Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu
na dopuštenju da časopis
"Matematički list za učenike osnovne škole - Mala zbirka matematičkih zanimljivosti"
skeniram i objavim na webu.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/
http://public.carnet.hr/mat-natj

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

**IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE**

Beograd, Knez Mihailova 35 IV, p. p, 728.

Urednici:

Platon Dimić i *Miroslav Živković*

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

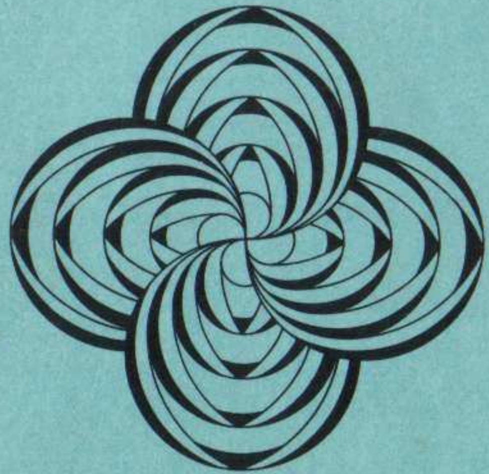
Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

SADRŽAJ

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

MALA ZBIRKA MATEMATIČKIH ZANIMLJIVOSTI



BEOGRAD
1979.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

MALA ZBIRKA MATEMATIČKIH ZANIMLJIVOSTI

Izbor i obrada: Emilija Mamuzić

PREDGOVOR

Matematika disciplinuje um, privikavajući ga na logično razmišljanje. Stoga se često kaže — matematika je gimnastika uma!

U radu, u igri, prosto u svakoj delatnosti potrebna je, međutim, pored logičnog razmišljanja, svakom čoveku i snalažljivost, ili dovitljivost ili — kako se to često kaže — promućurnost! Ta se sposobnost može razvijati u velikoj meri baš rešavanjem matematičkih zadataka. U tom pogledu može da bude veoma korisno i rešavanje zadataka koji spadaju u takozvanu zabavnu matematiku. Upravo, pri rešavanju zadataka iz zabavne matematike obično se na prvom mestu ova sposobnost baš i traži!

Svaka porodica u kojoj se roditelji staraju oko organizacije aktivnosti namenjenih umnom razvitku svoje dece oseća potrebu za pogodnim materijalom kojim bi se u vidu razonode moglo to postići. Za takvim materijalom se oseća potreba i u slobodnim večerima u porodičnom krugu, i za vreme letnjeg odmora, i na drugarskim sastancima učenika. Zato je uredništvo Matematičkog lista odlučilo da ovogodišnja dodatna sveska lista predstavlja jedan mali priručnik ove vrste, pa je isti u tom smislu i sastavljen.

Matematičkog gradiva koje se danas razvrstava u matematičku razonodu ima vrlo mnogo. No, u jednu ovakvu malu svesku moglo bi biti uneto od toga svega samo ponešto. Da bi ona ipak sadržavala izvesne kakve-takve celine, odlučeno je da se zadržimo samo na sledećim odeljcima: matematičke pošalice, veštine otkrivanja zamišljenih brojeva i predmeta i matematičke igre. Sve je to izneto u vidu niza pitanja na koje bi trebalo da učenici sami odgovore, no na koja su dati i sažeti odgovori na kraju sveske.

Urednicima Matematičkog lista zahvaljujem na ukazanoj pomoći prilikom redigovanja ovog teksta.

Autor

NEKE MATEMATIČKE POŠALICE

1. U 8 sati pre podne polazi putnički automobil iz Beograda za Niš, sa brzinom od 60 km na sat. U 10 sati polazi teretni automobil iz Niša za Beograd, sa brzinom od 40 km na sat. Koji će od njih u trenutku susreta biti bliži Nišu?

2. Na stolu se nalaze tri šibice. Ne dodajući im ni jednu šibicu napraviti od njih četiri.

3. U svakom uglu neke sobe nalazi se po jedna mačka i svaka od njih vidi tri mačke. Koliko je ukupno mačaka bilo u toj sobi?

4. Neki ćutljivi čovek dođe na blagajnu bioskopa i položi pred blagajnicu 20 dinara, ne govoreći ništa. Blagajnica mu na to ne reče ništa, nego mu pruži kartu od 20 dinara, iako je još bilo karata od po 12, odnosno od po 9 dinara. Kako je ona mogla znati da on želi baš kartu od 20 dinara?

5. Neki čovek ostavi svom nasledniku konja i mačku, s tim da ih proda, pa da novac koji dobije za konja da u dobrotvorne svrhe, a novac koji dobije za mačku zadrži za sebe. Kako je naslednik postupio, pa da najveći deo dobijenog novca ipak ostane njemu?

6. U neku trgovinu dođe kupac i zatraži robe za 60 dinara, ali preda na kasi novčanicu od 500 dinara. Kako blagajnica nije imala sitnine, ona pošalje pomoćnika u susednu trgovinu da joj promeni novčanicu, pa vrati kusur. Ali već posle pola sata dođe blagajnica iz susedne trgovine i zatraži svoj novac natrag, jer je predata novčanica bila lažna. Na to će šef trgovine: „Eto, izgubismo robe za 60 dinara i 500 dinara u gotovu!“ Da li je bio u pravu?

7. Koliko će sveća ostati, ako se od 5 upaljenih sveća dve ugase?

8. Neko kupi jednoga dana nož za 15 dinara, a idućeg dana dođe opet u istu trgovinu, zatraži nož od 30 dinara i vrati nož od 15 dinara. Na zahtev prodavca da doplati još 15 dinara, on odgovori: „Juče sam vam dao 15 dinara, a sada nož od 15 dinara, znači — ne plaćam ništa.“ Da li je bio u pravu?

9. Koliko je gusaka bilo na vodi kad se zna da je jedna guska plivala ispred dve druge, druga iza dve druge, a treća između dve druge?

10. Ako u ponoć pada kiša, može li se očekivati da će nakon 72 časa vreme biti sunčano?

11. Tri gosta večeraju u jednom restoranu. Posle večere svaki gost preda na blagajni po 100 dinara. Blagajna zadrži 250 dinara za večeru, svakom gostu vrati po 10 dinara, a 20 dinara zadrži za garderobu. I onda: od svakog gosta je bilo naplaćeno po 90 dinara, što znači ukupno 270 dinara; za garderobu je zadržano 20 dinara, što zajedno sa sumom naplaćenom od gostiju iznosi 290 dinara. Ali su gosti predali na blagajni ukupno 300 dinara. Gde se posle toga nalaze preostalih 10 dinara?

12. Kako se broj 666 može povećati za polovinu svoje vrednosti, a da se nad njim ne vrše nikakve aritmetičke operacije?

13. Da bi se jedno jaje skuvalo, potrebno je da voda ključa 5 minuta. Koliko dugo treba da ključa voda, da bi se skuvala 4 jajeta?

14. Trojica turista došla su do reke. Na obali je bio samo jedan čamac sa 2 mesta. Koristeći se tim čamcem svaki od turista prešao je na suprotnu obalu, no tako da je čamac paran broj puta prešao reku. Kako je to bilo moguće?

15. Prilikom jedne oluje sakrili su se veverica – otac, veverica – mati, i mala veverica, ispod jednog velikog drveta. „Kad bi se ovo drvo slomilo — rekla je mala veverica — poginuli bismo sve četvoro". Zašto je mala veverica rekla „sve četvoro"?

16. U sudu od 1 l ima 6 dl mleka. Ako se u ovaj sud uspe još 6 dl mleka — koliko će mleka biti u njemu?

BRZO OTKRIVANJE IZABRANIH BROJEVA ILI PREDMETA

Ovde će biti izneta neka pitanja o tome kako se može brzo otkriti neki broj ili neki predmet koji je neko izabrao, ako su dati samo izvesni podaci o njima. Sem toga će biti ukazano i na izvesne slučajeve u kojima se može odmah određiti rezultat čitavog niza računskih operacija, izvedenih nad nekim brojem, a da se sam broj uopšte ne poznaje.

Objašnjenje ovakvih „veština" uvek je čisto matematičko. U pitanju je izvesno računanje ili raspoređivanje predmeta na osnovu koga se nalazi ključ za otkrivanje onog što se traži; a da bi se ova objašnjenja mogla razumeti, dovoljno je da se zna nešto iz elementarne matematike.

Ovakvih „veština" ima mnogo, no njihovo izvođenje nije uvek podjednako zanimljivo, niti se ono lako pamti. Zbog toga će ovde biti prikazan samo manji broj ovakvih „trikova" ili „fokusa", počev od nekih sasvim jednostavnih, do nekih komplikovanijih.

1. Lice A reče licu B: „Zamisli neki broj i dodaj mu 3 (k). Ono što dobiješ pomnoži sa 3 (k) i od nađenog proizvoda oduzmi 3 (k). Nađenu razliku podeli sa 3 (k). Reci mi koliko si dobio, pa ću ti odmah reći koji si broj zamislio." Kako je to lice A moglo da izvede?

2. Neko ima u jednoj ruci paran broj kuglica, a u drugoj neparan broj kuglica. Tada se može otkriti u kojoj ruci dotični ima paran broj kuglica, a u kojoj neparan broj kuglica, na sledeći način.

Pozovemo dotičnog da broj kuglica u desnoj ruci pomnoži sa 2, a broj kuglica u levoj ruci pomnoži sa 3, i da sabere ono što je dobio, pa da nam saopšti rezultat sabiranja. Ako on pri tom dobije paran broj, paran broj kuglica se nalazi u levoj ruci, a ako dobije neparan broj, neparan broj kuglica se nalazi u levoj ruci.

Objasnite sami zašto je to tako.

3. Evo kako možete pogoditi broj nečijih godina, ako to neće otvoreno da vam kaže.

Recite mu da taj broj pomnoži sa 100 i da od onog što dobije oduzme devetostruki proizvod nekog jednocifrenog broja. Zatim neka vam kaže koliko je dobio, i vi ćete odmah moći da mu kažete i koliko ima godina, i koji je broj množio sa 9. Kako možete to da postignete?

4. Napišite neki trocifreni broj čija prva i poslednja cifra nisu međusobno jednake. Napišite zatim broj koji se dobije kad se cifre prvog broja napišu obrnutim redom i manji od ova dva broja oduzmite od većeg. Kažite mi samo poslednju cifru ostatka, i ja ću vam reći koje su njegove ostale cifre. A kako — to odredite sami.

5. Zamislite dva jednocifrena broja. Pomnožite prvi broj sa 5, dodajte proizvodu 3 (k), udvojte ono što ste dobili i dodajte rezultatu drugi zamišljeni broj. Na osnovu nađenog rezultata mogu se lako otkriti oba zamišljena broja. Pronađite kako to može da se izvede.

6. Uputstvo za izvođenje jedne društvene igre glasi: „Pozovite nekog da napiše neki proizvoljan višecifreni broj, da oduzme od njega zbir njegovih cifara, da dobijeni ostatak pomnoži nekim proizvoljnim brojem (k), da u nađenom rezultatu prevuče neku cifru koja nije nula i da vam saopšti preostale cifre po bilo kom redu. Vi ćete posle toga moći prevučenu cifru da otkrijete na sledeći način: sabraćete cifre koje vam budu saopštene i dobijeni zbir oduzećete od prvog većeg broja koji je deljiv sa 9. Dobijena razlika predstavljaće prevučenu cifru." Objasnite zašto se na taj način može otkriti prevučena cifra.

7. Jedan dečko reče svojim drugovima: „Ne treba da mi kažete datume svog rođenja, ali uradite sledeće: pomnožite sa 20 redni broj dana u datumu vašeg rođenja i onom što ste dobili dodajte 1 (k); nađeni zbir pomnožite sa 5 i onom što ste sada dobili dodajte redni broj meseca u datumu vašeg rođenja; sada ono što ste dobili pomnožite opet sa 20 i nađenom broju dodajte 1 (k); naposletku i ovo što ste dobili pomnožite sa 5 i nađenom proizvodu dodajte dvocifreni završetak broja vaše godine rođenja. Pokažite mi samo rezultate vaših računanja i ja ću ispod svakog pokazanog rezultata napisati kada je rođen onaj koji ga je izračunao." Objasnite kako je ovaj dečko mogao da to izvede.

8. Evo jedne „veštine" koja može zaista da izazove čuđenje kod neobaveštenih.

Recite nekom da izabere neki trocifreni broj čija se poslednja cifra razlikuje od njegove prve cifre i da napiše broj u kome se iste cifre javljaju u obrnutom redu; zatim neka oduzme manji od ta dva broja od većeg; zatim neka napiše broj koji ima iste cifre kao i dobijeni ostatak, s tim što se one u njemu javljaju obrnutim redom; naposletku, neka sabere nađeni ostatak sa brojem koji je dobio na ovaj način.

Neka sad uzme telefonski imenik i neka ga otvori na strani koju označava broj sastavljen od svih, sem poslednje cifre u dobijenom rezultatu. Neka zatim odbroji onoliko imena pretplatnika koliko pokazuje poslednja cifra rezultata. Neka stavi prst kod poslednjeg imena i vi ćete moći da mu kažete ime tog pretplatnika njegovu adresu, i njegov broj telefona!

9. Lice A reče licu B: „Zamisli bilo koji prost broj, veći od 3. Podigni ga na kvadrat, onom što dobiješ dodaj neki proizvoljan broj k, a rezultat podeli brojem 12. Ako mi kažeš koliki je broj k, ja ću ti odmah reći koliki si ostatak dobio pri deljenju." Kako je lice A moglo to da učini?

10. Mnoga deca znaju za ovu „račundžijsku veštinu".

„Zamisli jedan broj — ja ti dam još toliko — Marko ti pokloni još 6 (ili neki drugi parni broj) — pola baci u vodu — vrati meni ono što sam ti dao — podeli ostatak sa 3 (tj. sa polovinom onog što je dao Marko) — dobio si jedan!"

Ali mnogi ne znaju da objasne zašto je rezultat uvek 1. To treba vi da objasnite.

11. Petar reče Pavlu: „Napiši neki trocifreni broj kod koga se prva i poslednja cifra razlikuju za 5 (k). Napiši zatim novi broj, u kome će se cifre prvog broja javiti obrnutim redom. Oduzmi manji od ta dva broja od većeg i dobijenu razliku podeli sa 33. Rezultat će biti 15 ($3k$)." Objasni, na osnovu čega je to mogao da tvrdi.

12. Izaberite neki jednocifreni prirodni broj i pomnožite ga sa 25. Onom što ste dobili dodajte 3 i nađeni zbir pomnožite sa 4. Precrtajte prvu cifru rezultata. Ono što ostane podignite na kvadrat i nađite zbir cifara u rezultatu. Tom zbiru cifara dodajte 1 (k).

Dobili ste $10(9+k)$. — Otkuda znam da je tako?

13. Izaberite dva trocifrena broja i obrazujte dva šestocifrena broja tako što ćete drugi od dva izabrana broja napisati najpre ispred, a zatim iza prvog broja. Nađite razliku ova dva broja i podelite je razlikom dvaju zamišljenih brojeva. Dobićete 999.

Objasnite kako do toga dolazi.

14. Na jednakim komadima kartona napišu se brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10, pa se ti kartoni poređaju jedan pored drugoga tako da njihove neispisane strane dođu gore. Zatim onaj što predstavlja mađioničara premesti nekoliko kartona, jedan po jedan, sa početka reda na kraj reda, pa izađe iz sobe, s tim što prethodno rekne ostalima da, dok on ne bude u sobi, izvrše proizvoljan broj isto takvih premeštanja, no ne veći od 10. Zatim se izvođač ove veštine vraća u sobu i, ne tražeći nikakva obaveštenja, podiže karton na kome se javlja broj koji pokazuje tačno koliko puta su ostali izvršili premeštanje kartona u njegovom odsustvu. Kako on to može da postigne?

15. Neko je bacio na sto nekoliko desetodinarki od kojih su jedne ostale okrenute nagore „s brojem", a druge „s grbom". Zatim se leđima okrenuo k stolu, pa rekao da jedno od prisutnih lica prevrne koje bilo od tih desetodinarki proizvoljan broj puta, ali da pri svakom prevrtanju rekne „da". Naposletku je izvođač ove veštine rekao da se jedna od od desetodinarki pokrije rukom, pa je onda, čim se okrenuo k stolu, izjavio da će pogoditi da li je pokrivena desetodinarka okrenuta nagore „s brojem" ili „s grbom". I pogodio je; a kako — objasnite sami.

16. Stanite pred zidni sat i recite nekom vašem drugu da se okrene leđima prema satu i da zamisli neki broj na satu; zatim da uvek, kad bude čuo da ste kucnuli o sat, povećava broj koji je zamislio za po jedan, i da onda, kad stigne na broj 12, rekne „stoj". Vi pak, sa svoje strane, kucnite o sat najpre iznad broja 12, pa onda iznad broja 11, itd. Ako tako učinite, bićete zaustavljeni baš nad brojem koji je vaš drug zamislio. Tako ćete otkriti taj broj.

Preostaje još i da objasnite zašto ćete tako otkriti zamišljeni broj.

I	II	III	IV
1	2	4	8
3	3	5	9
5	6	6	10
7	7	7	11
9	11	12	12
11	10	13	13
13	14	14	14
15	15	15	15

17. „Pomoću sledeće tablice — rekao je Zoran sakupljenim dečacima, pokazujući im priloženu tablicu — može se odrediti broj godina svakog od vas. Zato je potrebno samo da kažete u kojim stupcima se nalazi broj godina svakog od vas, pa ću ja reći koliko je kome od vas godina."

I on je to i uradio. Zatim je i objasnio kako se to postiže.

„Eto — rekao je on — ako neko ima, na primer 9 godina, on će svoj broj godina naći u prvom i četvrtom stupcu. Ako mi to kaže, ja ću sabrati brojeve koji stoje u prvom redu prvog stupca i u prvom redu četvrtog stupca — dakle brojeve 1 i 8 — pa ću dobiti 9!"

Pokazalo se posle toga da se, zaista, kad god se postupilo na sličan način, dolazilo do broja godina onog ko je učestvovao u ovoj igri. A kako, na koji način je sastavljena ova čarobna tablica, to treba sami da odredite!

18. Uzmu se 27 karata za igranje, poređaju se u tri reda od po 9 karata, pa se pozove neko od prisutnih da izabere jednu od njih i da kaže u kom se redu nalazi izabrana karta.

Posle toga se karte skupe po redovima i slože u paket, pazeći pri tom da sve karte iz naznačenog reda dođu između one dve druge grupe karata. Zatim se opet raspodele u tri reda, no tako da se uzastopno sve po jedna karta stavlja u svaki od tri reda.

Sada se po drugi put zatraži od onog koji je izabrao kartu da kaže u kom se redu nalazi ta karta, a zatim se postupi slično prethodnom, pa se i po treći put pozove onaj koji je izabrao kartu da kaže u kom se redu nalazi izabrana karta. Na osnovu onog što vam dotični bude rekao vi ćete moći da odredite izabranu kartu.

Recite kako!

19. Evo kako se može pomoću računa otkriti koje je od tri lica uzelo koji predmet.

Izvođač veštine N postavlja na sto 24 žetona i daje 1 žeton licu I, 2 žetona licu II i 3 žetona licu III. Zatim N izlazi iz sobe, a svako

od lica I, II i III uzima i stavlja u džep po jedan od 3 predmeta a, b i c. Sem toga, po dogovoru, lice koje je uzelo predmet a uzima od preostalih 18 žetona još onoliko koliko je već dobilo; lice koje je uzelo predmet b uzima od preostalih žetona još dva puta onoliko koliko je već dobilo; i lice koje je uzelo predmet c uzima od preostalih žetona još četiri puta onoliko koliko je već uzelo. A tada se izvođač N vraća u sobu i na osnovu broja preostalih žetona otkriva kod kog lica se nalazi koji od predmeta. Kako je to moguće?

MATEMATIČKE IGRE

Pod matematičkim igrama podrazumevaćemo ovde niz postupaka koje, prema određenim pravilima, čine na smenu dva suparnika u želji da postignu izvestan cilj i da tako pobede, a koji su takvi da se unapred može utvrditi: da li jedan od dva igrača može da igra tako da sigurno pobedi, ili bar da se igra završi nerešeno, pa ma šta da učini njegov protivnik. Reč je, dakle, o igrama čiji se tok može matematički analizirati.

Ovakvih igara ima dosta, prostijih i složenijih, zanimljivijih i manje zanimljivih. U vezi sa nekim od njih lako je odgovoriti na gorenavedeno pitanje, a u vezi sa nekima to nije lako učiniti, čak i kad su same igre sasvim jednostavne; uz to, skoro sva ovakva objašnjenja zahtevaju izvesno opširnije izlaganje sa dosta teksta. Zato će ovde biti iznete neke jednostavnije od tih igara, a sem toga će samo u vezi sa nekima od njih biti izneta sva razmatranja o mogućnosti pobede igrača, dok će inače biti davana samo kratka uputstva za najbolji način vođenja igre.

1. Ko će pre do 50?

Perica i Mirko se dogovore da skrate vreme na sledeći način: prvi će od njih reći nasumce jedan prirodni broj, ne veći od 6, zatim će drugi od njih dodati k tome broju drugi prirodni broj, opet ne veći od 6, itd., sve dok se ne dođe do broja 50. Pobednik u igri je onaj koji prvi stigne do broja 50, a partije će se otpočinjati na smenu.

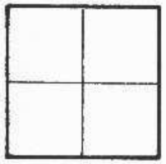
Posle toga su oni odigrali 10 partija, od kojih je Perica dobio 8 partija (i to sve one koje je on otpočinjao i još 3 druge), a Mirko samo 2 partije. Na osnovu toga Mirko zaključi da Perica u igri brojeve nije navodio nasumce, nego da je znao kako treba da ih bira. On je zatim, kod kuće, razmišljao o tome i otkrio Peričinu tajnu.

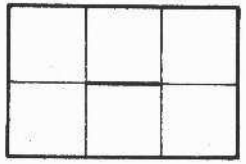
Utvrdite i vi kako je Perica postupao, kad je dobio sve partije koje je sam otpočinjao i da li je mogao, da je hteo, da dobije i sve ostale.

2. Osvajanje kvadrata

Nacrta se pravougaona figura izdeljena na kvadratna polja i onda otpočinje ova igra: svaki od dva igrača, naizmenično, povlači crtu po nekoj ivici nekog od nacrtanih kvadrata, izuzev onih ivica koje se poklapaju sa okvirima nacrtane figure. Te se ivice smatraju za već prevučene. Kad neko od igrača prevuče crtu preko poslednje još neprevučene ivice nekog kvadrata, osvaja taj kvadrat i obavezno odmah zatim povlači još jednu crtu. Pobednik je onaj ko do kraja igre osvoji više kvadrata.

Postavlja se pitanje: može li jedan od igrača igrati tako da u svakom slučaju bude pobednik u igri? To se u nekim slučajevima utvrđuje vrlo lako. Tako, na primer, ako je u pitanju figura na sl. 1, jasno je da igru dobija drugi igrač, pa ma šta da učini prvi igrač; a ako je u pitanju figura na sl. 2, pobeda je obezbeđena prvom igraču ako najpre povuče crtu po ivici *a*.


Sl. 1

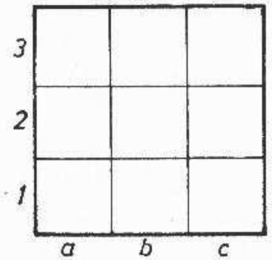

Sl. 2

No, da li može da obezbedi sebi pobedu neko od igrača ako je u pitanju kvadrat izdeljen na 9 jednakih kvadratnih polja?

3. Postići 15

Igraju dvoje. Prvi igrač upisuje koju bilo od cifara između 1 i 9 u neko polje kvadrata na sl. 3. Drugi igrač upisuje posle toga neku drugu cifru u drugo polje, vodeći računa o tom da prvi igrač, putem svog narednog poteza, ne može da popuni red (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno) brojem koji bi sa dva već upisana broja dao zbir 15. Zatim dolazi na red opet prvi igrač, itd., sve dok ne dođe do tog da zbir u nekom redu bude 15, ili da bude popunjeno i poslednje polje.

Pobednik je onaj koji uspe da nekim svojim potezom popuni neki red tako da zbir brojeva u njemu bude 15, ili da popuni poslednje polje.



Sl. 3

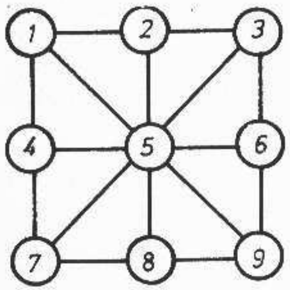
4. Pobeđuje parni broj

Od 27 šibica, koje leže na stolu, dva igrača uzimaju na smenu najmanje po jednu, a najviše po 4 šibice. Pobeđuje onaj kod koga se na kraju nađe paran broj šibica.

Može li jedan od igrača igrati tako da u svakom slučaju dobije igru, makar kako da postupi njegov protivnik?

5. Poznata igra „vodenica"

Svima je poznato koja su pravila igre „vodenica". Ipak, da ponovimo. Igra se tako što svako od dva igrača dobije po 3 žetona iste boje, recimo bele odnosno plave, i što ih oni za tim postavljaju, po svom izboru i na smenu, na slobodne kružiće sl. 4. (koji nemoraju biti numerisani). Pritom svaki od njih teži da načini „vodenicu" tj. da njegova 3 žetona budu postavljena u jedan red (horizontalno, vertikalno ili koso), jer je pobednik onaj koji prvi to postigne. Ako ni jedan od igrača ne postigne to pri samom postavljanju žetona, onda igrači na smenu povlače po jedan od svojih žetona na neko susedno polje, sve dok jedan od njih ne napravi „vodenicu". Može li jedan od igrača igrati tako da prvi to postigne?



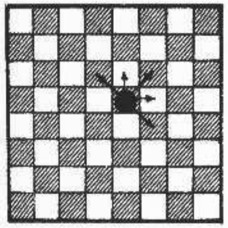
Sl. 4

6. Krstići u kružići

U ovoj igri postupa se na sledeći način. Nacrta se kvadrat i izdeli na 9 jednakih kvadratnih polja. Zatim oba igrača, na smenu, obeležavaju svaki svoj znak (na primer krstiće i kružiće) u pojedina polja, a pobednik je onaj koji prvi uspe da se 3 njegova znaka nađu na istoj pravoj (horizontalno, vertikalno i dijagonalno).

Pokazati kako treba da postupi svaki od igrača, pa da se ova igra, ma kako da postupi njegov protivnik, završi ako ne njegovom pobedom, a ono bar nerešeno.

7. Stići u suprotni ugao šahovske table

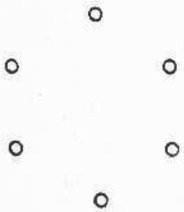


Sl. 5

Na šahovskoj tabli, u levom donjem uglu, nalazi se žeton. Dvojica, koji igraju, pomeraju žeton na smenu za po jedno mesto, no samo onako kao što je to naznačeno na sl. 5. Dobija onaj koji dovede žeton u desni gornji ugao šahovske table.

Može li neki od igrača igrati tako da svakako dobije igru?

8. Igra „sim”

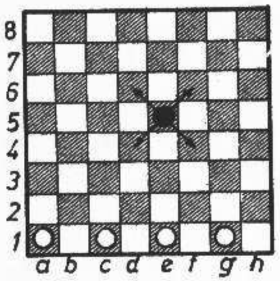


Sl. 6

Sim je igra za dvoje koja se igra ovako. Na mestima temena pravilnog šestougla (sl. 6), na hartiji, stave se tačke i njih igrači, na smenu, sve po dve, povezuju dužima. Sve ove tačke međusobno spajaju ukupno 15 duži, a da bi se potezi prvog igrača razlikovali od poteza drugog igrača, prvi će ih povlačiti crvenom okovkom, a drugi plavom. Igru gubi onaj kome se prvom dogodi da mora da „zatvori trougao“, tj. da povuče duž koja sa druge dve duži iste boje, koje je već povukao, ograniči trougao.

U vezi sa ovom igrom može se dokazati: a) da se ona ne može završiti nerešeno, tj. da u ovoj igri mora neko uvek da izgubi; i b) da u ovoj igri može uvek da pobedi drugi igrač, nezavisno od toga kakve poteze povlači prvi igrač, i čak nezavisno od toga kakav će biti prvi potez tog drugog igrača. — Pokušajte da je sa nekim odigrate.

9. Igra „vuk i ovce”



Sl. 7

Na šahovskoj tabli, postavljenoj kao obično za igru (sl. 7), stave se na crna polja prvog reda 4 bela žetona i oni će u ovoj igri predstavljati „ovce“. Sem toga se, na bilo koje drugo crno polje, postavi nekakav žeton druge boje, koji će predstavljati „vuka“. Igra se na taj način što se vuk i po jedna ovca pokreću naizmenično sa polja na kome su na prvo susedno polje, i to ovce idući samo napred, poludesno ili polulevo, a vuk bilo napred ili nazad, u svakom pravcu, ostajući na crnim poljima.

U ovoj igri vuk ne može da, „pojede“ ni jednu ovcu. On pobeđuje ako, krećući se onako kao što je predviđeno, uspe da se probije između ovaca i da stigne u prvi red šahovske table, sa kojeg ovce polaze. Ovce pak pobeđuju ako uspeju tako da opkole vuka, da ne može nikuda dalje. I — može se dokazati da ovce, ako su „pametne“, mogu uvek da pobede vuka!

10. Igra „rasad“

Igraju dvoje. Na hartiji se nacrtaju nekoliko kružića i onda prvi igrač ili spaja jednom linijom (koja ne sme da seče samu sebe) dva od tih kružića, ili, polazeči od nekog kružića, opisuje petlju i vraća se u isti. Uz to, oko neke tačke povućene krive, treba da nacrta jedan nov kružić.

Sada drugi igrač postupa na sličan način. On može uzeti u obzir i kružić koji je nacrtao prvi igrač, ali linija koju povuče ne sme presecati liniju koju je već povukao prvi igrač, niti ona može prolaziti kroz neki od kružića koji ne predstavlja njen početak ili kraj. Sem toga igrač mora voditi računa o tome da iz iz svakog kružića mogu polaziti samo 3 linije. Igru gubi onaj od igrača kome se prvom dogodi da ne može da povuče više nikakvu liniju.

Pokušajte naći neka pravila o tom kako treba da postupa igrač, ako želi da u svakom slučaju pobedi u ovaj igri.

REŠENJA

Poznate matematičke pošalice

1. Oba automobila bila su podjednako udaljena od Niša. **2.** Šibice treba složiti ovako: IV. **3.** Bilo je četiri mačke. **4.** Čovek je dao 20 dinara, na primer, u samim dvodinarkama. **5.** Zatražio je mnogo za mačku, a malo za konja, s tim da samo onaj može kupiti konja, ko kupi i mačku. **6.** Izgubljeno je samo 500 dinara u gotovu. **7.** Ostaće dve, jer će ostale izgoreti. **8.** Nije, jer je za prvih 15 dinara dobio nož koji je zatim vratio. **9.** Bile su tri guske. **10.** Ne može se očekivati, jer će u to vreme opet biti ponoć. **11.** Nema nikakvih preostalih deset dinara. Gosti su platili ukupno 270 dinara, od čega je 250 dinara zadržano za večeru, a 20 za garderobu. **12.** Ako se obrne za 180°. **13.** Isto toliko, ako se kuvaju istovremeno. **14.** Od turista dvojica su stigla na jednu, a jedan na drugu stranu reke. **15.** Zato što nije umela da broji. **16.** Biće 1 l mleka.

Brzo otkrivanje izabranih brojeva ili predmeta

1. Obeležimo sa x broj koji je lice B zamislilo. Tada je rezultat njegovog računanja bio: $r=\frac{(x+k)\cdot k-k}{k}=x+k-1$. Odatle sleduje: $x=r-(k-1)$. Znači, od dobijenog rezultata treba oduzeti broj koji je za 1 manji od broja k, pa će se dobiti zamišljeni broj.

Pri izvođenju ove veštine preporučljivo je da se broj k menja, da bi se teže uočilo u čemu se ona sastoji.

2. Neka dotični ima u desnoj ruci x kuglica, a u levoj y kuglica. Tada je rezultat njegovog računanja: $r=2x+3y$. Stoga je r parno, ako je y parno, a neparno, ako je y neparno.

3. Ako upitani ima x godina i ako je k jednocifreni broj koji je množio sa 9, onda je rezultat njegovog računanja: $r=100x-9k=100x-10k+k=10(10x-k)+k$. Nađeni rezultat predstavlja broj kod koga je cifra jedinica k, a broj desetica $10x-k$. Prema tome x se dobije kad se broju desetica iz rezultata doda cifra jedinica i dobijeni zbir podeli sa 10.

4. Zamišljeni trocifreni broj možemo izraziti sa $\overline{abc}=100a+10b+c$. S obzirom na to broj čije se cifre javljaju u obrnutom redu je: $\overline{cba}=100c+10b+a$. Pretpostavimo da je, na primer, $a>c$. Kao traženu razliku dobijemo: $\overline{abc}-\overline{cba}=100(a-c)+(c-a)$. Kako je $c-a<0$, napisaćemo: $r=100(a-c-1)+10\cdot 9+(10-a+c)$. Odavde se vidi: a) da je srednja cifra razlike uvek 9; b) da je zbir prve i poslednje cifre $s=a-c-1+10-a+c=9$, i da se, prema tome, prva cifra ostatka dobije kad se od 9 oduzme njegova poslednja cifra.

5. Neka su dva zamišljena broja x i y. Tada je rezultat računanja u ovom slučaju sledeći: $r=(5x+k)\cdot 2+y=10x+y+2k$. Prema tome, ako se od rezultata računanja oduzme $2k$, dobiće se dvocifreni broj čija će prva cifra biti x, a druga y.

6. Pretpostavićemo da je napisani broj, na primer, trocifren i da su njegove cifre a, b i c. Onda je razlika tog broja i zbira njegovih cifara $r=100a+10b+c-(a+b+c)=99a+9b=9(11a+b)$. Kad se ta razlika pomnoži nekim brojem k, dobija se $9k(11a+b)$. Ovaj broj je deljiv sa 9, što znači da je i zbir njegovih cifara deljiv sa 9. Prema tome, kad se prilikom sabiranja njegovih cifara otkloni jedan sabirak, dobija se broj koji je za taj sabirak manji od prvog većeg broja koji je deljiv sa 9.

7. Ako se sa x, y i z označe brojevi dana i meseca, odnosno dvocifreni završetak broja godine rođenja nekog lica, onda se postupak koji se predlaže može izraziti na sledeći način:

a) $(20x+k)\cdot 5=100x+5k$; b) $(100x+5k+y)\cdot 20+k=2000x+101k+20y$; c) $(2000x+101k+20y)$, $5+z=10\,000x+100y+z+505k$. Prema tome, ako se od nađenog rezultata računanja oduzme $505k$, dobije se $10\,000x+100y+z$, tj. broj kod koga se broj desetica hiljada jednak broju dana u datumu rođenja, broj stotina jednak broju meseca u datumu rođenja, a broj preostalih jedinica jednak dvocifrenom završetku broja godina rođenja dotičnog lica.

8. Neka je $\overline{abc}=100a+10b+c$ zamišljeni trocifreni broj i neka je, na primer, $a>c$. Tada se, prema datom uputstvu, dobija: $100a+10b+c-100c-10b-a=100(a-c)+(c-a)=100(a-c-1)+10\cdot 9+(10-a+c)$; $100(a-c-1)+10\cdot 9+(10-a+c)+100(10-a+c)+10\cdot 9+(a-c-1)=1089$.

Prema tome, pre izvođenja ovog „trika" treba samo pogledati u telefonsku knjigu i naučiti napamet podatke o pretplatniku koji se nalaze na devetom mestu strane 108.

9. Svaki prost broj veći od 3 može se predstaviti u vidu $6n\pm 1$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). Njegov kvadrat biće $36n^2\pm 12n+1$. Svaki broj k može se predstaviti u vidu $k=12p+q$ ($p=0, 1, 2, \ldots$, $q=0, 1, 2, 3, \ldots 11$). Posle dodavanja ovog broja kvadratu zamišljenog broja dobijemo: $36n^2\pm 12n+1+12p+q=36n^2\pm 12(n+p)+q+1$. Prema tome, ostatak će biti $q+1$, sem ako je $q=11$, pa je ostatak 0.

10. Neka je x zamišljeni broj, a neka je $2n$ broj koji dodaje Marko. Tada je rezultat izvršenog računanja sledeći:

$$r=\left(\frac{x+x+2n}{2}-x\right):n=n:n=1.$$

Kao što se vidi, rezultat računanja ne zavisi od x. Prema tome, zamišljeni broj je mogao biti bilo kakav.

11. Broj koji je Pavle napisao može se, uopšte uzev, predstaviti sa $100x+10y+z$, gde su x, y i z cifre napisanog trocifrenog broja ($x>0$). Pretpostavimo, dalje, da je, na primer, $x>z$. Tada je Pavle izveo sledeće računanje:

$$100x+10y+z-(100z+10y+x)=99x-99z=99(x-z)=99k;\quad 99k:33=3k.$$

Znači, rezultat računanja je uvek $3k$, nezavisno od zamišljenog broja.

12. Neka je zamišljeni broj x. Tada je najpre izvršeno sledeće računanje: $(25x+3)\cdot 4=100x+12$. U ovom broju na mestu stotina nalazi se cifra x i kad se ona prevuče, ostaje 12. Kako je $12^2=144$, to je zbir cifara dobijenog rezultata 9. Ako se ovom broju doda k, dobija se $9+k$.

13. Neka su dva izabrana trocifrena broja p i q. U tom slučaju su dva pomenuta šestocifrena broja $1000q+p$ i $1000p+q$. Razlika ta dva broja, uz pretpostavku da je, na primer, $p>q$, iznosi: $1000p+q-1000q-p=1000(p-q)-(p-q)=999(p-q)$. Ako se ovaj broj podeli razlikom $p-q$, dobija se 999.

14. Ako „mađioničar" sa početka reda premesti na kraj reda m kartona, a ostali premeste u njegovom odsustvu još $n<10$ kartona, onda će se na kraju reda naći karton sa brojem $m+n$, ukoliko je $m+n<10$, odnosno karton sa brojem $m+n-10$, ako je $m+n>10$. Tako, na primer, ako izvođač premesti 3 kartona, a ostali premeste još 5 kartona, na kraju reda će se naći karton sa brojem 8; a ako izvođač premesti 3 kartona, a ostali premeste još 8 kartona, na kraju rea naći će se karton sa brojem 1. Izvođač treba, dakle, samo da upamti koliko je kartona sam premestio i da odbroji toliko kartona počev od kraja reda, pa da stigne do kartona koji treba da podigne.

15. Pokazivač je, čim je bacio desetodinarke na sto, izbrojao koliko je od njih bilo okrenuto nagore, na primer, „s brojem". Zatim je u sebi, na svako „da" koje je čuo, njihov broj povećao za 1. Ako je poslednji broj bio paran, morao je i broj desetodinarki koje su se na kraju našle okrenute nagore „s brojem" biti paran; a ako je taj broj bio neparan, i broj desetodinarki „s brojem" nagore morao je biti neparan.

Izbrojavši brzo desetodinarke koje je video okrenute „s brojem" nagore kad se okrenuo opet prema stolu, pokazivač je lako mogao da odredi kako je bila okrenuta pokrivena desetodinarka.

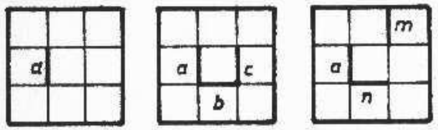
16. Objašnjenje ovog postupka je veoma prosto. Ako je vaš drug zamislio broj x, on će vam reći da se zaustavite onda kada vi $(12-x)$-ti put kucnete o sat. Tada ćete se naći nad brojem koji se dobije kad se od 12 oduzme $12-x$, tj. nad x-tom broju.

Da bi se teže uočilo u čemu je tajna ovakvog otkrivrnja zamišljenog broja, može se postupiti i ovako. Treba reći onom ko je zamislio broj da broji ne do 12, nego od nekog većeg broja, na primer 20. U tom slučaju, da biste izgledali tajanstveniji pred posmatračima, vi ćete najpre 7 puta kucnuti iznad bilo kod broja na satu, pa ćete tek prilikom osmog udarca kucnuti iznad broja 12. Dalje će sve teći kao u prethodnom slučaju.

17. Da bi se ustanovilo kako je sastavljena prikazana tablica, treba pre svega uočiti da brojevi u prvom redu predstavljaju jedinicu (nulti stepen), prvi stepen, drugi stepen i treći stepen broja 2, i da se svi brojevi između 1 i 15 (uključujući i ova dva broja) mogu izraziti pomoću ovih brojeva i zbirova dva, tri ili sva četiri ova broja. Tako je, na primer: $3=1+2$; $5=1+4$; $7=1+2+4$; $9=1+8$; $10=2+8$; $11=1+2+8$; $12=4+8$; $13=1+4+8$; $14=2+4+8$; $15=1+2+4+8$;

S obzirom na to, broj 3 je zapisan u prvom i drugom stupcu, kako bi onaj ko bi imao samo 3 godine (kad bi mogao da učestvuje u ovoj igri) uputio izvođača ove veštine na prvi i drugi stubac, odnosno na brojeve jedan i dva, koji se nalaze u prvom redu i u ovim stupcima; itd.

18. Ako kvadrati na sl. 1 predstavljaju mesta karata na stolu, onda će se posle prvog preraspoređivanja sve karte iz onog reda u kome se nalazila izabrana karta naći u kvadratu $ABCD$. Time što će onaj koji je izabrao kartu reći u kome se redu sad ona nalazi, on će, ustvari, već odrediti 3 karte među kojima se nalazi izabrana karta.



Sl. 1

Ako se posle toga izvrši još jedna preraspodela karata, tri srednje karte iz reda u kome se pre toga nalazila izabrana karta pašće u pravougaonik $PQRS$, i kada se bude saznalo u kome se redu sada nalazi izabrana karta, na nju će se moći odmah i ukazati: ona će biti središnja karta u tom redu.

Da se ne bi lako otkrilo kako se dolazi do izabrane karte, karte se ne moraju postavljati u redove, i od onog koji je izabrao kartu treba onda tražiti samo da kaže u kojoj se grupi karata nalazi izabrana karta. Pri tom se karte unutar svake grupe mogu i mešati.

19. Tri predmeta mogu biti razdata trojici učesnika u igri na sledećih šest načina *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. U prvom slučaju bilo je uzeto od 18 žetona svega $1\cdot1+2\cdot2+3\cdot4=17$ žetona, a na stolu će ostati samo jedan žeton; u drugom slučaju biće uzeto od 18 svega $1\cdot1+2\cdot4+3\cdot2=15$ žetona, a ostaće na stolu tri žetona; u trećem slučaju bilo je uzeto svega $1\cdot2+2\cdot1+3\cdot4=16$ žetona, a ostalo je dva žetona; u četvrtom slučaju bilo je uzeto $1\cdot2+2\cdot4+3\cdot1=13$ žetona, a ostalo je još 5 žetona; u petom slučaju uzeto je $1\cdot4+2\cdot1+3\cdot2=12$ žetona, a ostalo je šest žetona; u šestom slučaju uzeto je $1\cdot4++2\cdot2+3\cdot1=11$ žetona, a ostalo je 7 žetona. Na osnovu toga može lice N da odredi ko je uzeo koji predmet.

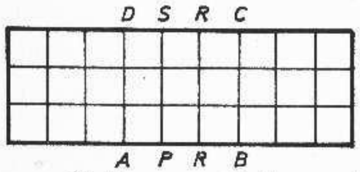
Matematičke igre

1. Da bi jedan od igrača obezbedio sebi mogućnost da prvi dostigne broj 50, treba prethodno da dostigne broj 43; jer posle toga, ma kakav prirodni broj, manji od 6, da izabere njegov suparnik, njega ne može sprečiti da u narednom potezu dostigne broj 50. Da bi pak obezbedio sebi mogućnost da prvi dostigne broj 43, treba prethodno da dostigne broj 36; itd. Tako se utvrđuje da, ako je onaj koji počinje igru najpre izabrao broj 1, pa zatim stigao na 8, 15, 22, 29, 36 i 43, ne može biti sprečen da prvi stigne do broja 50.

No, ako u prvi mah i nije izabrao broj 1 (da se ne bi primetilo da uvek počinje od istog broja), a njegov protivnik ne zna za kakve brojeve treba da se opredeli, prvi igrač će ići za tim da naknadno dostigne neke od brojeva 8, 15 itd., posle čega je opet sebi obezbedio pobedu.

Na osnovu ovog lako se može utvrditi i kako treba da postupi prvi igrač ako treba prvi da stigne do broja a, a u igri se vrši dodavanje prirodnih brojeva ne većih od k $(k<a)$.

2. U ovom slučaju prvi igrač može sebi da obezbedi pobedu na sledećin način. Najpre treba da prevuče koju bilo ivicu centralnog kvadratnog polja, na primer ivicu a (sl. 1). Ako posle toga drugi igrač prevuče koju ivicu triju kvadrata iz prvog stupca, prvi igrač lako osvaja sva tri kvadrata iz tog stupca, a zatim i sve ostale kvadrate. Ako pak prvi igrač, prilikom svog prvog poteza, prevuče neku od ostalih ivica centralnog kvadrata, na primer ivicu b (sl. 21,) prvi igrač treba da prevuče treću ivicu tog kvadrata, na primer ivicu c, i onda drugom igraču — ako ne želi da izgubi sve kvadrate — ne preostaje ništa drugo sem da osvoji centralno polje i da prepusti prvom igraču sva ostala. Naposletku, ako drugi igrač prilikom svog prvog poteza prevuče koju ivicu nekog kvadrata iz trećeg stupca, na primer ivicu m (sl. 3), prvi igrač može uzeti odgovarajući ugaoni kvadrat i prevući još jednu ivicu centralnog kvadrata, i to onu koja se ne graniči sa prevučenom ivicom m, u navedenom slučaju ivicu n, pa će posle toga osvojiti svih 9 polja.



Sl. 1 Sl. 2 Sl. 3

3. Prvi igrač može dobiti igru nezavisno od postupaka svog protivnika u sledećim slučajevima.

a) Ako prilikom prvog svog poteza u centralno polje upiše broj 5. U tom slučaju, ako drugi igrač upiše broj x u bilo koje drugo slobodno polje, prvi igrač treba da upiše $10-x$ u polje koje je centralno-simetrično tom polju u odnosu na centar kvadrata.

b) Ako prilikom svog prvog poteza upiše broj 5 u bilo koje ugaono polje. Tada, kad drugi igrač posle toga upiše bilo koji broj x u jedno od dva polja koja su susedna polju iz suprotnog ugla kvadrata (jer bi inače odmah izgubio igru), prvi igrač treba da upiše broj $10-x$ u drugo od tih polja.

c) Ako prilikom svog prvog poteza upiše broj 5 u bilo koje srednje ivično polje. Tada, ako drugi igrač posle toga upiše bilo koji broj x u neko od polja koja se ne nalaze u istom redu, ni u istom stupcu sa tim poljem (jer bi inače odmah izgubio igru), prvi igrač treba da upiše broj $10-x$ u polje koje leži simetrično sa tim poljem prema centru kvadrata. Tako posle toga sigurno dobija igru.

4. Prvi igrač može da obezbedi sebi pobedu ako postupi na sledeći način. — Prilikom svog prvog poteza uzima 2 šibice. Posle toga, kadgod vidi da je njegov protivnik sakupio paran broj šibica, uzima sam toliko šibica da njegovom protivniku ostane 19, 13 ili 7 šibica; a ako se kod njegovog protivnika nađe neparan broj šibica, on mu ostavlja 23, 17, 11 ili 5 šibica, odnosno, ako se to pokaže nemogućim, onda 24, 18, 12 ili 6 šibica.

Dokaz da je ovo tačno komplikovan je. Da bi se došlo do njega, treba početi s tim što će se ispitati do čega može doći ako pred kraj igre ostanu 5, odnosno 6, odnosno 7 šibica. Zatim treba ispitati kako može da dođe do prvog, drugog ili trećeg od ovih slučajeva, itd.

5. U ovoj igri može uvek da pobedi prvi igrač, ako svoj prvi žeton stavi na centralni kružić 5. Jer posle toga, ako drugi igrač stavi svoj žeton na jedan od ugaonih kružića (npr. 1), on treba samo da stavi svoj drugi žeton na jedan od dva srednja ivična kružića koji nisu susedni kružiću na kome se nalazi prvi žeton drugog igrača (u navedenom slučaju kružić 6 ili 8), pa da posle toga, sem ako sam načini neki očigledno pogrešan potez, postigne pobedu; a ako drugi igrač stavi svoj prvi žeton na neko središnje ivično polje (npr. 2), onda prvi igrač treba da stavi svoj drugi žeton na jedno od dva ugaona polja koja nisu susedna polju na kome se nalazi prvi žeton drugog igrača (u nadedenom slučaju kružić 7 ili 9), pa da se nađe u situaciji koja je slična prethodnoj.

6. Treba razmotriti, redom, kako igra može da se razvija ako prvi igrač stavi prvi put svoj znak a) u centralno polje; b) u jedno ugaono polje; c) u jedno srednje ivično polje. Tako, na primer, ako prvi igrač stavi najpre svoj znak u centralno polje, drugi igrač može da stavi svoj znak ili u neko ugaono polje, ili u neko srednje ivično polje; itd. Tako se dolazi do zaključka:

Prvi igrač može staviti svoj znak u koje bili polje. Pri tome, ako je on stavio svoj znak u centralno polje, drugi igvač treba da stavi svoj znak u neko ugaono polje; a ako prvi igrač nije stavio svoj znak u centralno polje, drugi igrač treba da stavi svoj znak u to polje. I tada za oba igrača postoji mogućnost da, ako ne greše, obezbede sebi nerešen rezultat.

7. Može da pobedi prvi igrač ako pomera žeton uvek tako da ga dovodi na crno polje u parnom redu i parnom stupcu šahovske table, što je za njega izvodljivo.

8. Da bi se dokazalo da se ova igra ne može završiti nerešeno, treba poći od koga bilo temena tzv. „potpunog grafa" ove igre, tj. od šestougla čije su sve stranice i dijagonale već nacrtane. Kako iz tog temena polaze 5 duži, bar 3 od njih moraju biti iste boje, recimo plave. Ako je pri tom makar jedna od duži koje spajaju krajeve ovih triju duži plava, ona bi sa dvema od tih duži zatvarala „trobojni trougao"; a ako ni jedna od njih ne bi bila plava, onda bi one same ograničavale jedan „trobojni trougao". Prema tome, na potpunom grafu ove igre postoji bar jedan trougao čije su sve ivice iste boje, što znači da se jednom od igrača mora dogoditi da prvi zatvori takav trougao i da, usled toga, izgubi igru.

Što se tiče drugog pitanja, na njega je odgovor bio dobijen tek pomoću upotrebe kompjutera.

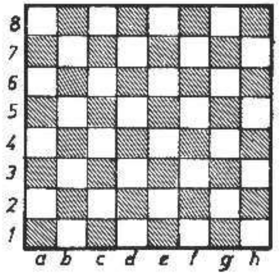
9. Da bi se u potpunosti utvrdilo kako treba da se kreću ovce, trebalo bi proučiti sve situacije u koje mogu doći vuk i ovce. To nije jednostavno, no, u svakom slučaju, može se poći od sledećeg: ako ovce uspeju da postepeno zauzmu sva četiri

crna polja u drugom, trećem, itd. redu i da pri tome potiskuju vuka stalno unazad, on će se, naposletku, naći u osmom redu i tada više neće imati kuda. Njemu se to, da bude opkoljen ovcama, može dogoditi i pre toga, ali u ovom slučaju će sigurno izgubiti.

Prema tome, treba videti šta treba ovce da čine, pa da postepeno napreduju, a da vuk njihov „front" ne probije.

U mnogo slučajeva to nije teško uočiti. Međutim, ovde ćemo ukazati na jedan slučaj u kome ovce mogu lako da pogreše.

Ako se vuk na početku igre postavi na polje $3a$, ili na polje $3g$, onda pomeranjem ovce sa $1a$ na $2b$, odnosno sa $1e$ na $2f$ vuk će biti onemogućen da ostale ovce ometa u njihovom napredovanju; isto tako, ako se vuk postavi na polje $3e$, posle pomeranja ovce sa $1c$ na $2d$, vuk će biti onemogućen da išta učini. Ali ako se vuk postavi na polje $3c$ — onda na prvi pogled može izgledati da on čak u svakom slučaj može da pobedi.



Sl. 4

I, zaista, ako se u ovom slučaju ovce počnu pomerati onako kao što, s obzirom na raspored crnih polja, izgleda najprirodnije, tj. napred i desno, pokazaće se da će se vuk moći probiti između njih, pa ma po kom redu da se izvrši pomeranje ovaca. No, ako se najpre izvrši pomeranje ovce sa $1g$ na $2f$, onda vuk može — sem ako se reši da sasvim beskorisno pođe odmah unazad — da se pomeri ili sa $3c$ na $2b$, ili sa $3c$ na $2d$. A u ovim slučajevima — ako ovce ne učine ni jedan pogrešan potez — vuk ih neće moći sprečiti da sve one pređu u treći red!

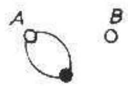
10. Ova se igra sove „rasad" zato što nacrtani kružići liče na rasad iz koga polaze izdanci. Nju je lako matematički analizirati ako se pođe samo jednog ili dva kružića. Tako, u prvom slučaju, prvi igrač može samo da nacrta petlju, a drugi igrač da završi igru time što će spojiti dati kružić A sa kružićem 1 koji je nacrtao prvi igrač (sl. 5 i 6). U ovom slučaju bezuslovno gubi igru prvi igrač.

Sl. 5

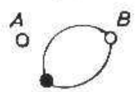
Sl. 6

Sl. 7

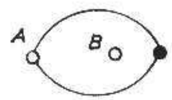
Sl. 8



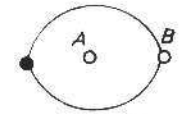
Sl. 9



Sl. 10



Sl. 11



Sl. 12

Ako se pak pođe od dva data kružića, onda prvi igrač može svoj prvi potez da povuče na 5 načina (sl. 8 — 12), od kojih su, međutim, samo 2 suštinski različita. Posle toga, ako se razmotre sve moguće varijante daljeg toka igre, lako se utvrđuje da u ovom slučaju za drugog igrača postoji mogućnost da svakako pobedi.

S povećanjem broja datih kružića matematička analiza ove igre postaje sve složenija. Ipak, utvrđeno je da, ako su dati 3, 4 i 5 kružića, prvi igrač uvek može da dobije igru. A za ukupan broj poteza do kraja igre, ako su dati n kružića, utvrđeno je sledeće: igra se ne može završiti bez $2n$ poteza, a mora se završiti najkasnije sa $(3n-1)$-tim potezom igrača.