Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram sažetak predavanja
"Primjena skalarnog produkta vektora pri dokazivanju nekih nejednakosti i pri rješavanju nekih jednadžbi"
i objavim na svojim web stranicama.

Isprintajte obostrano i presavinite na pola.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

Primjer 8. Riješiti sustav jednadžbi

$$\left.\begin{array}{r} x^2+yz+x=0 \\ xz+yz-x+z-1=0 \\ y^2+xz-x=0 \qquad x,y,z\in\mathbf{R}. \end{array}\right\} \tag{a}$$

Rješenje. Zadani sustav jednadžbi možemo pisati u obliku

$$\left.\begin{array}{r} x(x+1)+yz=0 \\ (x+1)(z-1)+yz=0 \\ x(z-1)+y^2=0. \end{array}\right\} \tag{b}$$

Stavimo li

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=(x,y) \\ \vec{b}=(x+1,z) \\ \vec{c}=(z-1,y), \end{array}\right\} \tag{c}$$

sustav (b) možemo zapisati u obliku

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0 \\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0. \end{array}\right\} \tag{d}$$

Očito je

$$\text{(d)} \iff (\vec{a}=\vec{0}\vee\vec{b}=\vec{0}\vee\vec{c}=\vec{0}). \tag{e}$$

1° $\vec{a}=\vec{0}$; $(x,y)=(0,0) \implies x=y=0$; $\vec{b}=(1,z)$, $\vec{c}=(z-1,0)$; $\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \implies (1,z)\cdot(z-1,0)=0 \implies z-1=0 \implies z=1$

$$(x,y,z)=(0,0,1). \tag{f}$$

2° $\vec{b}=\vec{0}$; $(x+1,z)=(0,0) \implies (x=-1\wedge z=0)$; $\vec{a}=(-1,y)$, $\vec{c}=(-1,y)$; $\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \implies (-1,y)^2=0 \implies 1+y^2=0 \implies \emptyset$.

3° $\vec{c}=\vec{0}$; $(z-1,y)=(0,0) \implies (z=1\wedge y=0)$; $\vec{a}=(x,0)$, $\vec{b}=(x+1,1)$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \implies x(x+1)=0 \implies x\in\{-1,0\}$

$$(x,y,z)\in\{(-1,0,1),(0,0,1)\}. \tag{g}$$

Iz (f) i (g) slijedi

$$(x,y,z)\in\{(-1,0,1),(0,0,1)\}.$$

Luka Čeliković

Primjena skalarnog produkta vektora pri dokazivanju nekih nejednakosti i pri rješavanju nekih jednadžbi

Za vektore $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(a_x,a_y,a_z)$ i $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=(b_x,b_y,b_z)$ definirat ćemo njihov skalarni produkt kao

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}), \tag{1}$$

odnosno

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{2}$$

Pri tome je duljina vektora $\vec{a}$ dana sa

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{3}$$

Zbog $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\in[-1,1]$, iz (1) slijedi

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|, \tag{4}$$

odnosno prema (2) i (3)

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\leqslant\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}. \tag{5}$$

Ako u (4), odnosno (5) vrijedi jednakost, tada je $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=0$, odnosno

$$a_x:b_x=a_y:b_y=a_z:b_z. \tag{6}$$

U sljedećim primjerima pokazat ćemo primjenu relacije (4), odnosno (5) pri dokazivanju nekih nejednakosti, odnosno pri rješavanju nekih jednadžbi i sustava jednadžbi.

Primjer 1. Dokazati nejednakost

$$a^2b(b-c)+b^2c(c-a)+c^2a(a-b)\geqslant 0, \quad a,b,c\in\mathbf{R}^+.$$

Rješenje. Dana nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\leqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Neka je $\vec{a}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ i $\vec{b}=\left(\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{a}\right)$. Tada tvrdnja primjera slijedi iz (5).

Primjer 2. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}<\sqrt{3}, \quad x\in[0,2].$$

Rješenje. Neka je $\vec{a}=(\sqrt{x},1)$ i $\vec{b}=\left(1,\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}\right)$. Tada je prema (5)

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}\leqslant\sqrt{3}. \qquad \text{(a)}$$

Kada bi u (a) vrijedila jednakost, tada bi bilo $\sqrt{x}:1=1:\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$, tj. $x^2-x+1=0$, što nije ispunjeno ni za koji realan broj x.

Pošto u (a) ne vrijedi jednakost, tvrdnja primjera je dokazana.

Primjer 3. Ako za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi $x+y+z=3$, tada vrijedi $\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3}\leqslant 6$. Dokazati!

Rješenje. Neka je $\vec{a}=(\sqrt{x+3},\sqrt{y+3},\sqrt{z+3})$ i $\vec{b}=(1,1,1)$. Tada je prema (5) $\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3}\leqslant\sqrt{x+y+z+9}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=6$, čime je tvrdnja primjera dokazana.

Primjer 4. Dan je trokut ABC i točka M unutar njega. Ako su h_1, h_2, h_3 redom duljine visina na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ tog trokuta, a u, v, w redom udaljenosti točke M do tih stranica, tada vrijedi nejednakost

$$\frac{h_1}{u}+\frac{h_2}{v}+\frac{h_3}{w}\geqslant 9.$$

Dokazati!

Rješenje. Neka je $P_1=P_{\triangle BCM}$, $P_2=P_{\triangle CAM}$, $P_3=P_{\triangle ABM}$, $P=P_{\triangle ABC}$ i neka je $\vec{a}=(\sqrt{P_1},\sqrt{P_2},\sqrt{P_3})$, $\vec{b}=\left(\frac{1}{\sqrt{P_1}},\frac{1}{\sqrt{P_2}},\frac{1}{\sqrt{P_3}}\right)$. Tada je $P_1+P_2+P_3=P$ i $\frac{P}{P_1}=\frac{h_1}{u}$, $\frac{P}{P_2}=\frac{h_2}{v}$, $\frac{P}{P_3}=\frac{h_3}{w}$, pa prema (5) slijedi tvrdnja primjera.

Primjer 5. Dokazati nejednakost

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\leqslant 1, \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}.$$

Rješenje. Neka je $\vec{a}=(\sin\alpha\sin\beta,\cos\alpha\cos\beta)$ i $\vec{b}=(\sin\gamma,\cos\gamma)$. Tada je prema (5) $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta}\cdot\sqrt{\sin^2\gamma+\cos^2\gamma}\leqslant\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}\cdot\sqrt{1}=1$, čime je tvrdnja primjera dokazana.

Primjer 6. Riješiti jednadžbu

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x-2}+2\sqrt{x}, \quad x\in\mathbf{R}. \qquad \text{(a)}$$

Rješenje. Uvjeti:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+3x+2\geqslant 0 \implies x\in\mathbf{R}\setminus\langle -2,-1\rangle \\ x-2\geqslant 0 \implies x\geqslant 2 \\ x\geqslant 0 \end{array}\right\} \implies x\in[2,\infty\rangle. \qquad \text{(b)}$$

Neka je $\vec{a}=(\sqrt{x-2},2)$ i $b=(1,\sqrt{x})$. Tada je prema (5)

$$\sqrt{x-2}+2\sqrt{x}\leqslant\sqrt{x^2+3x+2}. \qquad \text{(c)}$$

Iz (a), (c) i (6) slijedi $\sqrt{x-2}:1=2:\sqrt{x}$, odnosno $x^2-2x-4=0$, pa prema (b) izlazi $x=1+\sqrt{5}$.

Primjer 7. Riješiti jednadžbu

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=x^2-10x+29, \quad x\in\mathbf{R}. \qquad \text{(a)}$$

Rješenje. Uvjeti:

$$(x-1\geqslant 0\land 9-x\geqslant 0) \implies x\in[1,9]. \qquad \text{(b)}$$

Neka je $\vec{a}=(\sqrt{x-1},\sqrt{9-x})$ i $\vec{b}=(1,1)$. Tada iz (5) slijedi

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}\leqslant 4. \qquad \text{(c)}$$

S druge strane je $x^2-10x+29=(x-5)^2+4\geqslant 4$, tj.

$$x^2-10x+29\geqslant 4. \qquad \text{(d)}$$

Iz (a), (c) i (d) sada izlazi $\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=4\land(x-5)^2+4=4$, tj. prema (b) $x=5$ je rješenje dane jednadžbe.