Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram sažetak predavanja
"Primjena radijus-vektora i koordinatne metode u planimetriji"
i objavim na svojim web stranicama.

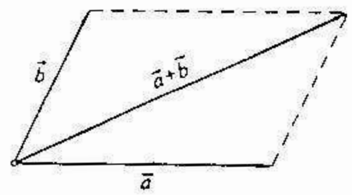
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

Luka Čeliković

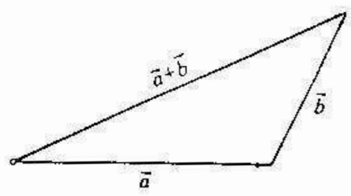
Primjena radijus–vektora i koordinatne metode u planimetriji

Za praćenje ove teme ponovit ćemo prvo neke činjenice o vektorima.

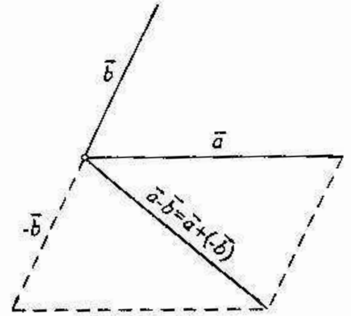
metoda paralelograma zbrajanja vektora



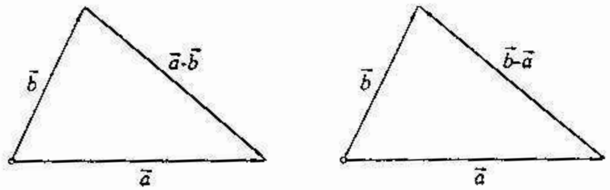
metoda trokuta zbrajanja vektora



metoda paralelograma oduzimanja vektora

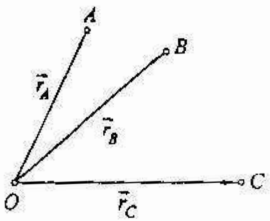


metoda trokuta oduzimanja vektora



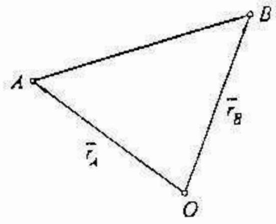
radijus–vektori

(Početak svih radijus–vektora $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_B}$, $\overrightarrow{r_C}$, ... je u ishodištu O.)



Svaki se vektor dade prikazati kao razlika radijus–vektora svoje završne i svoje početne točke.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$$



Neke primjene radijus–vektora u planimetrijskim zadaćama pokazat ćemo u sljedećim primjerima.

Primjer 1. Neka su A, B i C kolinearne točke (pripadaju istome pra[vcu]). Tada vrijedi:

$$\lambda = (ABC) = \frac{AC}{BC} \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \iff \overrightarrow{r_C} = \frac{\overrightarrow{r_A} - \lambda \overrightarrow{r_B}}{1-\lambda}.$$

Rješenje.

$$\lambda = (ABC) = \frac{AC}{BC} \neq 1 \iff \lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \iff \lambda \cdot (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}$$

$$\iff \overrightarrow{r_C}(1-\lambda) = \overrightarrow{r_A} - \lambda \overrightarrow{r_B} \quad / : (1-\lambda) \neq 0 \iff \overrightarrow{r_C} = \frac{\overrightarrow{r_A} - \lambda \overrightarrow{r_B}}{1-\lambda}$$

Primjer 2. Točka O je središte dužine $\overline{AB} \iff \overrightarrow{r_C} = \dfrac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}}{2}$.

Rješenje. Dokaz tvrdnje slijedi iz primjera 1. stavljajući $\lambda = -1$.

Primjer 3. Dokazati da se sve tri težišnice trokuta $\triangle ABC$ sijeku u istoj točki T (u tzv. težištu trokuta) za koju vrijedi

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})!$$

Rješenje. Neka su D, E, F redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ i neka su K, L, M redom točke na težišnicama $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ toga trokuta za koje vrijedi: $(ADK) = -2$, $(BEL) = -2$, $(CFM) = -2$. Tada je

$$\overrightarrow{r_D} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C}}{2},$$

pa je

$$\vec{r_K} = \frac{\vec{r_A} + 2\vec{r_D}}{1+2} = \frac{\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}}{3}.$$

Isti rezultat se dobiva i za $\vec{r_L}$ i $\vec{r_M}$, pa iz $\vec{r_K} = \vec{r_L} = \vec{r_M}$ slijedi $K \equiv L \equiv M$, što znači da se sve tri težišnice trokuta sijeku u istoj točki. Označimo li tu točku $K \equiv L \equiv M$ sa T, izlazi $\vec{r_T} = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C})$.

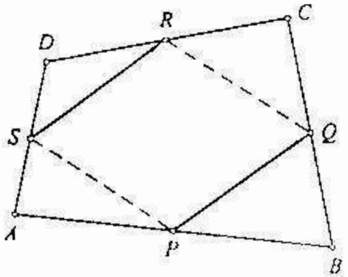
Primjer 4. Neka su $\overrightarrow{AD} = \vec{t_a}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{t_b}$ i $\overrightarrow{CF} = \vec{t_c}$ težišnice trokuta $\triangle ABC$. Dokazati da je $\vec{t_a} + \vec{t_b} + \vec{t_c} = \vec{0}$!

Rješenje.

$$\vec{t_a} + \vec{t_b} + \vec{t_c} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = (\vec{r_D} - \vec{r_A}) + (\vec{r_E} - \vec{r_B}) + (\vec{r_F} - \vec{r_C})$$
$$= \left(\frac{1}{2}(\vec{r_B} + \vec{r_C}) - \vec{r_A}\right) + \left(\frac{1}{2}(\vec{r_C} + \vec{r_A}) - \vec{r_B}\right) + \left(\frac{1}{2}(\vec{r_A} + \vec{r_B}) - \vec{r_C}\right) = \vec{0}.$$

Primjer 5. Točke P, Q, R, S su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ četverokuta $ABCD$. Dokazati da je četverokut $PQRS$ paralelogram!

Rješenje.



Kako iz $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ slijedi da je $PQRS$ paralelogram, dovoljno je pokazati da je $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Imamo

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r_Q} - \vec{r_P} = \frac{1}{2}(\vec{r_B} + \vec{r_C}) - \frac{1}{2}(\vec{r_A} + \vec{r_B}) = \frac{1}{2}(\vec{r_C} - \vec{r_A})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{r_C} + \vec{r_D}) - \frac{1}{2}(\vec{r_D} + \vec{r_A}) = \vec{r_R} - \vec{r_S} = \overrightarrow{SR},$$

tj.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}.$$

Zadatak 1. Neka su D, E, F redom središta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Dokazati da za srednjice trokuta vrijedi:

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CA}\ !$$

Zadatak 2. Neka su E i F redom polovišta krakova $\overline{DA}$ i $\overline{BC}$ trapeza $ABCD$. Tada za srednjicu $\overrightarrow{EF}$ toga trapeza vrijedi

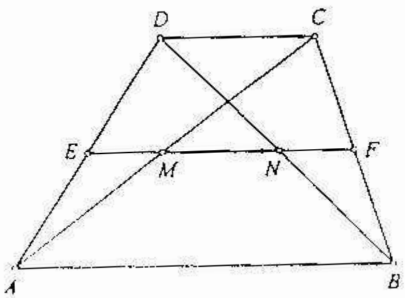
$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

Dokazati!

Primjer 6. Neka srednjica $\overline{EF}$ trapeza $ABCD$ siječe njegove dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ redom u točkama M i N. Dokazati da je

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})!$$

Rješenje.



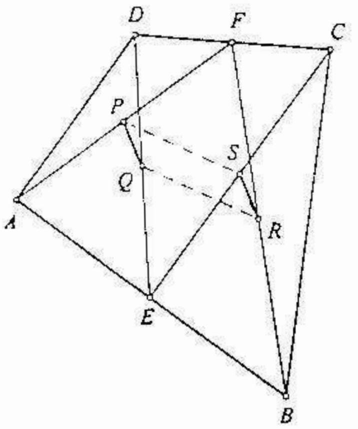
Neka su ispunjeni uvjeti zadatka.

Primjenom sličnosti trokuta ($\triangle AME \sim \triangle ACD$ i $\triangle BFN \sim \triangle BCD$) izlazi da su M i N redom središta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ trapeza $ABCD$. Stoga slijedi

$$\overrightarrow{MN} = \vec{r_N} - \vec{r_M} = \frac{1}{2}(\vec{r_B} + \vec{r_D}) - \frac{1}{2}(\vec{r_A} + \vec{r_C}) = \frac{1}{2}(\vec{r_B} - \vec{r_A}) - \frac{1}{2}(\vec{r_C} - \vec{r_D})$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}).$$

Primjer 7. Točke E i F su redom središta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta $ABCD$, a točke P, Q, R i S su redom središta dužina $\overline{AF}$, $\overline{ED}$, $\overline{BF}$ i $\overline{EC}$. Dokazati da je četverokut $PQRS$ paralelogram!

Rješenje.

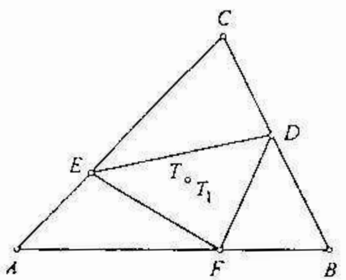


$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{r_Q}-\overrightarrow{r_P}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_E})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_F})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_D}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B})\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D})\right)=\frac{1}{4}(-\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D}).$$

Isti rezultat dobiva se i za $\overrightarrow{SR}$, pa iz $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ slijedi tvrdnja.

Primjer 8. Dane su točke D, E, F redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$, takve da je $(BCD) = (CAE) = (ABF) = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pokazati da trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ imaju zajedničko težište!

Rješenje.



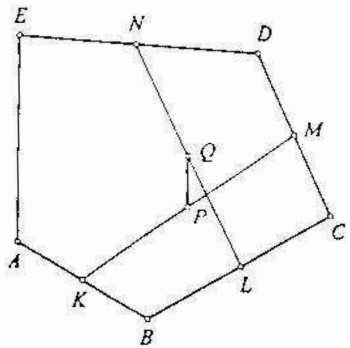
Neka su ispunjeni uvjeti zadatka i neka su T_1 i T redom težišta trokuta $\triangle DEF$ i $\triangle ABC$. Tada po primjeru 3 imamo

$$\overrightarrow{r_{T_1}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F}) = \frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{r_B} - \lambda\overrightarrow{r_C}}{1-\lambda} + \frac{\overrightarrow{r_C} - \lambda\overrightarrow{r_A}}{1-\lambda} + \frac{\overrightarrow{r_A} - \lambda\overrightarrow{r_B}}{1-\lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{3(1-\lambda)}(1-\lambda)(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) = \overrightarrow{r_T}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{r_{T_1}} = \overrightarrow{r_T} \Longrightarrow T_1 \equiv T.$$

Primjer 9. Točke K, L, M, N su redom polovište stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ peterokuta $ABCD$, a P i Q su redom polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$. Dokazati da je $\overline{PQ} \| \overline{AE}$ i $|PQ| = \frac{1}{4}|AE|$!

(Državno natjecanje 1996., I. r. SŠ.)

Rješenje.



Neka su ispunjeni uvjeti zadatka. Tada imamo

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_N}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_M})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E})\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D})\right)$$
$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_A}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE},$$

odakle slijedi tvrdnja.

Zadatak 3. Dani su paralelogrami $ABCD$, $EFGH$ i točke P, Q, R, S redom na dužinama $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, takve da je $(AEP) = (BFQ) = (CGR) = (DHS) = -3$. Dokazati da je $PQRS$ paralelogram!

Daljnju primjenu radijus–vektora u planimetriji imamo u dokazima kolinearnosti točaka, kopunktalnosti pravaca, okomitosti pravaca, u izračunavanju omjera duljina dužina i dr., što je primjerenije srednjoškolcima.

Učenicima osnovne škole primjerenija je koordinatna metoda. U tu svrhu ponovit ćemo neke početne činjenice iz analitičke geometrije.

$$(x_P, y_P) = \left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B)\right)$$

koordinate polovišta $P(x_P, y_P)$ dužine $\overline{AB}$, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$;

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

koeficijent smjera pravca AB, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$;

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

jednadžba pravca AB, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$;

$$y - y_A = k(x - x_A)$$

jednadžba pravca točkom $A(x_A, y_A)$ kome je k koeficijent smjera;

$$k_1 = k_2$$

uvjet paralelnosti pravaca $y = k_1x + l_1$ i $y = k_2x + l_2$;

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

uvjet okomitosti pravaca $y = k_1x + l_1$ i $y = k_2x + l_2$;

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\;|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = 0$$

uvjet kolinearnosti točaka $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$;

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

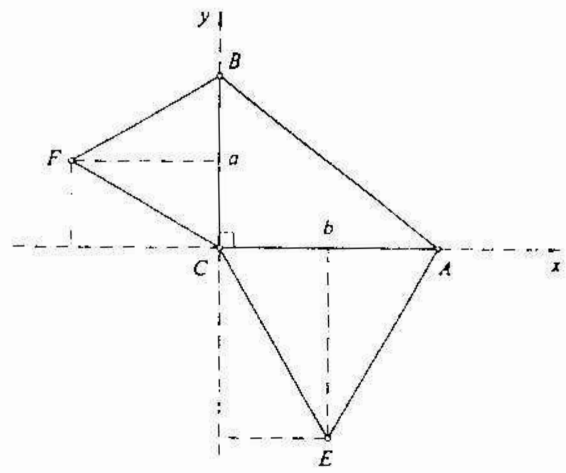
udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$

Zadatak 4. Izrecite tvrdnje u primjerima 1. i 2. pomoću koordinata.

Primjenu koordinatne metode pokazat ćemo u sljedećim primjerima.

Primjer 10. Nad katetama pravokutnoga trokuta $\triangle ABC$ nacrtani su jednakostranični trokuti BCF i CAE. Dokažite da je $CE \perp FB$!

Rješenje.



Odaberimo pravokutni sustav tako da je $C(0,0)$, $A(b,0)$, $B(0,a)$. Tada je $E(b/2, -b\sqrt{3}/2)$, $F(-a\sqrt{3}/2, a/2)$, pa je

$$k_{CE} = \frac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = -\sqrt{3},$$
$$k_{FB} = \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$k_{CE} \cdot k_{FB} = -1,$$
$$CE \perp FB.$$

Primjer 11. U pravokutniku $ABCD$ točka E je nožište okomice iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$. Ako je točka M polovište dužine $\overline{AE}$, a točka N polovište stranice $\overline{CD}$, dokažite da je $\sphericalangle BMN = 90°$!

(Županijsko natjecanje 1999, VIII. r. OŠ.)

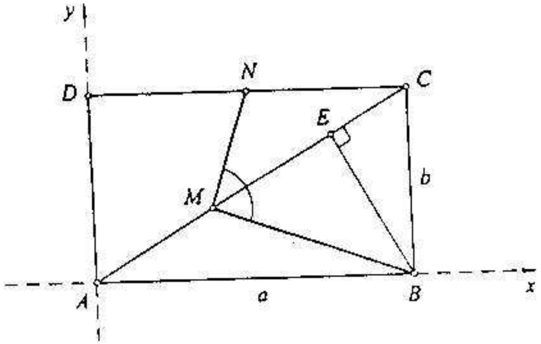
Rješenje. Neka je $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,b)$, $D(0,b)$. Tada je $N(a/2, b)$, pa imamo

$$AC \equiv y = \frac{b}{a}x \implies k_{AC} = \frac{b}{a},$$

$$BE \perp AC \implies k_{BE} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{a}{b} \implies BE \equiv y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b},$$

$$E = BE \cap AC \implies E\left(\frac{a^3}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) \implies M\left(\frac{a^3}{2(a^2+b^2)}, \frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right).$$

$$k_{MN} = \frac{a^2+2b^2}{ab}, \quad k_{MB} = -\frac{ab}{a^2+2b^2}, \quad k_{MN} \cdot k_{MB} = -1, \quad MN \perp MB.$$



Zadatak 5. Ako točka E raspolavlja stranicu $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$, a F dijeli njegovu dijagonalu u omjeru 3:1, računajući od vrha A, tada su pravci AE i BF međusobno okomiti. Dokažite!

Zadatak 6. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$ dane su redom točke E i F, takve da je $|BE| = |BF|$. Neka je $\overline{BN}$ visina trokuta BCE. Dokažite da je trokut BNF pravokutan!

(Državno natjecanje 1998., II. r. SŠ.)

Zadatak 7. Iz polovišta D osnovice $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta $\triangle ABC$ spuštena je okomica $\overline{DE}$ na stranicu $\overline{BC}$. Ako je P polovište dužine $\overline{DE}$, dokažite da je $\overline{AE} \perp \overline{CP}$!

Zadatak 8. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ dane su redom točke M i N, takve da je $|MC| : |MA| = |NC| : |NA| = 2 : 1$. Ako je točka P presjek dužina $\overline{BM}$ i $\overline{CN}$, dokazati da je $\overline{AP} \perp \overline{CP}$!

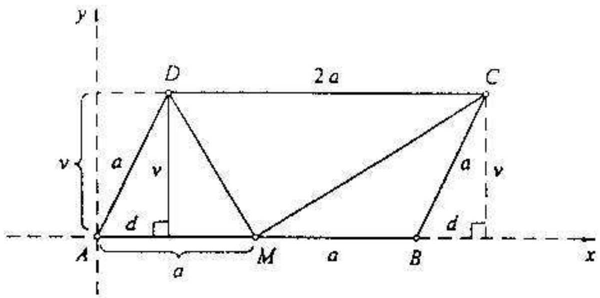
Primjer 12. Dan je paralelogram $ABCD$, pri čemu je $|AB| = 2 \cdot |BC|$. Ako je točka M polovište stranice $\overline{AB}$, onda je $\overline{CM} \perp \overline{DM}$. Dokažite!

(Županijsko natjecanje 1994., VII. r. OŠ.)

Rješenje. Neka je $A(0,0)$, $B(2a,0)$, $C(d+2a, v)$, $D(d,v)$. Tada je $v^2 = a^2 - d^2$ i $M(a,0)$, pa je

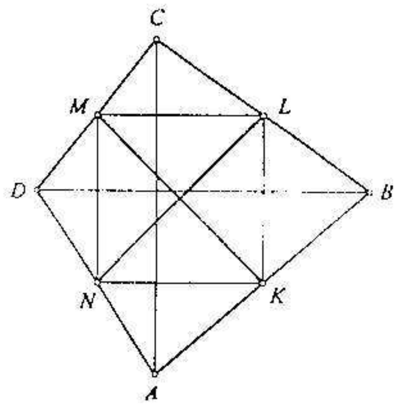
$$k_{MC} = \frac{v}{d+a}, \quad k_{MD} = \frac{v}{d-a},$$

$$k_{MC} \cdot k_{MD} = \frac{v^2}{d^2-a^2} = \frac{v^2}{-v^2} = -1, \quad \overline{MC} \perp \overline{MD}.$$



Primjer 13. Dan je konveksan četverokut $ABCD$ i redom polovišta K, L, M, N njegovih stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Ako je $|KM| = |LN|$, tada je $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Dokažite!

Rješenje.



Iz

$$K\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right),\qquad L\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right),$$
$$M\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2}\right),\qquad N\left(\frac{x_D+x_A}{2},\frac{y_D+y_A}{2}\right)$$

i

$$|KM|^2=|LN|^2,$$

tj.

$$(x_M-x_K)^2+(y_M-y_K)^2=(x_N-x_L)^2+(y_N-y_L)^2$$

slijedi

$$(x_A-x_C)(x_B-x_D)+(y_A-y_C)(y_B-y_D)=0,$$

tj.

$$\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}\cdot\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=-1,\quad K_{AC}\cdot K_{BD}=-1,$$

što znači da je

$$\overline{AC}\perp\overline{BD}.$$

Zadatak 9. Dan je trokut ABC, $|AB|<|AC|$. Ako su M, N, P redom polovišta njegovih stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, a H nožište visine iz vrha A, tada je $PNMH$ jednakokračan trapez. Dokažite!

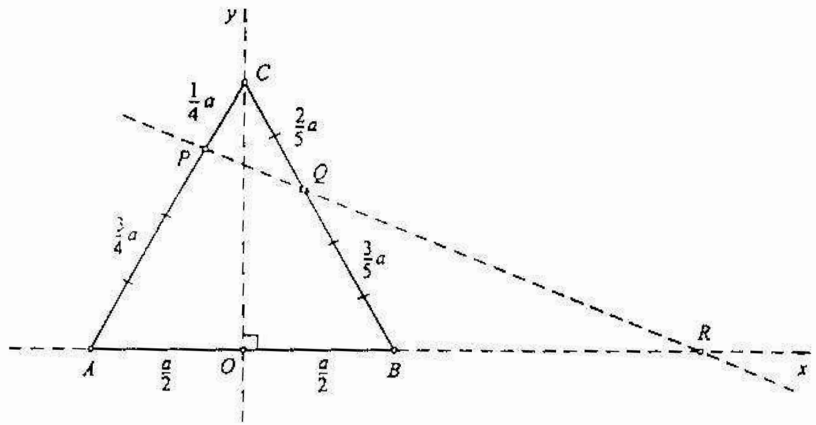
Zadatak 10. Dokažite tvrdnje u primjerima 3., 5., 6., 7. i 9. metodom koordinata.

Primjer 14. Dan je jednakostraničan trokut $\triangle ABC$. Ako je P točka na stranici $\overline{AC}$, takva da je $|AP|=3|PC|$, Q točka na stranici $\overline{BC}$, takva da je $|BQ|:|QC|=3:2$ i točka R na pravcu BC, takva da je B središte dužine $\overline{AR}$, dokažite da su točke P, Q, R kolinearne (leže na istome pravcu). Vrijedi li tvrdnja za bilo koji trokut ABC?

Rješenje. Neka je $A(-a/2,0)$, $B(a/2,0)$. Tada je $C(0,a\sqrt{3}/2)$, $P(-a/8,3a\sqrt{3}/8)$, $Q(a/5,3a\sqrt{3}/10)$, $R(3a/2,0)$

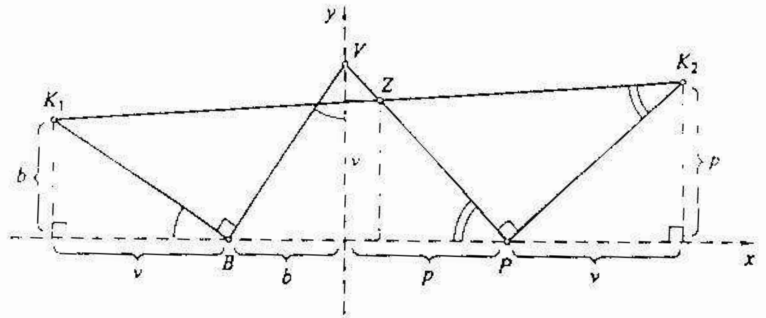
Iz $P_{\triangle PQR}=0$ slijedi kolinearnost točaka P, Q, R.

Tvrdnja zadatka vrijedi za svaki trokut $\triangle ABC$. Dokažite to!



Primjer 15. U "gusarskoj" uvali otoka Tortuga nalaze se vješala V, bor B i palma P. Krenite od vješala prema boru i brojite korake, pa se kod bora okrenite pod pravim kutom na desno i odbrojite isto toliko koraka, te pobodite kolčić K_1. Vratite se k vješalima, krenite od njih prema palmi brojeći korake, pa se kod palme okrenite pod pravim kutom na lijevo, odbrojite isto toliko koraka i pobodite u zemlju kolčić K_2. Blago ćete naći na mjestu Z, koje je točno na pola puta između kolčića K_1 i K_2. Međutim, kada smo došli do "gusarske" uvale, nije bilo vješala. Kako ćemo pronaći blago?

Rješenje.



Neka je $B(-b,0)$, $P(0,p)$, $b<p$, $V(0,v)$. Tada je $K_1=(-b-v,b)$, $K_2=(p+v,p)$, pa je $Z\left(\frac{p-b}{2},\frac{p+b}{2}\right)$, što znači da položaj blaga Z ne ovisi o položaju vješala V.

Literatura

[1] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN: *Elementarna matematika 1.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[2] D. PALMAN: *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[3] D. PALMAN: *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1999

[4] A. MARIĆ: *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1996.

[5] Z. KURNIK, V. VOLENEC: *Matematika 2 — zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[6] N. ELEZOVIĆ, Ž. HANJŠ, S. VAROŠANEC: *Matematička natjecanja 3*, HMD i Element, Zagreb, 1995.

[7] M. BOMBARDELLI, Ž. HANJŠ, S. VAROŠANEC: *Matematička natjecanja 1995./96.*, HMD i Element, Zagreb, 1997.

[8] M. BOMBARDELLI, A. ČIŽMEŠIJA, Ž. HANJŠ: *Matematička natjecanja 1997./98.*, HMD i Element, Zagreb, 1999.

[9] M. BOMBARDELLI, I. BRNETIĆ, Ž. HANJŠ: *Matematička natjecanja 1998./99.*, HMD i Element, Zagreb, 2000.

[10] V. STOŠIĆ: *Matematička natjecanja učenika osnovnih škola*, HMD i Element, Zagreb, 1994.

[11] L. ČELIKOVIĆ: *Vektori*, DMM "Pitagora", B. Manastir, 1990.