Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram sažetak predavanja
"Rasprava rješenja linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom"
i objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

Luka Čeliković, Osijek

Rasprava rješenja linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom

Riješimo prvo po x, u skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$ ove primjere linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom

Primjer 1 $\frac{x-2}{3} = \frac{x-1}{4} + 1$

Rješenje:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{x-1}{4} + 1 / \cdot 12$$
$$4(x-2) = 3(x-1) + 12$$
$$4x - 8 = 3x - 3 + 12$$
$$4x - 3x = 8 - 3 + 12$$
$$x = 17.$$

Provjera:

$$\frac{17-2}{3} = \frac{17-1}{4} + 1$$
$$\frac{15}{3} = \frac{16}{4} + 1$$
$$5 = 4 + 1.$$
$$5 = 5.$$

Kažemo da je jednadžba moguća (određena) i da ima jedinstveno rješenje $x = 17$.

Primjer 2. $\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}(2-x)$.

Rješenje:

$$\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}(2-x) / \cdot 6$$
$$2x + 2 - 3x = 2 - x$$
$$0 \cdot x = 0$$
$$x \in \mathbf{R}.$$

Izvršite djelomičnu provjeru za neke realne vrijednosti od x. Kažemo da je jednadžba iz primjera 2. neodređena (ima beskonačno mnogo rješenja)

Primjer 3. $x + \frac{1}{2}(x-3) = 2(x+1) - \frac{1}{2}x$.

Rješenje:

$x + \frac{1}{2}(x-3) = 2(x+1) - \frac{1}{2}x / \cdot 2$

$2x + x - 3 = 4x + 4 - x$

$0 \cdot x = 7$, tj. $0 = 7$,

što je u suprotnosti s činjenicom da je $0 \neq 7$.

Uzmite neke realne vrijednosti od x i izvršite djelomičnu provjeru!

Kažemo da je jednadžba iz primjera 3. nemoguća (nema rješenja).

Dakle, jednadžba može biti moguća - određena (ima jedinstveno rješenje), neodređena (ima beskonačno mnogo rješenja) ili nemoguća (nema rješenja).

Riješimo sada ovaj primjer:

Primjer 4. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1}$.

Rješenje: Možemo li primjer rješavati ovako?

$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1} / \cdot (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$x + 1 + x - 1 = 2$

$2x = 2 / : 2$

$x = 1$.

Je li $x = 1$ rješenje zadane jednadžbe? Izvršimo provjeru. $\frac{1}{0} + \ldots$ Koliko je $\frac{1}{0}$?

Iz činjenice da iz $\frac{a}{b} = c$ (tj. $a : b = c$) $\Rightarrow a = bc$ zaključujemo da iz $\frac{1}{0} = y \Rightarrow 1 = 0 \cdot y$, tj. $1 = 0$, što je očito u suprotnosti s činjenicom da je $1 \neq 0$. Kažemo da nije definirano dijeljenje nulom. Stoga svaki od nazivnika mora biti različit od 0. Primijenimo li to na naš primjer, slijede uvjeti $x - 1 \neq 0$ i $x + 1 \neq 0$, tj. $x \neq \pm 1$. Kažemo da za $x = 1$ i $x = -1$ jednadžba nema smisla.

Zato naš primjer rješavamo ovako:

$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} / \cdot (x-1)(x+1) \neq 0$

$x + 1 + x - 1 = 2 \qquad x \neq \pm 1$, tj. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ (1)

$x + 1 + x - 1 = 2$

$2x = 2 / : 2$

$x = 1 \notin \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, pa zadana jednadžba nema rješenja.

Riješimo sada po x, u skupu $\mathbf{R}$, sljedeće primjere linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, koje sadrže i opće realne koeficijente.

Primjer 5. $a(x-1) = 3x + 2$, $a \in \mathbf{R}$.

Rješenje:

$a(x-1) = 3x + 2$

$ax - a = 3x + 2$

$ax - 3x = a + 2$

$x(a-3) = a + 2 / : (a-3) \neq 0$, $a \neq 3$, tj. $a \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ (1)

$x = \frac{a+2}{a-3}$.

1^0 $a \in \mathbf{R} \setminus \{3\} \Rightarrow x = \frac{a+2}{a-3}$,

2^0 $a = 3 \Rightarrow 0 \cdot x = 5 \Rightarrow 0 = 5 \Rightarrow \emptyset$.

Dakle, za $a \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{a+2}{a-3}$ (određena jednadžba), dok za $a = 3$ nema rješenja (nemoguća jednadžba).

Primjer 6. $2ax + 6a + x + 3 = 0$, $a \in \mathbf{R}$.

Rješenje:

$2ax + 6a + x + 3 = 0$

$2ax + x = -6a - 3$

$x(2a+1) = -3(2a+1) / : (2a+1) \neq 0$ $a \neq -\frac{1}{2}$, tj. $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (1)

$x = -3$.

1^0 $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow x = \frac{a-1}{a+2}$.

2^0 $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$.

Dakle, za $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = -3$ (određena jednadžba), dok za $a = -\frac{1}{2}$ ima beskonačno mnogo rješenja $x \in \mathbf{R}$ (neodređena jednadžba).

Primjer 7. $a^2(x-1) + a(x+2) = 2x + 1$, $a \in \mathbf{R}$.

Rješenje:

$a^2(x-1) + (x+2) = 2x + 1$

$a^2x - a^2 + ax + 2a = 2x + 1$

$a^2x + ax - 2x = a^2 - 2a + 1$

$x(a^2 + a - 2) = (a-1)^2$

$x(a+2)(a-1) = (a-1)^2 / : \quad (a+2)(a-1) \neq 0 \; a \neq -2 \wedge a \neq 1,$
tj. $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$ (1)

$x = \dfrac{a-1}{a+2}$.

1^0 $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\} \Rightarrow x = \dfrac{a-1}{a+2}$,

2^0 $a = 1 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$,

3^0 $a = -2 \Rightarrow 0 \cdot x = 9 \Rightarrow 0 = 9 \Rightarrow \emptyset$.

Dakle, za $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$ zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \dfrac{a-1}{a+2}$ (određena jednadžba), za $a = 1$ beskonačno mnogo rješenja $x \in \mathbf{R}$ (neodređena jednadžba), dok za $a = -2$ nema rješenja (nemoguća jednadžba).

Primjer 8. $\dfrac{3}{x-4} = \dfrac{5a}{a-2x}$, $a \in \mathbf{R}$.

Rješenje:

$\dfrac{3}{x-4} = \dfrac{5a}{a-2x} / \cdot (x-4)(a-2x) \neq 0 \; x \neq 4$ (1) i $x \neq \dfrac{a}{2}$ (2)

$3(a-2x) = 5a(x-4)$

$3a - 6x = 5ax - 20a$

$-5ax - 6x = -23a / \cdot (-1)$

$x(5a+6) = 23a / : (5a+6) \neq 0 \; a \neq -\dfrac{6}{5}$ (3)

$x = \dfrac{23a}{5a+6}$.

(1) $\Rightarrow \dfrac{23a}{5a+6} \neq 4 / \cdot (5a+6) \neq 0 \Rightarrow 23a \neq 20a + 24 \Rightarrow a \neq 8$ (4)

(2) $\Rightarrow \dfrac{23a}{5a+6} \neq \dfrac{a}{2} / \cdot 2(5a+6) \neq 0 \Rightarrow 46a \neq 5a^2 + 6a / \cdot (-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 5a^2 - 40a \neq 0 / : 5 \Rightarrow a(a-8) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge a - 8 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \neq 0 \wedge a \neq 8.$ (5)

1^0 $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{6}{5}, 0, 8\right\} \Rightarrow x = \dfrac{23a}{5a+6}$,

2^0 $a = -\dfrac{6}{5} \Rightarrow 0 \cdot x = -\dfrac{115}{6} \Rightarrow \emptyset$,

3^0 $a = 0 \Rightarrow \dfrac{3}{x-4} = \dfrac{0}{-2x} \Rightarrow \emptyset$,

4^0 $a = 8 \Rightarrow \dfrac{3}{x-4} = \dfrac{40}{8-2x} \Rightarrow \dfrac{3}{x-4} - \dfrac{20}{4-x} \Rightarrow \dfrac{23}{x-4} = 0 \Rightarrow \emptyset$.

Dakle, za $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{6}{5}, 0, 8\right\}$ zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \dfrac{23a}{5a+6}$, dok za $a \in \left\{-\dfrac{6}{5}, 0, 8\right\}$ nema rješenja (za $a \in \{0, 8\}$ jednadžba nema smisla).

Primjer 9. $\dfrac{x-a}{x+b} = \dfrac{x-2a-b}{x+a+2b}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Rješenje:

$\dfrac{x-a}{x+b} = \dfrac{x-2a-b}{x+a+2b} / \cdot (x+b)(x+a+2b) \neq 0 \; x \neq -b$ (1) $\wedge \; x \neq -a-2b$ (2)

$x^2 + ax + 2bx - ax - a^2 - 2ab = x^2 - 2ax + -bx + bx - 2ab - b^2$

$2ax + 2bx = a^2 - b^2$

$2x(a+b) = (a-b)(a+b) / : 2(a+b) \neq 0 \; a \neq -b$ (3)

$x = \dfrac{a-b}{2}$.

(1) $\Rightarrow \dfrac{a-b}{2} \neq -b \Rightarrow a - b \neq -2b \Rightarrow a \neq -b$ (vidi (3))

(2) $\Rightarrow \dfrac{a-b}{2} \neq -a - 2b \Rightarrow a - b \neq -2a - 4b \Rightarrow a \neq -b$ (vidi (3)).

1^0 $a \neq b \Rightarrow x = \dfrac{a-b}{2}$,

2^0 $a = -b \Rightarrow \dfrac{x-a}{x-a} = \dfrac{x-a}{x-a} \Rightarrow \dfrac{x-a}{x-a} - \dfrac{x-a}{x-a} = 0 \Rightarrow \dfrac{0}{x-a} = 0$
$\Rightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$.

Dakle, za $a \neq -b$ zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \dfrac{a-b}{2}$, dok za $a = -b$ ima beskonačno mnogo rješenja $x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$.

Primjer 10. $\dfrac{a}{3a-x} = \dfrac{2}{b-x}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Rješenje:

$\dfrac{a}{3a-x} = \dfrac{2}{b-x} / \cdot (3a-x)(b-x) \neq 0 \; x \neq 3a$ (1) $\wedge x \neq b$ (2)

$ab - ax = 6a - 2x$

$ax - 2x = ab - 6a$

$x(a-2) = a(b-6) / : (a-2) \neq 0 \; a \neq 2$ (3)

$x = \dfrac{a(b-6)}{a-2}$.

(1) $\Rightarrow \dfrac{a(b-6)}{a-2} \neq 3a / \cdot (a-2) \neq 0 \Rightarrow ab - 6a \neq 3a^2 - 6a \Rightarrow ab - 3a^2 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a(b-3a) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ (4) $\wedge \; b \neq 3a.$ (5)

(2) $\Rightarrow \dfrac{a(b-6)}{a-2} \neq b / \cdot (a-2) \neq 0 \Rightarrow ab - 6a \neq ab - 2b \Rightarrow b \neq 3a$ (vidi (5)).

1^0 $(a \neq 0 \wedge a \neq 2 \wedge b \neq 3a) \Rightarrow x = \dfrac{a(b-6)}{a-2}$,

2^0 $a = 0 \Rightarrow \dfrac{0}{-x} = \dfrac{2}{b-x} \Rightarrow \emptyset$.

3^0 $a = 2 \Rightarrow \dfrac{2}{6-x} = \dfrac{2}{b-x}$

3^0 1) $b = 6 = 3a \Rightarrow \frac{2}{6-x} = \frac{2}{6-x} \Rightarrow \frac{0}{6-x} = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{R} \setminus \{6\}$,

3^0 2) $b \neq 6 = 3a \Rightarrow \emptyset$.

4^0 $b = 3a \Rightarrow \frac{a}{3a-x} = \frac{2}{3a-x} \Rightarrow \frac{a-2}{3a-x} = 0$

4^0 1) $a = 2 \Rightarrow \frac{0}{6-x} = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{R} \setminus \{6\}$ (vidi 3^0 1).

4^0 2) $a \neq 2 \Rightarrow \emptyset$.

Dakle, za $a \neq 0$, $a \neq 2$ i $b \neq 3a$ (kada su ispunjena sva tri uvjeta) zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{a(b-6)}{a-2}$, za $a = 2$ i $b = 6$ beskonačno mnogo rješenja $x \in \mathrm{R} \setminus \{6\}$, dok za $a = 0$, ili $a = 2$ i $b \neq 6$, ili $a \neq 2$ i $b = 3a$ nema rješenja.

Primjer 11. $(2x - a - b)((x-a)^3 \cdot (x-b)^3) = 3(b-a)((x-a)^3 + (x-b)^3)$, $a, b \in \mathrm{R}$.

Rješenje:

Primjenom formula za razliku i zbroj kubova, prebacivanjem svih članova na lijevu stranu, izlučivanjem zajedničkog faktora $(2x - a - b)(a - b)$ i dijeljenjem jednadžbe s 2 dobivamo:

$$(2x - a - b)(a - b)((x-a)^2 - 2(x-a)(x-b) + (x-b)^2) = 0,$$

a odatle:

$$(a-b)^3(2x - a - b) = 0, \text{ tj. } a - b = 0 \text{ ili } 2x - a - b = 0.$$

1^0 $a = b \Rightarrow x \in \mathrm{R}$.

2^0 $a \neq b \Rightarrow 2x - a - b = 0 \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$.

Dakle, za $a \neq b$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{a+b}{2}$, a za $a = b$ beskonačno mnogo rješenja $x \in \mathrm{R}$.

Primjer 12. U jednadžbi $\frac{2}{3x - a} = \frac{3}{ax - 4}$ treba odrediti $a \in \mathrm{R}$ tako da rješenje jednadžbe bude:

a) nula, b) pozitivno, c) negativno.

Rješenje:

$\frac{2}{3x-a} = \frac{3}{ax-4} / \cdot (3x-a)(ax-4) \neq 0 \; x \neq \frac{a}{3}$ (1) $\wedge$ $ax - 4 \neq 0$ (2)

$2(ax - 4) = 3(3x - a)$

$2ax - 8 = 9x - 3a$

$x(2a - 9) = 8 - 3a / : (2a - 9) \neq 0 \; a \neq \frac{9}{2}$ (3)

$x = \frac{8-3a}{2a-9}$

(1) $\Rightarrow \frac{8-3a}{2a-9} \neq \frac{a}{3} / \cdot 3(2a-9) \neq 0 \Rightarrow 24 - 9a \neq 2a^2 - 9a / : (-2) \Rightarrow$

$a^2 \neq 12 \Rightarrow a \neq \pm 2\sqrt{3}$ (4)

(2) $\Rightarrow a \cdot \frac{8-3a}{2a-9} - 4 \neq 0 / \cdot (2a-9) \neq 0 \Rightarrow 8a - 3a^2 - 8a + 36 \neq 0 / : (-3) \Rightarrow$

$a^2 \neq 12 \Rightarrow a \neq \pm 2\sqrt{3}$ (vidi (4)).

1^0 $a \in \mathrm{R} \setminus \left\{\frac{9}{2}, \pm 2\sqrt{3}\right\} \Rightarrow x = \frac{8-3a}{2a-9}$.

2^0 $a = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{2}{3x + \frac{9}{2}} = \frac{3}{\frac{9}{2}x - 4}$

$\Rightarrow \frac{2}{6x-9} = \frac{6}{9x-8} / \cdot (6x-9)(9x-8) \neq 0 \; x \neq \frac{3}{2}$ (5) $\wedge$ $x \neq \frac{8}{9}$ (6)

$\Rightarrow 18x - 6 = 18x - 27$

$\Rightarrow 0 = -21$

$\Rightarrow \emptyset$,

3^0 $a = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{3x - 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}x - 4} / \cdot (3x - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3}x - 4) \neq 0$

$x \neq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (7)

$\Rightarrow 4\sqrt{3}x - 8 = 9x - 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow x(4\sqrt{3} - 9) = 8 - 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(7) $\Rightarrow \emptyset$

4^0 $a = -2\sqrt{3} \Rightarrow \ldots$ (analogno kao u 3^0) $\Rightarrow \emptyset$.

Dakle, dana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{8-3a}{2a-9}$ za $a \in \mathrm{R} \setminus \left\{\frac{9}{2}, \pm 2\sqrt{3}\right\}$, dok za $a \in \left\{\frac{9}{2}, \pm 2\sqrt{3}\right\}$ nema rješenja.

Ostaje još udovoljiti uvjetima primjera pod a), b) i c).

a) $x = 0 \Rightarrow a = \frac{8}{3} \in \mathrm{R} \setminus \left\{\frac{9}{2}, \pm 2\sqrt{3}\right\}$.

b)

a		$-2\sqrt{3}$		$\frac{8}{3}$		$2\sqrt{3}$		$\frac{9}{2}$	
$8 - 3a$	+	+	+	0	−	−	−	−	−
$2a - 9$	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$\frac{8-3a}{2a-9}$	−		−	0	$\boxed{+}$		$\boxed{+}$		−

$$x > 0 \Rightarrow a \in \left(\frac{8}{3}, 2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \frac{9}{2}\right).$$

c) $x < 0 \Rightarrow a \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup \left(-2\sqrt{3}, \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$.

Zadatci za vježbu

Potrebno je raspraviti realna rješenja po x ovih linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom

1. $a(x-2) = 4x + 3$, $a \in \mathbf{R}$.

   (*Rješenje*: Za $a \neq 4$ jedinstveno rješenje je $x = \dfrac{2a+3}{a-4}$, dok za $a = 4$ jednadžba nema rješenja).

2. $ax - b = bx - a$, $a, b \in \mathbf{R}$.

   (*Rješenje*: Za $a \neq b$ jedinstveno rješenje je $x = -1$, dok za $a = b$ postoji beskonačno mnogo rješenja $x \in \mathbf{R}$).

3. $\dfrac{x-a}{x-b} = \dfrac{x+a}{x+b}$, $a, b \in \mathbf{R}$

   (*Rješenje*: Za $a \neq b \neq 0$ jedinstveno rješenje je $x = 0$, za $a = b$ postoji beskonačno mnogo rješenja $x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$, dok za $a \neq b = 0$ jednadžba nema rješenja).

Literatura

[1] B. Pavković, D. Veljan: *Matematika 1. zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1994.

[2] B. Dakić, N. Elezović: *Matematika 1. algebra - udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred*, prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element, Zagreb, 2001.

[3] J. Brkić, M. Đumbir: *198 zadataka s matematičkih natjecanja učenika SŠ*, Zavod za unapređivanje stručnog obrazovanja, Zagreb, 1973.

[4] M. Nurkanović: *Linearne jednadžbe i sistemi linearnih jednadžbi s parametrima*, Triangle, VOL.3, N02, Udruženje matematičara BiH, Sarajevo, 1999.

[5] L. Čeliković: *Rasprava rješenja linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom*, Matematička škola br. 4., HMD - Podružnica Osijek, Osijek, 1995.

[6] L. Čeliković: *Jednadžbe - nestandardni zadaci za mlade matematičare*, DMM "Pitagora", Beli Manastir, 1991