Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram sažetak predavanja "Nelinearne diofantske jednadžbe" i objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

Luka Čeliković:

NELINEARNE DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Jednadžbe sa cjelobrojnim koeficijentima, kojima tražimo cjelobrojna rješenja zovu se **diofantske jednadžbe**. Naziv dobivaju po grčkom matematičaru Diofantu (oko 3. st. poslije Krista) koji se prvi počeo baviti tim problemom.

U slijedećem izlaganju bit će govora o nelinearnim diofantskim jednadžbama. Rješavat ćemo neke jednostavnije primjere takvih jednadžbi primjenom ovih metoda razlikovanja slučajeva:

- metode rastavljanja polinoma na čimbenike $f(x,y)\cdot g(x,y)=ab,\ a,b\in Z$,
- metode dijeljenja polinoma (osnovnog teorema o dijeljenju $\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$,
- metode zbroja potencija s parnim eksponentima $(f(x,y))^{2m}+(g(x,y))^{2n}=a+b,\ m,n\in N,\ a,b\in N_0$,
- metode posljednje znamenke,
- metode kongruencije (ostatka dijeljenja),
- metode nejednakosti.

Riješimo sada slijedeće nelinearne diofantske jednadžbe.

a) Metoda rastavljanja polinoma na čimbenike.

Primjer 1. $xy+x-3y-6=0,\ x,y\in Z$.

Rješenje:

$xy+x-3y-6=0 \Rightarrow (xy+x)+(-3y-3)-3=0 \Rightarrow x(y+1)-3(y+1)=3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-3)(y+1)=3=1\cdot 3=-1\cdot(-3)=3\cdot 1=-3\cdot(-1)$,

$x-3$	1	-1	3	-3
$y+1$	3	-3	1	-1
$x=(x-3)+3$	4	2	6	0
$y=(y+1)-1$	2	-4	0	-2

$(x,y)\in\{(0,-2),(2,-4),(4,2),(6,0)\}$.

Primjer 2. $x^2-1994=y^2,\ x,y\in Z$.

Rješenje:

$x^2-1994=y^2 \Rightarrow x^2-y^2=1994 \Rightarrow (x-y)(x+y)=1994=1\cdot 1994=-1\cdot(-1994)=$
$=1994\cdot 1=-1994\cdot(-1)=2\cdot 997=-2\cdot(-997)=997\cdot 2=-997\cdot(-2)$,

$A=x-y$	1	-1	-1994	2	-2	997	-997
$B=x+y$	1994	-1994	-1	997	-997	2	-2
$x=(A+B)/2$	-	-	-	-	-	-	-
$y=(B-A)/2$	-	-	-	-	-	-	-

Zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Primjer 3. $x^4+2x^7y-x^{14}-y^2=7,\ x,y\in Z.$
Rješenje:
$x^4+2x^7y-x^{14}-y^2=7 \Rightarrow (x^7+x^2-y)(-x^7+x^2-y)=7 = \pm1\cdot(\pm7)=\pm7\cdot(\pm1),$

$A=x^7+x^2-y$	1	-1	7	-7
$B=-x^7+x^2+y$	7	-7	1	-1
$x=\frac{A+B}{2}$	2	-	2	-
$y=-A+x^7+x^2=\frac{B-A}{2}+x^7$	131	-	125	-

$(x,y)\in\{(2,125),(2,131)\}.$

Zadatak 1. $xy+3y^2=11,\ x,y\in Z.$
(Rez.: $(x,y)\in\{(-32,11),(-8,-1),(8,1),(32,-11)\}$).

Zadatak 2. $xy=x+y,\ x,y\in Z.$
(Rez.: $(x,y)\in\{(0,0),(2,2)\}$).

Zadatak 3. $2x^2+5xy-12y^2=28,\ x,y\in N.$
(Rez.: $(x,y)=(8,5)$).

b) Metoda dijeljenja polinoma.

Primjer 4. $xy+2y=x,\ x,y\in Z.$
Rješenje:
$xy+2y=x \Rightarrow y(x+2)=x\ /:(x+2)\neq0$ (jer $x=-2$ nije rješenje zadane jednadžbe; provjerite !) $\Rightarrow$
$\Rightarrow y=\frac{x}{x+2}=\frac{(x+2)-2}{x+2}=1-\frac{2}{x+2},$
$y\in Z \Rightarrow \frac{2}{x+2}\in Z \Rightarrow (x+2)|2 \Rightarrow x+2\in\{1,-1,2,-2\} \Rightarrow x\in\{-1,-3,0,-4\}\Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y)\in\{(-1,-1),(-3,3),(0,0),(-4,2)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y)\in\{(-4,2),(-3,3),(-1,-1),(0,0)\}.$

Riješiti primjer rastavljanjem polinoma na čimbenike !

Primjer 5. $x^2-xy+2x-3y-6=0,\ x,y\in Z.$
Rješenje:
$x^2-xy+2x-3y-6=0 \Rightarrow y(x+3)=x^2+2x-6\ /:(x+3)\neq0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y=\frac{x^2+2x-6}{x+3}=x-1-\frac{3}{x+3},$
$y\in Z \Rightarrow \frac{3}{x+3}\in Z = (x+3)|3 \Rightarrow x+3\in\{1,-1,3,-3\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x\in\{-2,-4,0,-6\} \Rightarrow (x,y)\in\{(-2,-6),(-4,-2),(0,-2),(-6,-6)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y)\in\{(-6,-6),(-4,-2),(-2,-6),(0,-2)\}.$

Zadatak 4. Riješiti primjer 1. ovom metodom.

Zadatak 5. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3},\ x,y\in Z.$
(Rez.: $(x,y)\in\{(-6,2),(2,-6),(4,12),(6,6),(12,4)\}$).

c) Metoda zbroja potencija s parnim eksponentima.

Primjer 6. $x^2+y^2=5,\ x,y\in Z.$
Rješenje:
$x^2+y^2=5 = 1+4 = 4+1,$

x^2	1				4			
y^2	4				1			
x	1		-1		2		-2	
y	2	-2	2	-2	1	-1	1	-1

$(x,y)\in\{(-2,-1),(-2,1),(-1,-2),(-1,2),(1,-2),(1,2),(2,-1),(2,1)\}.$

Primjer 7. $x^2+y^2+2x-4y-8=0,\ x,y\in N.$
Rješenje:
$x^2+y^2+2x-4y-8=0 \Rightarrow (x^2+2x)+(y^2-4y)-8=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+1)^2-1^2+(y-2)^2-2^2=8 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=13 =4+9=9+4 \Rightarrow$
$\Rightarrow ((x+1)^2=4 \wedge (y-2)^2=9) \vee ((x+1)^2=9 \wedge (y-2)^2=4) \Rightarrow$
$\Rightarrow ((x+1=\pm2 \wedge y-2=\pm3) \vee (x+1=\pm3 \wedge y-2=\pm2)) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x=1\in N \wedge y=5\in N) \vee (x=2\in N \wedge y=4\in N) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y)=(1,5) \vee (x,y)=(2,4) \Rightarrow (x,y)\in\{(1,5),(2,4)\}.$

Primjer 8. $x^4+y^2-2x-1=0,\ x,y\in Z.$
Rješenje:
$x^4+y^2-2y-1=0 \Rightarrow x^4+(y-1)^2=2 =1+1 \Rightarrow x^4=1 \wedge (y-1)^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2=1 \wedge y-1=\pm1 \Rightarrow x=\pm1 \wedge y=1\pm1 \Rightarrow x\in\{1,-1\} \wedge y\in\{2,0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y)\in\{(-1,0),(-1,2),(1,0),(1,2)\}.$

Zadatak 6. $x^2+y^2-6x+9=0,\ x,y\in N.$
(Rez.: $(x,y)=(3,0)$).

Zadatak 7. $x^2+y^2+2x-4y-8=0,\ x,y\in Z.$
(Rez.: $(x,y)\in\{(-4,0),(-4,4),(-3,-1),(-3,5),(1,-1),(1,5),$
$(2,0),(2,4)\}$).

Zadatak 8. $2x^2+y^2+2xy-2x+1=0,\ x,y\in Z.$
(Rez.: $(x,y)=(1,-1)$).

Zadatak 9. $x^2+y^2+z^2=2(x+1),\ x,y,z\in Z.$
(Rez.: $(x,y,z)\in\{(0,-1,-1),(0,-1,1),(0,1,-1),(0,1,1),$
$(2,-1,-1),(2,-1,1),(2,1,-1),(2,1,1)\}$).

d) Metoda posljednje znamenke.

Primjer 9. $x^2+5y=199519941993,\ x,y\in Z.$
Rješenje:
Kako x^2 završava sa 0,1,4,5,6 ili 9, a $5y$ sa 0 ili 5, tada x^2+5y završava sa 0,1,4,5,6 ili 9, a nikada sa 3, pa zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Primjer 10. $x^4+y^4=1223334444\ldots999999999,\ x,y\in Z.$

Rješenje:
x^2 i y^2 završavaju sa 0,1,4,5,6 ili 9, a x^4 i y^4 sa 0,1,5 ili 6, pa x^4+y^4 ne može završavati sa 9. Stoga zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

<u>Zadatak 10</u>. $x^4+y^4=888\ldots8$ (1994 puta), $x,y\in Z$.
(Rez.: $\emptyset$).

<u>Zadatak 11</u>. $5^x+6^y=123456789$, $x,y\in N_0$.
(Rez.: $\emptyset$).

e) <u>Metoda kongruencije</u>.

<u>Primjer 11</u>. $x^2-4y=1995$, $x,y\in Z$.
Rješenje:
Kako je 1995 neparan broj (pri dijeljenju sa 2 ostatak mu je 1), a $4y$ paran broj (pri dijeljenju sa 2 ostatak mu je 0), tada je i x^2, pa s tim i x neparan broj. Neka je $x=2k-1$ $(k\in Z)$. Tada iz zadane jednadžbe slijedi

$$(2k-1)^2-4y=1995$$
$$4k^2-4k+1-4y=1995$$
$$4(k^2-k-y)=1994.$$

Lijeva strana posljednje jednakosti je djeljiva sa 4, a desna nije, pa zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

<u>Primjer 12</u>. $2x^2=5y^2+7$, $x,y\in Z$.
Rješenje:

$$2x^2=5y^2+7 \quad (*)$$

$2\mid 2x^2 \wedge 2\nmid 7 \Rightarrow 2\nmid 5y^2 \Rightarrow 2\nmid y^2 \Rightarrow 2\nmid y \Rightarrow$ y je neparan broj $\Rightarrow$
$\Rightarrow y=2m+1$ $(m\in Z)$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $2x^2=5(2m+1)^2+7 \Rightarrow 2x^2=20m^2+20m+12$ $/:2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2=2(5m^2+5m+3)$ $(**)$ $\Rightarrow x^2$ je paran broj (jer je desna strana jednakosti $(**)$ parna) $\Rightarrow x$ je paran broj $\Rightarrow x=2n$ $(n\in Z) \Rightarrow$
$\overset{(**)}{\Rightarrow} 4n^2=2(5m^2+5m+3)$ $/:2 \Rightarrow 2n^2-5m(m+1)=3$.
Lijeva strana posljednje jednakosti je parna (jer su $2n^2$ i $m(m+1)$ parni brojevi), a desna neparna, pa ova jednadžba, a s tim i polazna $(*)$ nema cjelobrojnih rješenja.

<u>Primjer 13</u>. $x^2-3y=17$, $x,y\in N$.
Rješenje:
$3\mid 3y \wedge 3\nmid 17 \Rightarrow 3\nmid x^2 \Rightarrow 3\nmid x \Rightarrow x=3k\pm1$ $(k\in N_0)$.
Sada zadana jednadžba poprima oblik

$$(3k\pm1)^2-3y=17$$
$$3(3k^2\pm2k-y)=16.$$

Kako je lijeva strana posljednje jednakosti djeljiva sa 3, a desna nije, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

<u>Zadatak 12</u>. Riješiti primjer 2. ovom metodom.

<u>Zadatak 13</u>. $x^2=9y+5$, $x,y\in Z$.
(Rez.: $\emptyset$).

<u>Zadatak 14</u>. $(n^2+n+2)x+2y=1$, $n\in N$, $x,y\in Z$.
(Rez.: $\emptyset$).

f) <u>Metoda nejednakosti</u>.

<u>Primjer 14</u>. $3^x+4^x=5^x$, $x\in Z$.
Rješenje:
Očito je da je $x=2$ jedno rješenje jednadžbe, jer je $3^2+4^2=5^2$ ((3,4,5) je Pitagorina trojka prirodnih brojeva).
Dijeljenjem zadane jednadžbe s 5^x dobivamo

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^x+\left(\tfrac{4}{5}\right)^x=1.$$

Za $x<2$ je $\left(\tfrac{3}{5}\right)^x+\left(\tfrac{4}{5}\right)^x>\left(\tfrac{3}{5}\right)^2+\left(\tfrac{4}{5}\right)^2=1$, a za $x>2$ izlazi $\left(\tfrac{3}{5}\right)^x+\left(\tfrac{4}{5}\right)^x<\left(\tfrac{3}{5}\right)^2+\left(\tfrac{4}{5}\right)^2=1$, pa je $x=2$ jedino rješenje zadane jednadžbe.

<u>Primjer 15</u>. Odredite sve dvoznamenkaste brojeve koji su jednaki zbroju kuba znamenke desetica i kvadrata znamenke jedinica.
Rješenje:
$\overline{xy}=10x+y$ - traženi broj, $x\in\{1,2,\ldots,9\}$, $y\in\{0,1,\ldots,9\}$;
$10x+y=x^3+y^2 \Rightarrow x(10-x^2)=y(y-1)$.
Kako je desna strana posljednje jednakosti nenegativna (zašto ?), tada je to i lijeva strana, tj. $x(10-x^2)\geq 0$, odakle je (zbog $x>0$) i $10-x^2\geq 0$, tj. $x^2\leq 10$, odnosno $x\in\{1,2,3\}$.
Pošto je $y(y-1)$ paran broj (zašto ?), tada je to i $x(10-x^2)$, tj. x je paran broj.
Iz $x\in\{1,2,3\}$ i x je paran broj slijedi $x=2$.
Iz $2\cdot(10-2^2)=y(y-1)$, tj. iz $4\cdot3=y(y-1)$ slijedi $y=4$, pa je traženi dvoznamenkasti broj $\overline{xy}=24$.
Izvršite provjeru !

<u>Primjer 16</u>. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, $x,y,z\in N$.
Rješenje:
Očito je $(x,y,z)=(3,3,3)$ jedno rješenje zadane jednadžbe i $x,y,z\neq1$ (zašto ?).
Neka je $x<y<z$. Tada je $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}>\frac{1}{z}$, pa iz $\frac{3}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1<\frac{3}{x}$ slijedi $x<3$ i $z>3$.
Zbog $x\neq1$ i $x<3$ slijedi $x=2$, pa zadana jednadžba postaje

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Iz $\frac{2}{z}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}<\frac{2}{y}$ slijedi $y<4$ i $z>4$.
Zbog $y>x=2$ i $y<4$ slijedi $y=3$, pa iz $\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ slijedi $z=6$.
Dakle, (2,3,6) je još jedno rješenje dane jednadžbe. Zbog "ravnopravnosti" x,y,z u danoj jednadžbi (tj. promatrajući ostale poretke x,y,z), dolazimo do još 5 rješenja dane jednadžbe.

Rješenja zadane jednadžbe su
$(x,y,z) \in \{(2,3,6),(2,6,3),(3,2,6),(3,3,3),(3,6,2),(6,2,3),$
$(6,3,2)\}$.

<u>Zadatak 15.</u> $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$, $x,y,z \in N$, $x > y > z$.
(Rez.: $(x,y,z) \in \{(15,6,5),(20,10,4),(36,9,4)\}$).