Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram sažetak predavanja
"Metoda pomoćnih likova u planimetrijskim zadacima"
i objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

Luka Čeliković

Metoda pomoćnih likova u planimetrijskim zadacima

Pri rješavanju planimetrijskih zadaća ponekad nam se čini da je zadaća neodređena, tj. da je broj zadanih elemenata nedostatan za rješavanje te zadaće. Nadopunjavanjem slike (skice) novim elementima (dužinama, trokutima, četverokutima i sl.) put rješavanja zadaće može postati jasniji.

U ovom izlaganju govorit ćemo o nadopunama slike samo s nekim (pomoćnim) geometrijskim likovima (jednakokračan trokut, jednakostraničan trokut, pravokutan trokut s kutovima $30°$ i $60°$, pravokutan trokut s kutovima $15°$ i $75°$, kvadrat, trapez).

Ovu metodu zovemo metoda pomoćnih likova u planimetrijskim zadaćama.

Pokažimo to na sljedećem primjeru.

Primjer . Unutar kvadrata $ABCD$ dana je točka P takva da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle ABP = 15°$. Dokazati da je trokut PCD jednakostraničan.

Rješenje.

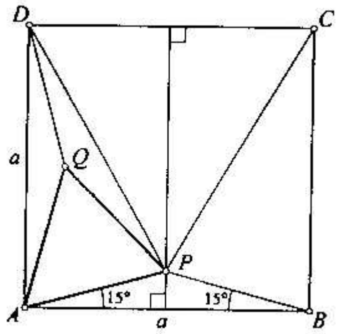
1. Metoda pomoćnih likova u planimetrijskim zadaćama

1.1. Pomoćni lik je jednakostraničan trokut

Neka su ispunjeni uvjeti zadatka. Tada je trokut $\triangle ABP$ jednakokračan, pa je i trokut $\triangle CDP$ jednakokračan (zašto?), tj. $|PD| = |PC|$.

Neka je Q točka unutar kvadrata $ABCD$ takva da je trokut $\triangle APQ$ jednakostraničan. Tada je $\sphericalangle QAD = 90° - (60° + 15°) = 15°$, pa su trokuti $\triangle DAQ$ i $\triangle ABP$ sukladni ($|DA| = |AB| = a$, $|AQ| = |AP|$ i

$\sphericalangle DAQ = \sphericalangle ABP = 15°$), te je i trokut DAQ jednakokračan, tj. $|DQ| = |AQ|$ i $\sphericalangle AQD = 180° - 2 \cdot 15° = 150°$.



Kako je (zbog jednakostraničnosti trokuta $\triangle APQ$) i $|AQ| = |PQ|$, tada je i $|DQ| = |PQ|$, tj. trokut $\triangle PDQ$ je jednakokračan. Pošto je $\sphericalangle PQD = 360° - (60° + 150°) = 150° = \sphericalangle AQD$, tada su trokuti $\triangle PDQ$ i $\triangle DAQ$ sukladni, pa je $|PD| = |DA| = a = |DC|$.

Iz jednakokračnosti trokuta $\triangle CDP$ i iz $|PD| = |DC|$ slijedi jednakostraničnost trokuta $\triangle CDP$.

1.2. Pomoćni lik je pravokutan trokut s kutovima 30° i 60°

Dokažimo prvo pomoćnu lemu.

Lema 1. Neka je trokut $\triangle ABC$ pravokutan s kutovima $\alpha = \sphericalangle CAB = 30°$, $\beta = \sphericalangle ABC = 60°$, $\gamma = \sphericalangle BCA = 90°$ i neka su duljine stranica $|BC| = a$, $|CA| = b$ i $|AB| = c$. Tada vrijedi

$$a = \frac{1}{2}c, \quad \text{tj.} \quad c = 2a$$

(hipotenuza trokuta je dva puta dulja od katete nasuprot kutu od 30°) i

$$b = \frac{c\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tj.} \quad b = a\sqrt{3}$$

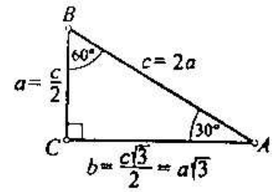
(kateta nasuprot kutu od 60° je $\sqrt{3}$ puta dulja od katete nasuprot kutu od 30°).

Vrijedi i obrnuto, tj. ako u trokutu ABC vrijedi

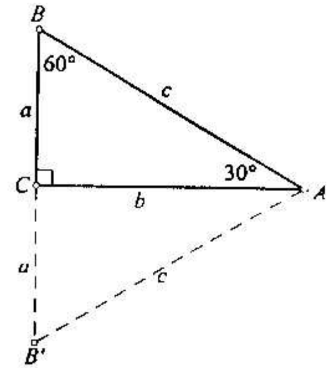
$$a = \frac{1}{2}c \ (c = 2a) \quad \text{i} \quad b = \frac{c\sqrt{3}}{2} \ (b = a\sqrt{3}),$$

tada je to pravokutan trokut s kutovima

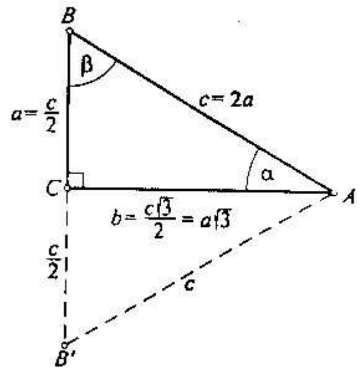
$$\alpha = 30°, \quad \beta = 60° \quad \text{i} \quad \gamma = 90°.$$



Dokaz leme.



Neka je ABC pravokutan trokut s kutovima $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ i $\gamma = 90°$ i neka je B' točka simetrična točki B u odnosu na pravac CA kao os simetrije. Tada je $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$ (zašto?), pa je $\triangle ABB'$ jednakostraničan trokut. Otuda slijede tvrdnje leme.

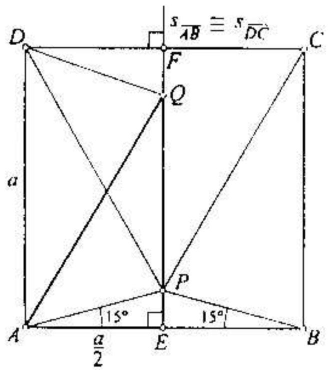


Dokažimo sada obrnutu tvrdnju. Neka u trokutu $\triangle ABC$ vrijedi $a = \frac{c}{2}$ $(c - 2a)$ i $b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ $(b = a\sqrt{3})$. Zbog $a^2 + b^2 = c^2$ trokut $\triangle ABC$ je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka je nadalje točka B' simetrična točki B u odnosu na pravac CA kao os simetrije. Tada je $|CB'| = \frac{c}{2}$ (tj. $|BB'| = c$) i $|B'A| = c$, pa je trokut $\triangle ABB'$ jednakostraničan. Stoga je $\sphericalangle ABB' = 60^\circ$, tj. $\sphericalangle ABC = \beta = 60^\circ$, zbog čega je $\sphericalangle CAB = \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Time je lema dokazana.

Riješimo sada primjer.

1.2.1. Prvi način

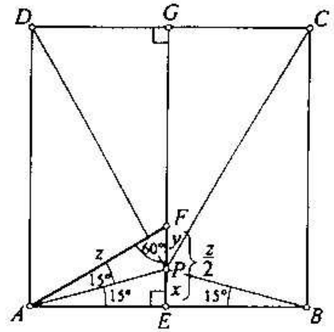


Neka su ispunjeni uvjeti zadatka. Tada je točka P na simetrali stranica $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$ i trokut $\triangle PCD$ je jednakokračan.

Neka je točka $Q \in \overline{EF}$ tako da je $\sphericalangle EAQ = 60^\circ$ (tj. $\sphericalangle PAQ = 45^\circ$). Tada je trokut $\triangle AQE$ pravokutan trokut s kutovima $\sphericalangle EQA = 30^\circ$ i $\sphericalangle QAE = 60^\circ$, pa po Lemi 1. vrijedi $|AQ| = 2|AE| = 2 \cdot \frac{a}{2} = a = |AD|$. Dakle, trokut $\triangle DQA$ je jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle QDA = \sphericalangle DQA = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DAQ) = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$, tj. $\sphericalangle QDF = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Iz sukladnosti trokuta $\triangle QDF$ i $\triangle PAE$ ($|DF| = |AE| = \frac{a}{2}$, $\sphericalangle DFQ = \sphericalangle AEP = 90^\circ$, $\sphericalangle QDF = \sphericalangle PAE = 15^\circ$) slijedi $|FQ| = |EP|$, pa je $|FP| = |EQ|$. Iz sukladnosti trokuta $\triangle PDF$ i $\triangle QAE$ ($|DF| = |AE| = \frac{a}{2}$, $|FP| = |EQ|$, $\sphericalangle DFP = \sphericalangle AEQ = 90^\circ$) slijedi $|PD| = |QA| = a$, pa na osnovu jednakokračnosti trokuta $\triangle PCD$ slijedi da je taj trokut jednakostraničan.

1.2.2. Drugi način



Neka je F točka simetrale PE (PG) stranice $\overline{AB}$ ($\overline{CD}$), takva da je $\sphericalangle EAF = 30^\circ$. Uz oznake $|PE| = x$, $|PF| = y$, $|AF| = z$ slijedi $|EF| = x + y = \frac{z}{2}$ i $\frac{a}{2} = \frac{z\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle FAE$), tj. $z = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ i $x + y = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Budući da je AP simetrala kuta $\sphericalangle EAF$, tada je $x : y = \frac{a}{2} : z = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{3} = 3 : 2\sqrt{3}$, tj. $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$. Iz $x + y = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ i $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ slijedi $x = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Stoga je $|PG| = a - x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pa zbog $|DG| = \frac{a}{2}$ slijedi $|PD| = a$.

Dakle, trokut $\triangle PCD$ je jednakostraničan.

1.3. Pomoćni lik je pravokutan trokut s kutovima 15° i 75°

Dokažimo prvo pomoćnu lemu.

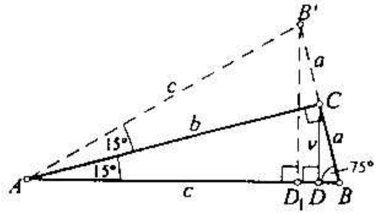
Lema 2. Neka je trokut $\triangle ABC$ pravokutan s kutovima $\alpha = \sphericalangle CAB = 15^\circ$, $\beta = \sphericalangle ABC = 75^\circ$ i $\gamma = \sphericalangle BCA = 90^\circ$ i neka je $c = |AB|$ duljina hipotenuze $\overline{AB}$, a $v = |CD|$ duljina visine $\overline{CD}$ na tu hipotenuzu. Tada vrijedi

$$v = \frac{c}{4}, \quad \text{tj.} \quad c = 4v$$

(hipotenuza pravokutnog trokuta četiri puta je dulja od svoje visine).

Vrijedi i obrnuto, tj. ako u pravokutnom trokutu ABC vrijedi $v = \frac{c}{4}$ ($c = 4v$), tada su njegovi kutovi $\alpha = 15°$ i $\beta = 75°$.

Dokaz leme.



Neka je $\overline{CD}$ visina na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC i neka je $\sphericalangle BAC = 15°$ i $\sphericalangle ABC = 75°$. Neka je nadalje B' simetrična točki B u odnosu na pravac AC kao os simetrije i točka $D_1 \in \overline{AB}$ tako da je $\overline{B'D_1} \perp \overline{AB}$. Tada je $\triangle BB'A$ jednakokračan trokut, tj. vrijedi

$$|AB'| = |AB|. \qquad (*)$$

Kako je $\triangle B'AD_1$ pravokutan trokut s kutovima $2\alpha = \sphericalangle D_1AB' = 30°$ i $\sphericalangle D_1B'A = 60°$, tada je po Lemi 1. $|B'D_1| = \frac{1}{2}|AB'| \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}|AB|$, tj.

$$|B'D_1| = \frac{1}{2}|AB|. \qquad (**)$$

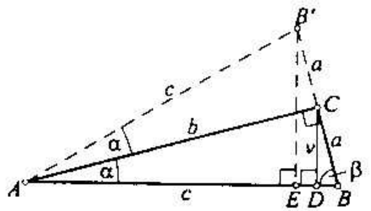
Pošto je

$$|CD| = \frac{1}{2}|B'D_1| \qquad (***)$$

(zašto?), tada iz $(**)$ i $(***)$ slijedi $|CD| = \frac{1}{4}|AB|$, tj.

$$v = \frac{1}{4}c, \quad c = 4v. \qquad (****)$$

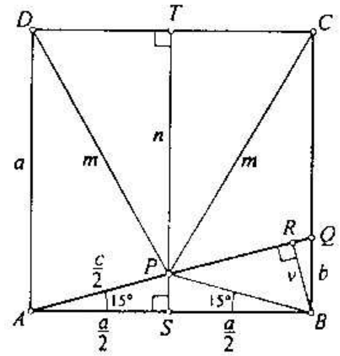
Dokažimo sada obrnutu tvrdnju.



Dokažimo sada obrnutu tvrdnju. Neka u pravokutnom trokutu ABC vrijedi $(****)$ i neka je točka B' simetrična točki B u odnosu na pravac AC kao os simetrije, te $E \in \overline{AB}$, $\overline{B'E} \perp \overline{AB}$. Tada je $|B'E| = 2v$ (zašto?) $\overset{(****)}{=} \frac{c}{2}$, pa je po Lemi 1. $2\alpha = \sphericalangle EAB' = 30°$, tj. $\alpha = \sphericalangle BAC = 15°$, odakle je $\beta = \sphericalangle ABC = 75°$.

Time je lema dokazana.

Riješimo sada primjer.



Neka je $ABCD$ dani kvadrat i P točka unutar tog kvadrata za koju vrijedi $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ABP = 15°$. Neka nadalje pravac AP siječe stranicu $\overline{BC}$ kvadrata u točki Q, te R, S, T točke za koje vrijedi: $R \in \overline{AQ}$, $\overline{BR} \perp \overline{AQ}$, $S \in \overline{AB}$, $\overline{PS} \perp \overline{AB}$, $T \in \overline{DC}$, $\overline{PT} \perp \overline{DC}$. Uvedemo li oznake: $|AB| = a$, $|BQ| = b$, $|AQ| = c$, $|BR| = v$, $|PC| = m$, $|PT| = n$, imat ćemo $|PS| = \frac{1}{2}b$, $|PT| = a - \frac{1}{2}b$, $\frac{ab}{2} = P_{\triangle ABQ} = \frac{cv}{2} \overset{L2}{=} \frac{4v \cdot v}{2} = 2v^2$, tj.

$$ab = 4v^2. \qquad (*)$$

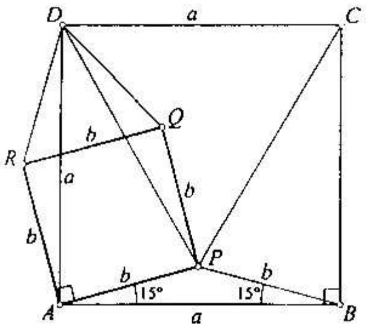
Prema Pitagorinom poučku je $a^2 + b^2 = c^2$, a po Lemi 2. $c = 4v$, pa je

$$a^2 + b^2 = 16v^2. \qquad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi redom $a^2 + b^2 = 4ab$, $b^2 - 4ab + a^2 = 0$, $(b-2a)^2 - (a\sqrt{3})^2 = 0$, $(b - 2a - a\sqrt{3})(b - 2a + a\sqrt{3}) = 0$, $b - 2a + a\sqrt{3} = 0$ (zbog $b - 2a - a\sqrt{3} < 0$), $b = a(2 - \sqrt{3})$.

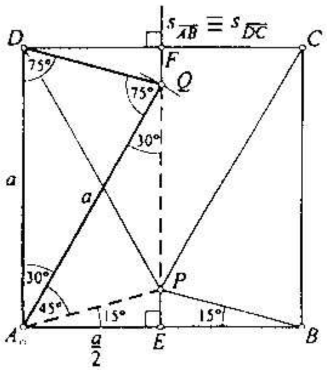
Odatle je $n = a - \frac{b}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $m = \sqrt{n^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a$, pa je trokut $\triangle PCD$ jednakostraničan.

1.4. Pomoćni lik je kvadrat



Neka su ispunjeni uvjeti zadatka. Tada je $\triangle CDP$ jednakokračan trokut. Nad dužinom $\overline{AP}$ konstruirajmo kvadrat $APQR$ Tada su trokuti $\triangle ADR$ i $\triangle ABP$ sukladni ($|AD| = |AB| = a$, $|AR| = |AP| = b$, $\measuredangle DAR = \measuredangle BAP = 15^\circ$ (kutovi s okomitim kracima)), pa je $|DR| = |AR| = b$, $\measuredangle RDA = \measuredangle RAD = 15^\circ$ i $\measuredangle ARD = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$. Stoga je $\measuredangle QRD = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$, pa je (zbog $|QR| = |RD| = b$) $\triangle RQD$ jednakostraničan trokut, tj. $\measuredangle RQD = 60^\circ$ i $|DQ| = |PQ| = b$, pa je $\measuredangle PQD = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Dalje slijedi da su i trokuti $\triangle DPQ$ i $\triangle ADR$ sukladni ($|PQ| = |AR| = b$, $|DQ| = |DR| = b$, $\measuredangle PQD = \measuredangle DRA = 150^\circ$), pa je $|DP| = |AD| = a$, zbog čega je $\triangle CDP$ jednakostraničan trokut.

1.5. Pomoćni lik je jednakokračan trokut (jednakokračan trapez)

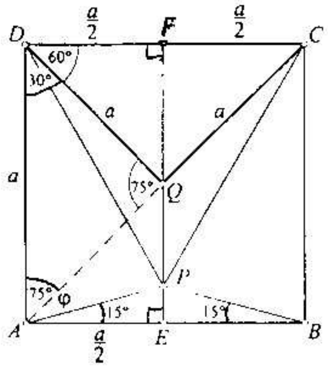


Neka su ispunjeni uvjeti zadatka. Neka je Q točka na simetrali EF stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ kvadrata, takva da je $|AQ| = |AD| = a$. Tada je trokut $\triangle AQD$

jednakokračan. Budući da je u pravokutnome trokutu $\triangle QAD$ $|AE| = \frac{a}{2} = \frac{|AQ|}{2}$, mora biti $\measuredangle AQE = 30^\circ$, tj. $\measuredangle QAE = 60^\circ$. Stoga je $\measuredangle QAD = 30^\circ$, pa je u jednakokračnome trokutu $\triangle AQD$ $\measuredangle AQD = \measuredangle ADQ = 75^\circ$. Tada je trapez $DAPQ$ jednakokračan ($\measuredangle QDA = \measuredangle DAP = 75^\circ$), pa su mu dijagonale $\overline{PD}$ i $\overline{AQ}$ jednakih duljina, tj. $|PD| = |AQ| = a$. Analogno izlazi da je i $|PC| = a$, pa je trokut $\triangle PCD$ jednakostraničan.

Napomenimo da se primjer, osim navedenom metodom, može riješiti i na druge načine.

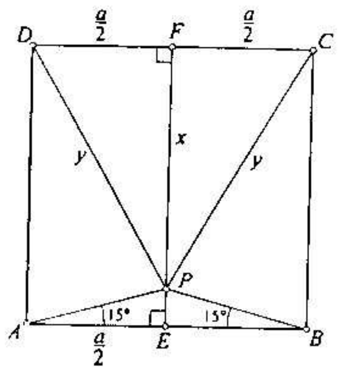
2. Indirektan dokaz



Pretpostavimo (suprotno tvrdnji) da trokut $\triangle PCD$ nije jednakostraničan. (Uočimo da je on svakako jednakokračan.) Neka je Q točka za koju je trokut $\triangle QCD$ jednakostraničan. Neka je $Q \in \overline{PF}$. Tada je $\measuredangle QDA = 30^\circ$, pa iz jednakokračnosti trokuta $\triangle AQD$ ($|AD| = |QD| = a$) slijedi $\measuredangle QAD = 75^\circ$. Sada je $\measuredangle BAD = 15^\circ + \varphi + 75^\circ = 90^\circ + \varphi > 90^\circ$, što je u suprotnosti s činjenicom da je $\measuredangle BAD = 90^\circ$. Analogno bi za $Q \in \overline{EP}$ dobili da je $\measuredangle BAD = 90^\circ$. Dakle, trokut $\triangle PCD$ je jednakostraničan.

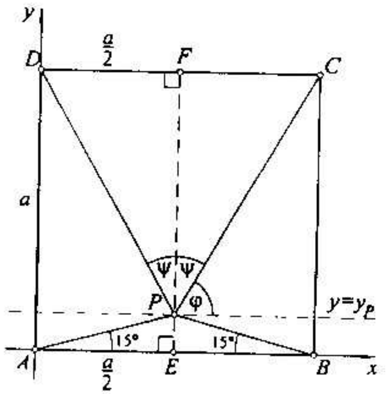
3. Trigonometrijski dokaz

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}.$$



$\triangle PAE$: $a-x=\frac{a}{2}\operatorname{tg}15^\circ \Longrightarrow a-x=\frac{a}{2}(2-\sqrt{3}) \Longrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$;
$\triangle DPF$: $\left(|PF|=x=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ |DF|=\frac{a}{2}\right.$ i $\left.\sphericalangle PFD=90^\circ\right) \Longrightarrow y=a \Longrightarrow$ trokut $\triangle PCD$ je jednakostraničan.

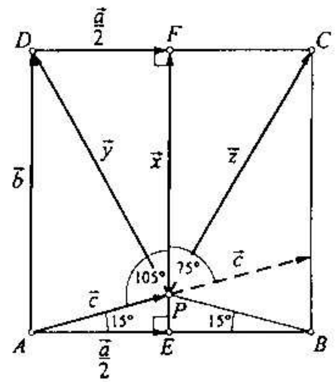
4. Analitički dokaz



Neka je $A=(0,0)$, $B=(a,0)$, $C=(a,a)$ i $D=(0,a)$. Tada je: $AP \equiv y = k_{AP}x \equiv y=\operatorname{tg}15^\circ x \equiv y=(2-\sqrt{3})x$, $EP \equiv x=\frac{a}{2}$, $P = AP\cap EP = \left(\frac{a}{2}, a-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\varphi = k_{PC} = \frac{y_C-y_P}{x_C-x_P} = \frac{a-\left(a-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{a-\frac{a}{2}} =$

$\sqrt{3} \Longrightarrow \varphi=60^\circ \Longrightarrow \psi=30^\circ \Longrightarrow 2\psi=60^\circ$, pa je trokut $\triangle PCD$ jednakostraničan.

5. Vektorski dokaz



$b=a$, $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. Iz $\frac{\vec{a}}{2}\cdot\vec{c} = \frac{a}{2}c\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}ac$ i $\frac{\vec{a}}{2}\cdot\vec{c} = \frac{\vec{a}}{2}\cdot\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}-\vec{x}\right) = \frac{a^2}{4}$ slijedi $\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}ac = \frac{a^2}{4}$, a odatle dobivamo

$$c=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}a. \qquad (*)$$

Iz $\vec{c}\cdot\vec{x} = cx\cos 75^\circ = cx\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ i $\vec{c}\cdot\vec{x} = \left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}-\vec{x}\right)\cdot\vec{x} = ax-x^2$ je $cx\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = ax-x^2 \Longrightarrow x = a-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}c \overset{(*)}{=} \frac{a\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow y=a$, pa je, zbog $z=y=a$, trokut $\triangle PCD$ jednakostraničan.

Zadaci za vježbu

1. U jednakokračnom trokutu $\triangle ABC$ kutovi uz osnovicu su po $40°$. Unutar trokuta dana je točka M takva da je $\measuredangle MAB = 10°$, $\measuredangle MBA = 20°$. Odrediti veličinu kuta $\measuredangle CMB$.

   Rješenje: $\measuredangle CMB = 140°$.

2. Unutar kvadrata $ABCD$ dana je točka P, takva da je $|AP| : |BP| : |CP| = 1 : 2 : 3$. Odrediti $\measuredangle APB$.

   Rješenje: $\measuredangle APB = 135°$.

3. Unutar kvadrata dana je točka P. Iz vrha A spuštena je okomica na $\overline{BP}$, iz B na $\overline{CP}$, iz C na $\overline{DP}$, a iz D okomica na $\overline{AP}$. Dokazati da se sve četiri okomice sijeku u jednoj točki.

4. Koliko iznosi duljina d_γ simetrale s_γ unutarnjeg kuta γ trokuta $\triangle ABC$ kome su duljine stranica $|BC| = a$, $|CA| = b$, a veličina unutarnjeg kuta $\measuredangle BCA = \gamma = 120°$?

   Rješenje: $d_\gamma = \dfrac{ab}{a+b}$.

5. U jednakokračnom trokutu ABC kut nasuprot osnovici $\overline{AB}$ je $\measuredangle BCA = 106°$. Na osnovici je dana točka D takva da je $\measuredangle CAD = 21°$. Dokazati da je $|AB| > 2|CD|$.

6. Unutar jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ dana je točka P takva da vrijedi $|CP|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$. Dokazati da je $\measuredangle APB = 150°$.

7. Konstruirati kvadrat kojemu je zadan zbroj $a + d$ duljina a stranice i d dijagonale.

Literatura

[1] A. Marić: *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1996.

[2] M. Bombardelli, I. Brnetić, Ž. Hanjš: *Matematička natjecanja 1998./99. (Elemantarna matematika 12)*, Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 2000.

[3] V. Stošić: *Matematička natjecanja učenika osnovnih škola (Mala matematička biblioteka 4)*, Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 1994.

[4] A. Dujella, M. Bombardelli, S. Slijepčević: *Matematička natjecanja učenika srednjih škola (Mala matematička biblioteka 7)*, Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 1996.

[5] Časopis Matematičko-fizički list, br. 2/202, Hrvatsko matematičko društvo i Hrvatsko fizikalno društvo, Zagreb, 2000.-2001.

[6] Z. Kurnik: *Analiza*, Časopis Matematika i škola, br. 2, Element, Zagreb, 1999.

[7] L. Čeliković, M. Šarić: *Metoda pomoćnih likova u planimetrijskim zadaćama*, Materijali za mlade matematičare, Sv. 26, DMM "Pitagora" Beli Manastir, Beli Manastir, 1990.

[8] M. Šarić: *Metod pomoćnih figura*, Časopis Tangenta, br. 10, Institut za matematiku, Novi Sad, 1998.

[9] Š. Arslanagić: *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2001.

[10] Časopis Triangle, Serija A, Vol. 5, No 1, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2001.

[11] A. Čižmešija: *Četiri rješenja jednog geometrijskog zadatka*, Časopis Matka, br. 31, HMD, Zagreb, 2000.