarrow$ $n+1=V(2,3,4,5,6) \Rightarrow n+1=60 \Rightarrow$
$\Rightarrow n=59$.

13. Kava nije dosipavana, pa je popivena 1 šolja kave. Dolivanog mlijeka je bilo $1/6+1/3+1/2=1$ šolja. Dakle, i kafe i mlijeka se popilo po jednu šolju.

14. $(1815-x)/(1990-x)=0{,}375 \Rightarrow x=1610$.
Drugi način: $(1815-x)/1990-x)=0{,}375=3/4=3k/8k$ $(k\in N) \Rightarrow$
$(1815-x)/(1990-x)=3k/8k \Rightarrow 8k-3k=((1990-x)-(1815-x))$ (razlika između nazivnika i brojnika razlomka se ne mijenja) $\Rightarrow$
$\Rightarrow k=35 \Rightarrow (1815-x)/(1990-x)=(3.35)/(8.35)=105/280 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1815-x=105$ i $1990-x=280 \Rightarrow x=1610$.

15.



Prvi način: Izvrši se translacija pravaca a i b za vektor $\overrightarrow{NM}$ (ili $\overrightarrow{MN}$) i nađu presječne točke dobivenih pravaca a_1 i b_1 sa zadanim pravcima a i b ($a\cap b_1=A$, $b\cap a_1=B$). Postoji dva rješenja.
Drugi način: Izvrši se translacija dane dužine $\overline{MN}$ u položaj $\overline{M_1N_1}$, a zatim se kroz M_1 i N_1 povuku pravci $b_1||b$ i $a_1||a$. Njihovi presjeci sa a i b bit će krajnje točke traženih dužina. Postoji 2 rješenja.

VI razred:

PRVA GRUPA ZADATTAKA:

1. a) n=traženi broj $\Rightarrow n-1=V(2,3,4,5,6,8,9) \Rightarrow n-1=360 \Rightarrow n=361$.
b) n=traženi broj $\Rightarrow n+1=V(2,3,4,6) \Rightarrow n+1=12 \Rightarrow n=11$.

2. $1-x=41800/783001$ i $1-y=41800/783000 \Rightarrow 1-x<1-y \Rightarrow x>y$.

3. a) $a=a/2+a/2<a/2+b/2=(a+b)/2<(b+b)/2=2b/2=b$.
b) Iz (a) slijedi da je $a<(a+b)/2<b$, a kako su a i b dva uzastopna prosta broja, tada očito $(a+b)/2$ nije prost broj.

4. a) 23, b) 2, c) -1, d) 1, e) 16, f) 4.

5. a) Prvi način: 0,65.3=1,95 kg.
Drugi način: 100%...3 kg $\Rightarrow$ 1%...0,03 kg $\Rightarrow$ 65%...1,95 kg.
b) 65%...1,3 kg $\Rightarrow$ 1%...0,02 kg $\Rightarrow$ 100%...2 kg.

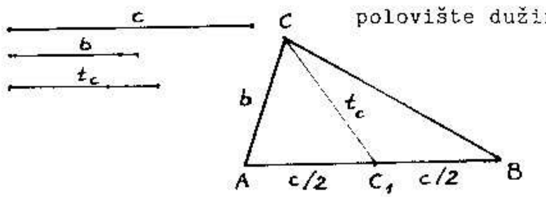
6. (2).

7. Neka je $|AB|=|BA|=s$. Tada je vrijeme u odlasku $s/15$, a u povratku $s/10$, pa je ukupno vrijeme $s/15+s/10=s/6$. Srednja brzina je $v=2s/(s/6)=12$ km/h.

8. $P_1=2ab+ab=3ab$, $P_2=2a.a/2+2a.a=3a^2$, $P_3=2a.2a=4a^2$.

9. a) $P_{MBN}=22$, b) 45,83%.

10. Prvo konstruiramo trokut AC_1C (zadane su sve 3 stranice: t_c, b, c/2), a zatim se konstruira traženi trokut ABC (C_1 je



polovište dužine $\overline{AB}$).

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11\. a) U najnepovoljnijem slučaju možemo izvući po 9 crvenih, plavih, žutih i zelenih kuglica (ukupno 36 kuglica), da bi u slijedećem izvlačenju (trideset i sedmom) dobili desetu kuglicu iste boje. Dakle, potrebno je nasumce uzeti 37 kuglica.

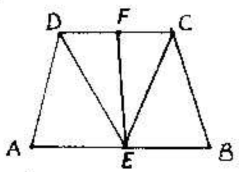
b) Godina ima najviše 366 dana. Pošto je 755 učenika, tada po Dirichletovom principu postoje bar 3 učenika koja imaju isti dan rođendan.

12\. a) Neka je x/y $(x,y \in N)$ traženi broj. Tada imamo: $(x/y):(9/28)=28x/9y$ i $(x/y):(12/35)=35x/12y$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $(9|x$ i $y|28)$ i $(12|x$ i $y|35)$ $\Rightarrow$ $x=V(9,12)=36$ i $y=M(28,35)=7$ $\Rightarrow$ $x/y=36/7$.

b) $3/140$.

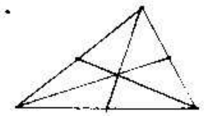
13\. Prvi način: Neka je majka kupila x jabuka. Ana je uzela $x/3$ jabuka i ostavila $2x/3$ jabuka. Branka je uzela $1/3$ od $2x/3$, tj. $2x/9$ jabuka i ostavila $2/3$ od $2x/3$, tj. $4x/9$ jabuka. Od tih jabuka trećinu, tj $4x/27$ je uzela Vesna i ostavila još $8x/27=8$ jabuka. Odatle slijedi da je $x=27$ jabuka.
Drugi način: U torbi je majka našla 8 jabuka. Vesna je uzela 4 jabuke (upola manje nego što je ostalo). To znači da je nakon Branke ostalo 12 jabuka, pa je Branka uzela 6 jabuka. Konačno, nakon Ane ostalo je 18 jabuka, pa je Ana uzela 9 jabuka. Dakle, majka je kupila 27 jabuka.

14\.

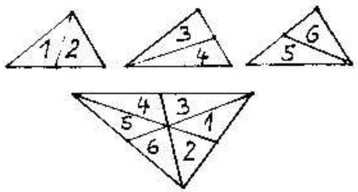


$P_{AEFD}=P_{EBCF}$ $\Rightarrow$ $P_{AED}+P_{EFD}=P_{EBC}+P_{EFC}$ $\Rightarrow$ $P_{AED}=P_{EBC}$ (jer je $P_{EFD}=P_{EFC}$ zbog $|FD|=|FC|$ i $h_{FD}=h_{FC}$) $\Rightarrow$ $h_{AE}=h_{EB}$ (jer je $|AE|=|EB|$) $\Rightarrow$ $AB \parallel DC$.

15\. a) 16.



b)



VII razred:

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1\. a) $\sqrt{9}$; $2/9$; $0,166...$; $1,3131252525...$; $0,27700...$; $2,39$; $3,14$.
b) $\sqrt{11}$; $\sqrt{18}$; $0,313313331...$; $3,030030003...$; π.
c) $\sqrt{9}$; 0.

2\. a) (3), b) (1).

3\. $2xy=3$.

4\. a) $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=2(2n+3)$, što je očito složen broj.
b) $(n+1)^2-n^2=2n+1$, što je očito neparan broj.

5\. Pošto je $V(2,3,4,5,6)=60$, svi brojevi oblika $60k$ $(k \in N)$ djeljivi su sa 2,3,4,5,6, a svi brojevi oblika $60k+1$ daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 2,3,4,5,6. Za $k=5$ dobivamo prvi (najmanji) broj 301 oblika $60k+1$ koji je djeljiv sa 7. Drugi takvi brojevi (sa istim svojstvima) su: 721, 1141, 1561,...

6\. $A=6.(x-y)^2=600$.

7\.

USA		932
+USSR	$\longrightarrow$	+9338
PEACE		10270

8\. a) 12, b) 54, c) 12, d) 150°.

9\. a) $r_1=1,25r$ $\Rightarrow$ $O_1=2r_1\pi=2.1,25r\pi=2,5r\pi$ $\Rightarrow$ $O_1-O=0,5r\pi$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $O_1/O=0,25=25\%$.
b) $r_1=1,5r$ $\Rightarrow$ $P_1=r_1^2\pi=2,25r^2\pi=2,25.P$ $\Rightarrow$ $P_1-P=1,25P=125\%P$.

10\. Neka je R polumjer Zemlje, a $h=1,7$ m visina čovjeka. Tada će vrh glave prijeći veći put od peta nogu za $2(R+h)\pi-2R\pi=2h\pi\approx 10,676$ m.

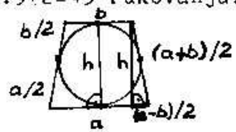
DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11\. $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2)$. Kada bi $5(n^2+2)$ bio kvadrat nekog prirodnog broja, tada bi $5|n^2+2$, tj. n^2 bi morao završavati sa 3 ili 8, što nikada nije moguće.

12\. a) $C+10\%C-10\%.(C+10\%C)=1,1C-0,11C=0.99C$.
b) $x=1,25y$ $\Rightarrow$ $y=0,8x=80\%x$.

13\. a) Svih peteroznamenkastih brojeva ima $9.10^4=90000$, a među njima je $8.9^4=52488$ bez ijedne petice, pa je broj peteroznamenkastih brojeva čija je bar jedna znamenka petica jednak $90000-52488=37512$.
b) $10.9.8.7=5040$ načina.
c) $10.9/2=45$ rukovanja.

14\.



$h^2=((a+b)/2)^2-((a-b)/2)^2=ab$.

15\. a) $P_{cf}=10^2\pi/4-10^2/2=25(\pi-2)\approx 28,5$; $P=100$; $P_{cf}=28,5\%P$.
b) $R_1\pi+R_2\pi=(R_1+R_2)\pi=(2R_1+2R_2)\pi/2=|AB|\pi/2$.
$r_1\pi+r_2\pi+r_3\pi+r_4\pi=(r_1+r_2+r_3+r_4)\pi=(2r_1+2r_2+2r_3+2r_4)\pi/2=|AB|\pi/2$.
Dakle, opsezi gornjih i donjih kružnica su jednaki.

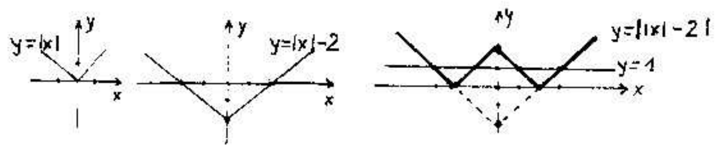
VIII razred:

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1. $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$. Kako je $n(n+1)$ paran broj za svaki $n\in N$, tada je $4n(n+1)$ djeljivo sa 8, pa je tvrdnja zadatka očigledna.
2. (1) $a=-8$, (2) $a=0$, (3) $a<0$, (4) $a\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$, (5) $a\in\{1,2,3,4,6,12\}$.
3. (c).
4. $x=0$.
5. Otac sada ima 36, a sin 12 godina.
6. 44 kg svježih gljiva $=0,1.44=4,4$ kg suhe tvari $=4,4.100/88=$ $=5$ kg sušenih gljiva.
7. a) $V=81\text{ cm}^3$, b) $h_{min}=30$ km, $h_{Max}=90$ km.
8. (1) $V=18a^3$, (2) $V=22a^3$, (3) $V=43a^3$.
9. $V_1:V_2=1:23$.
10. $O=90\pi\text{ cm}^2$, $V=100\pi\text{ cm}^3$.

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11. a) $\overline{xy}=3(x+y) \Rightarrow 10x+y=3(x+y) \Rightarrow 7x=2y \Rightarrow x=2$ i $y=7 \Rightarrow \overline{xy}=27$.
    b) $\overline{xy}=3.xy \Rightarrow 10x+y=3xy \Rightarrow y=10x/(3x-1) \Rightarrow x\in\{1,2\}$ i $y\in\{5,4\} \Rightarrow \overline{xy}\in\{15,24\}$.
    c) $\overline{abcd}.9=\overline{dcba} \Rightarrow \overline{abcd}=1089$. Obrazložite odgovor !
12. $P_1=a_1b_1=0,5a.1,5b=0,75ab=0,75.P=75\%P \Rightarrow P-P_1=25\%P$,
    $O_1=2a_1+2b_1=2.0,5a+2.1,5b=a+3b \Rightarrow O-O_1=a-b>0$ (zbog $a>b$).
13. a) $x=(a-2)/(a+2)$, $a\neq-2$, b) $a=-1$, c) $a=4$.
14. $1990-\overline{19ab}=1+9+a+b \Rightarrow a=6$ i $b=7 \Rightarrow 1967$. god. Obrazložite odgovor.
15. a) Zadana jednadžba poprima oblik: $|x-1|+|x-2|=1$. Razlikujemo ove slučajeve:
    1^o) $x\in(-\infty,1) \Rightarrow -x+1-x+2=1 \Rightarrow x=1\notin(-\infty,1)$,
    2^o) $x\in[1,2] \Rightarrow x-1-x+2=1 \Rightarrow 0.x=0 \Rightarrow x\in[1,2]$,
    3^o) $x\in(1,\infty) \Rightarrow x-1+x-2=1 \Rightarrow x=2\notin(2,\infty)$.
    Dakle, rješenja zadane jednadžbe su svi $x\in[1,2]$.
    b)



Iz grafa funkcije je vidljivo da je $y_{min}=0$ za $x\in\{-2,2\}$, a cjelobrojna rješenja nejednadžbe $y\leq1$ su $x\in\{\pm1,\pm2,\pm3\}$. Riješite zadatak algebarskom metodom primjenom definicije apsolutne vrijednosti realnog broja.

SFR JUGOSLAVIJA

Z a d a c i :

VII razred:

1. Koji je najveći prirodni broj koji zadovoljava slijedeći uvjet: bilo koje dvije susjedne znamenke čine dvoznamenkasti broj djeljiv sa 23 ?
2. Ako su u troznamenkastom broju, djeljivim sa 7, dvije posljednje znamenke jednake, dokaži da je suma znamenaka djeljiva sa 7.
3. Za 4 broja a,b,c,d vrijedi: $d>c$, $a+b=c+d$, $a+d<b+c$. Poredaj ta 4 broja po veličini.
4. Na osnovici $\overline{BC}$ jednakokračnog šiljastokutnog trokuta ABC odredi točku M, tako da razlika njenih udaljenosti od krakova toga trokuta bude jednaka polovini duljine kraka $\overline{AB}$.
5. U pravokutnom trokutu visina spuštena na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na 2 dijela, čija je razlika jednaka duljini jedne katete. Odredi kuteve trokuta.

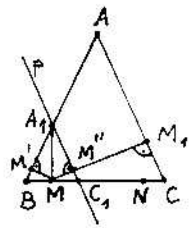
VIII razred:

1. Dokaži da je suma kubova 3 uzastopna prirodna broja djeljiva sa 9.
2. Jednoznamenkasti broj x je uvećan za 10 i time je broj x uvećan za neki postotak. Uvećamo li dobiveni broj za jednak broj postotaka, kao prvi puta, dobivamo 72. Odredi broj x.
3. Odredi šesteroznamenkasti broj čiji produkti sa 2, 3, 4, 5 i 6 predstavljaju također šesteroznamenkaste brojeve, koji se pišu istim znamenkama kao i traženi broj.
4. U trokutu ABC simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki N, a simetrala kuta $\sphericalangle CBA$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki P, pri čemu je $|PN|=1$. Presjek simetrala AN i BP je točka Q. Vrh C pripada kružnici koja prolazi točkama P,Q i N. Odredi površinu trokuta NPQ.
5. Dijagonale proizvoljnog trapeza dijele trapez na 4 trokuta. Površine trokuta koji sadrže osnovice trapeza su m (cm^2) i n (cm^2). Izračunaj površinu P trapeza.

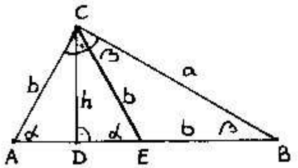
R j e š e n j a :

VII razred:

1. Dvoznamenkasti višekratnici broja 23 su:23, 46, 69 i 92. Prirodni brojevi,koji počinju ovim višekratnicima i zadovoljavaju uvjet zadatka,su: 23, 46923, 6923 i 923, pa je traženi broj 46923.
2. Neka je $x=\overline{abb}$ ($a\in\{1,2,...,9\}$, $b\in\{0,1,...,9\}$) traženi broj. Tada je $x=100a+10b+b=7(14a+b)+2(a+b+b)$. Kako $7|7(14a+b)$, a po pretpostavci i $7|x$, tada i $7|2(a+b+b)$, tj. $7|(a+b+b)$, što se i tvrdilo.
3. $a+d<b+c \Rightarrow (a+d)+b<(b+c)+b \Rightarrow (a+b)+d<2b+c \Rightarrow (c+d)+d<2b+c$ (jer je $a+b=c+d$) $\Rightarrow 2d<2b = d<b$,
   $a+d<b+c \Rightarrow (a+d)+c<(b+c)+c \Rightarrow a+(c+d)<b+2c \Rightarrow a+(a+b)<$ $<b+2c$ (jer je $a+b=c+d$) $\Rightarrow 2a<2c \Rightarrow a<c$.
   Kako je po pretpostavci $d>c$, tada imamo: $a<c<d<b$.

4. 

Neka je ABC šiljastokutan jednakokračan trokut sa osnovicom $\overline{BC}$ i neka pravac, paralelan sa $\overline{AC}$ i na udaljenosti $|AB|/2$ od AC, siječe $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ u točkama A_1 i C_1. Tada je trokut A_1BC_1 također jednakokračan (sličan trokutu ABC). Neka je M podnožje visine spuštene iz A_1 na $\overline{BC_1}$, a M', M'' i M_1 redom podnožja normala spuštenih iz M na $\overline{A_1B}$, $\overline{A_1C_1}$ i AC. Tada je $|MM_1|-|MM'|=|MM_1|-|MM''|$ (zašto ?) $=|M_1M''|=|AB|/2$, pa je M tražena točka. Analogno se pokazuje da je to i točka N, $N\in\overline{BC}$, $|CN|=|BM|$, do koje dolazimo zamjenjujući uloge krakova $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

5. 

Neka je ABC pravokutan trokut, D nožište visine iz C na hipotenuzu $\overline{AB}$ i E točka te hipotenuze simetrična točki A u odnosu na točku D. Tada je $|BE|=|BD|-|ED|=|BD|-|AD|=|AC|$ (prema uvjetu zadatka), pa je trokut BCE jednakokračan, tj. $\sphericalangle EBC=\sphericalangle BCE=\beta$. Kako je $\sphericalangle AEC=\alpha$ (zašto ?), tada je $\alpha=2\beta$ (odnos vanjskog i unutarnjih kuteva trokuta EBC). Pošto je i $\alpha+\beta=90^\circ$, tada je $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$.

VIII razred:

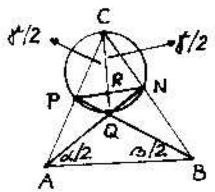
1. Neka su $n-1, n, n+1$ tri uzastopna prirodna broja. Tada je $S=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2)$. Uzimajući redom $n=3k, 3k-1, 3k+1$, dobivamo za n^2+2 redom izraze $3k((9k^2+2)$, $3(3k^2-2k+1)$, $3(3k^2+2k+1)$, koji su djeljivi sa 3, pa, kako je i $3n$ djeljivo sa 3, tada je $3n(n^2+2)=S$ djeljivo sa **9**.

2. Neka je x traženi jednoznamenkasti broj. Uvećamo li broj x za 10, tada je njegovo povećanje za $100.10/x=(1000/x)\%$. Uvećanjem broja $x+10$ za isti postotak $(1000/x)\%$, dobivamo 72, tj. imamo: $(x+10)+(x+10).(1000/x)/100=72$

$$x^2-52x+100=0,\quad (x-2)(x-50)=0,\quad x_1=2, x_2=50,$$

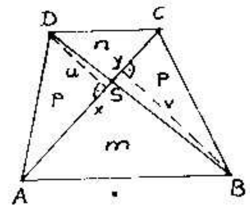
ali samo $x=2$ zadovoljava uvjete zadatka. Izvršite pokus.

3. $n=142857$. Obrazložite rješenje.

4. 

Uz oznake kao na slici imamo: $\sphericalangle PQN=\sphericalangle AQB=180^\circ-(\alpha+\beta)/2=90^\circ+\gamma/2$, a s druge strane je $\sphericalangle PQN=180^\circ-\gamma$ (jer je PQNC tetivni četverokut), pa je $\gamma=60^\circ$. Kako je Q sjecište simetrala kuteva trokuta ABC, to je CQ simetrala kuta γ, pa je $\sphericalangle PCQ=\sphericalangle NCQ=30^\circ$. Dalje je $\sphericalangle QPN=\sphericalangle QCN=30^\circ$ i $\sphericalangle QNP=$

$=\sphericalangle QCN=30^\circ$ (kutevi nad kružnim lukovima $\widehat{QP}$ i $\widehat{QN}$). Kako je $|PN|=1$, lako se zaključuje da je $|QR|=\sqrt{3}/6$, pa je površina trokuta NPQ jednaka $\sqrt{3}/12$.

5. 

Iz $P_{\Delta CDA}=P_{\Delta CDB}$ (imaju zajedničku osnovicu $\overline{CD}$ i jednake visine) slijedi da je $P_{\Delta ASD}=P_{\Delta BSC}=p$. Iz $p:n=(xu/2):(yu/2)=x:y$ i iz $m:p=(xv/2):(yv/2)=x:y$ slijedi $p:n=m:p$, $p^2=mn$, $p=\sqrt{mn}$, pa je površina trapeza $P=m+n+2\sqrt{mn}=(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2$.

S A D R Ž A J

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
"P I T A G O R A"
BELI MANASTIR

Školska 3, 54300 Beli Manastir

"PITAGORINA" BIBLIOTEKA

MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE:

21. Dr. Boris Pavković: Diofantske jednadžbe
22. ,, ,, ,, Kongruencije
23. ,, ,, ,, Inverzija u ravnini i njene primjene
24. Luka Čeliković: Princip matematičke indukcije
25. ,, ,, Antje funkcija (funkcija "najveće cijelo")
26. Luka Čeliković - Milan Šarić: Metode pomoćnih likova u planimetrijskim zadaćama (odabrani zadaci)
27. Luka Čeliković: Vektori (odabrani zadaci)
28. Dr. Zdravko Kurnik: Primjena algebarske metode u konstruktivnim zadaćama

KNJIGE:

1. Milan Šarić: Najljepši logički zadaci - gimnastika uma
2. ,, ,, Glavolomije
3. ,, ,, Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola
4. Milan Šarić: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1988. godine - za učenike osnovnih škola
5. Milan Šarić - Luka Čeliković: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1989. godine - za učenike osnovnih škola
6. Milan Šarić - Luka Čeliković: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1990. godine - za učenike osnovnih škola
7. Luka Čeliović - dr. Zdravko Kurnik: Matematička natjecanja srednjoškolaca u SFRJ u 1988. godini
8. Luka Čeliković: Jednadžbe - nestandardni zadaci za mlade matematičare
9. Luka Čeliković - Vlado Jalšovec: Riješeni zadaci iz matematike i fizike sa prijemnih ispita 1988. godine fakulteta u SR Hrvatskoj
10. Luka Čeliković - Vlado Jalšovec: Riješeni zadaci iz matematike i fizike sa prijemnih ispita 1989. godine fakulteta u SR Hrvatskoj
11. Luka Čeliković - Vlado Jalšovec: Riješeni zadaci iz matematike i fizike sa prijemnih ispita 1990. godine fakulteta u Republici Hrvatskoj